INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Carla Sofia Ferreira Alves

COMUNICAÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE QUANDO RESOLVEM TAREFAS ENVOLVENDO PROPORCIONALIDADE DIRETA

Curso de Mestrado em Educação

Especialidade Didática da Matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da

Professora Doutora Lina Fonseca

fevereiro de 2012

Resumo

Comunicar na sala de aula permite aos alunos partilhar ideias matemáticas, interagir com as ideias expostas quer pelos colegas quer pelo professor, mas também aprofundar as suas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel, 2008). Neste sentido, a comunicação desenvolve o pensamento e promove a aprendizagem da matemática. Cada aluno tem o seu método de resolução de problemas, porém partilhar com os colegas outras formas de resolver o mesmo problema pode beneficiar a sua aprendizagem e promover a comunicação matemática, pois comunicar um raciocínio exige organização do pensamento.

Este estudo pretende analisar o modo com os alunos comunicam por escrito o seu raciocínio quando resolvem tarefas que envolvem proporcionalidade direta. Com a implementação do Programa de Matemática (ME – DGIDC, 2007) surgiu-me o interesse em saber como os alunos comunicam por escrito o seu raciocínio e para isso propus-me investigar as seguintes questões: (a) Como se caracteriza o desempenho de alunos do 6.º ano de escolaridade em tarefas de proporcionalidade direta; (b) Como se caracteriza a comunicação escrita de alunos? e (c) Que dificuldades manifestam os alunos na comunicação do seu raciocínio? Como podem ser superadas essas dificuldades?

Este trabalho seguiu um desenho de estudo de caso no âmbito da metodologia qualitativa de paradigma interpretativo e baseou-se na análise de quatro tarefas escritas de três pares de alunos do 6.º ano. Foram analisadas as tarefas, feitas observações e registos ao longo da sua realização e, no final, foram realizadas entrevistas aos pares estudados.

A análise dos dados permitiu constatar que os alunos têm um desempenho médio na resolução de tarefas que envolvem proporcionalidade direta; que a sua comunicação escrita se baseia essencialmente na linguagem simbólica e na linguagem verbal matemática e, que sentem grandes dificuldades em transcrever o seu raciocínio de símbolos para palavras. Os textos produzidos pelos alunos nas justificações das suas respostas são, maioritariamente, pobres e com pouca qualidade.

Palavras-chave: comunicação matemática; comunicação escrita; proporcionalidade direta; tarefas.

Abstract

Communicating in the classroom allows students to share mathematical ideas, interact with the ideas put forward either by colleagues or by the teacher, but also deepen their ideas (Boavida, Paiva, Cebola, Vale and Pimentel, 2008). In this sense, communication develops thinking and promotes the learning of mathematics. Each student has their method of solving problems, but to share with colleagues other ways to solve the same problem can benefit their learning and foster mathematical communication because communicating reasoning requires organization of thought.

This study aims to examine the way students make written communication of their reasoning when they solve tasks involving direct proportionality. With the implementation of the Mathematics Program (ME - DGIDC, 2007) came to me the interest to know how students communicate in writing their reasoning, and for that I set myself to investigate the following questions: (a) How to characterizes the performance of 6th grade students in tasks of direct proportionality?; (b) How to characterize the written communication of students? and (c) What difficulties affect students in communicating their reasoning? How can these difficulties be overcome?

This study followed a case study design within the interpretive paradigm of qualitative methodology and analysis was based on four written assignments, from each of three case studies. We analyzed the tasks, make observations and records of its implementation and at the end, interviews were conducted with each pair of students.

Data analysis has found that students have an average performance in solving tasks that involve direct proportionality; that their written communication is mainly based on the symbolic language in verbal and math, and they feel great difficulty in transcribing their reasoning symbols for words. The texts produced by students in the justifications of their answers are mostly poor and low quality.

Keywords: mathematical communication; written communication; direct proportionality; tasks.

Índice

Capítulo I – Introdução

Orientação para o problema

As orientações decorrentes do Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001), sugerem que

> os alunos devem ter oportunidade de vivenciar diversos tipos de experiências de aprendizagem, nas quais eles sejam os principais intervenientes na construção do seu próprio saber e tenham oportunidade de resolver e formular problemas, de realizar atividades de investigação e projetos e de usar jogos didáticos. Nos diversos tipos de experiências vividas pelos alunos, devem ser considerados aspetos transversais da aprendizagem, nomeadamente a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões. (p.70)

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME – DGIDC, 2007), tem por base as orientações existentes. No entanto, acrescenta algumas mudanças significativas. O programa apresenta as Finalidades e Objetivos gerais que definem as principais metas para o ensino da Matemática, comuns aos três ciclos de escolaridade, e são apresentadas novas formulações, nomeadamente a divisão em temas que acompanham os alunos ao longo dos três ciclos de escolaridade; a apresentação, em cada tema, das articulações com o ciclo anterior e, foca três capacidades transversais a desenvolver ao longo de nove anos: Comunicação Matemática, Resolução de Problemas e Raciocínio Matemático. Estas devem ocupar um papel fulcral no ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico.

O programa (ME – DGIDC, 2007) refere duas finalidades para o ensino da Matemática durante os nove anos de Educação Básica. Na primeira finalidade destaca-se, entre outros aspetos, "a capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega" (p.4). A segunda finalidade pretende desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Ligados a estas finalidades estão os objetivos gerais do ensino da Matemática, que pretendem clarificar as finalidades enunciadas e tornar mais explícito o que se espera da aprendizagem dos alunos. Assim um dos objetivos gerais do ensino da Matemática nos três ciclos é "desenvolver a capacidade de comunicação escrita, nomeadamente, através da elaboração de relatórios de tarefas e pequenos textos, levando os alunos a expressar e representar as suas ideias" (p.30).

O professor deve dar atenção ao raciocínio dos alunos incentivando-os a explicitarem com clareza o seu pensamento e a criticarem os raciocínios dos colegas, favorecendo desta forma o desenvolvimento da comunicação matemática. Esta comunicação envolve a vertente oral e escrita, "os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam" (p.5).

Por sua vez, já as Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991) referem que

> a comunicação envolve a capacidade de ler e escrever matemática e interpretar ideias. Escrever e falar sobre o que pensam clarifica as ideias dos alunos e dá ao professor informação valiosa a partir da qual ele pode tomar decisões sobre o seu trabalho. (p.94)

Mencionam ainda,

> que nos anos de escolaridade 5-8 o estudo da Matemática deverá incluir oportunidades de comunicação de forma que os alunos: (i) criem modelos de situações através de expressão oral e escrita; (ii) reflitam e clarifiquem o seu próprio pensamento acerca de ideias e de situações matemáticas; (iii) utilizem as capacidades de ler, ouvir e ver para interpretar e avaliar ideias matemáticas e, (iv) discutam ideias matemáticas e construam conjeturas e argumentos válidos (p.93),

ou seja, os alunos devem ter oportunidade de utilizar a linguagem para comunicar as suas ideias matemáticas, pois assim podem estimular uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios. Reforçam ainda a ideia de que para que os alunos comuniquem matematicamente e desenvolvam um pensamento coerente, na sala de aula, necessitam de ter diversas oportunidades de participar em discussões, sejam elas com toda a turma ou em pequenos grupos, e precisam de realizar atividades que permitam desenvolver estas capacidades.

Estes documentos nacionais e internacionais (ME, 2001; ME – DGIDC, 2007; NCTM, 1991) focam a importância do desenvolvimento da capacidade de comunicar na aula de Matemática, principalmente da comunicação escrita. Na análise da prova intermédia de Matemática para o 2.º ano de escolaridade realizada em junho de 2011 (GAVE, 2011) verifica-se que muitas questões solicitam aos alunos que expliquem o modo como pensaram, o que revela a importância da comunicação matemática, na sua vertente escrita, atribuída pela tutela. Assim, este tema revela-se propiciador para a elaboração de estudos que permitam perceber como se desenvolve esta capacidade junto dos alunos e quais os constrangimentos que a acompanham.

Em Portugal já foram realizados alguns estudos que visam compreender papel da comunicação no contexto de sala de aula. Menezes, num estudo que realizou em 1996, questiona: “Porquê o interesse pela problemática da comunicação no ensino e na aprendizagem da Matemática?”, ao que responde “dizer que a comunicação é algo tão natural como a própria existência do homem em comunidade, poderia ser uma forma de abordar esta questão” (p.1). Acrescenta que “assumindo que a aprendizagem é uma atividade como uma componente social importante, resultante da interação entre indivíduos, dificilmente se poderia conceber uma situação de ensino/aprendizagem em que a comunicação não tivesse uma forte presença” (p.1).

Moreira (2008) refere que existem diferenças entre a comunicação estabelecida durante a resolução de um problema e a comunicação escrita utilizada na justificação dos resultados, sendo, maioritariamente, a primeira mais rica, mais rigorosa, convincente e resistente. Com o estudo que realizou verificou que é necessário envolver os alunos em atividades matemáticas que desenvolvam a oralidade e a escrita, para que o traquejo da comunicação escrita se acentue. Similarmente, Carvalho e Pimenta (2005) salientam que

> a escrita constituiu uma importante ferramenta de aprendizagem, podendo desempenhar um papel de relevo nos processos de aquisição, estruturação e exploração de conhecimento. A posse de competências de escrita pode estar associada ao sucesso na escola, já que grande parte da comunicação que aí tem lugar assenta em suporte escrito. (…) Facilita a reflexão sobre as ideias e sobre a linguagem que no papel se tornam concretas e permanentes. Enquanto processo cognitivo, o ato de escrever facilita a geração, a organização e o aprofundamento das ideias. (p.1)

Problema e questões de investigação

O Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º ciclo de 2009 (GAVE, ME, 2009), foca que 5% a 10% dos aspetos da competência matemática são para a comunicação matemática, onde é avaliada a interpretação e utilização de representações matemáticas e "textos" matemáticos e, a comunicação do pensamento matemático ou a estratégia de resolução de um problema de forma coerente e clara, utilizando a linguagem matemática. Contudo, refere que o desempenho dos alunos, tanto em Números e Cálculo como em Geometria, decresce nos itens que avaliam o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a resolução de problemas, todos com uma taxa de insucesso de aproximadamente 68%. Na conclusão o relatório menciona que,

> De modo global, os resultados obtidos pelos alunos do 6.º ano do Ensino Básico, nesta prova, revelam que estes são detentores de um conhecimento de conceitos e procedimentos razoável. No entanto, evidenciam também a dificuldade que os alunos ainda manifestam na resolução de problemas contextualizados, bem como, uma preocupante falta de sentido crítico face à plausibilidade das soluções que apresentam. Neste sentido, é importante que, não descurando o conhecimento e a compreensão de conceitos e procedimentos, os professores promovam, com mais frequência, experiências matemáticas em que os alunos resolvem problemas com

contexto, discutam as suas estratégias de resolução e analisam o significado das suas soluções. (p.22)

Por sua vez, o Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2.º ciclo de 2010 (GAVE, ME, 2010) revela que os itens que apresentam maior percentagem de "não respostas" são relativos à Geometria, destacando-se o da comunicação de Geometria (item 22) com 12,4% de alunos que não responderam e 51,9% que tiveram código zero. Apenas 8,6% dos alunos obtiveram a codificação máxima e 27,1% deram respostas parcialmente corretas. É ainda possível ler neste relatório que "os alunos continuam a manifestar dificuldades na comunicação escrita das suas ideias e raciocínios matemáticos" (p.40).

Assim sendo, cabe-nos a nós professores, escolher tarefas que tenham um papel importante na criação de oportunidades ricas de comunicação, tal como referem Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008). Também relativamente às tarefas propostas pelos professores, Martinho (2007) refere que "o professor precisa de criar oportunidades para que, por um lado, o aluno aprenda Matemática e, por outro, que aprenda como discutir e argumentar Matemática" (p.56) e cita Rocha e Fonseca "as tarefas não devem constituir um pretexto, mas um estímulo para o desenvolvimento do poder matemático dos alunos" (p.48). Nesta perspetiva, o papel do professor é crucial para o desenvolvimento do poder comunicativo dos alunos (Boavida e colegas, 2008)

> a comunicação está sempre presente na sala de aula, tenha esta características inovadoras ou se reja por um padrão tradicional. Em qualquer dos casos, cabe ao professor gerir a comunicação e garantir que ela ocorre em múltiplas direções: do professor para o (s) aluno (s), do aluno para o professor e de aluno para aluno (s). (p.62)

Por um lado, o NCTM (1991) foca que

> a comunicação é o veículo através do qual professores e alunos podem reconhecer a matemática como um conjunto de processos de resolução de problemas e de raciocínio. A comunicação é também importante por si própria, uma vez que os

alunos devem aprender a descrever os fenómenos através de várias formas escritas, orais e visuais. (p.98)

Desde muito cedo, o ser humano tem necessidade de comunicar e, como descrevem Sim-Sim, Silva e Nunes (2008) “comunicar constitui uma experiência central do desenvolvimento da criança” (p.29) e “à medida que a criança se desenvolve, as forças de comunicação tornam-se cada vez mais sofisticadas” (p.31). Assim, desde o jardim de infância e ao longo de todo o percurso escolar, as crianças vão desenvolvendo e melhorando a comunicação, inclusivamente nas aulas de Matemática. Segundo Baroody, citado por Menezes (1999), faz todo o sentido focar a comunicação na aula de Matemática, por duas razões: uma porque a Matemática é essencialmente uma língua, outra é que tanto a Matemática como o seu ensino são atividades sociais.

Por outro lado, como já foi referido anteriormente, a comunicação matemática é um dos pontos fulcrais do Programa (ME – DGIDC, 2007) e fiquei curiosa em conhecer, um pouco mais, como os alunos escrevem e descrevem o seu raciocínio e, como os professores vão quase todos implementá-lo pela primeira vez, este estudo pode ajudar-nos como professores do 2.º ciclo do ensino básico a melhorar a nossa intervenção na sala de aula no sentido de potenciarmos o desenvolvimento da capacidade de comunicar dos nossos alunos. Assim, dada a importância da comunicação matemática, propus-me a estudar a comunicação escrita de alunos do 6.º ano de escolaridade quando resolvem tarefas envolvendo proporcionalidade direta e para orientar o estudo defini três questões:

(a) Como se caracteriza o desempenho de alunos do 6.º ano de escolaridade em tarefas de proporcionalidade direta?;

(b) Como se caracteriza a comunicação escrita dos alunos?;

(c) Que dificuldades manifestam os alunos na comunicação do seu raciocínio? Como podem ser superadas essas dificuldades?

Estrutura do trabalho escrito

O presente estudo é constituído por cinco capítulos: introdução, revisão de literatura, metodologia do estudo, apresentação e análise de dados e conclusões.

No primeiro capítulo estão focadas as orientações curriculares para a comunicação matemática, o problema e questões de investigação.

Na revisão de literatura (capítulo 2) foi dada relevância à comunicação e dentro desta à comunicação escrita, à comunicação matemática e à proporcionalidade direta.

Quanto ao terceiro capítulo, nele estão descritas as opções metodológicas. É descrito o estudo de caso e os três casos que fazem parte desta investigação; o contexto em que decorreu o estudo; os participantes e as razões da sua seleção; a recolha de dados, especificamente as tarefas; as observações e notas de campo retiradas durante o estudo e as entrevistas realizadas após a realização das tarefas. É apresentado o modo como se analisaram os dados, bem como a calendarização do estudo.

No capítulo quatro é feita a apresentação e a análise de dados. São descritas e examinadas as tarefas: um, dois, quatro, sete e onze, realizadas pelos três pares de alunos.

Por fim, no quinto capítulo, são apresentadas as conclusões do estudo, são apresentadas sugestões para futuras investigações e são deixadas as notas finais.

Capítulo II – Revisão de Literatura

Comunicação e comunicação escrita

Segundo a Enciclopédia (Guedes, 2004) comunicação "é o processo que realiza a transmissão interpessoal de ideias, sentimentos e atitudes; para além da informação possibilita e garante a dinâmica de grupo e a dinâmica social. Pode ser verbal ou não" (p.2204, vol.5).

A comunicação humana envolve troca de informações, de conhecimentos através de mensagens faladas, gesticuladas ou escritas. Neste estudo deseja-se que os alunos construam as suas ideias e as transmitam ao pequeno grupo em que estão inseridos e também à turma, ou seja, pretende-se que os alunos comuniquem entre si, não só oralmente, mas principalmente por escrito.

A natureza e o papel da comunicação na aula de Matemática dependem da teoria de aprendizagem que os analisam, Sierpinska (1998) estudou três diferentes abordagens que a comunicação pode desempenhar nas aulas de Matemática: construtivista, sócio-histórica e interacionista. Para as distinguir usa algumas metáforas: numa aula construtivista, apoiada pela teoria de Piaget, "*os alunos falam o professor ouve"*, salientando que através da linguagem os alunos estruturam o seu pensamento. Realça ainda que os professores de matemática construtivistas muitas vezes dão ênfase ao papel positivo da interação social e da comunicação no desenvolvimento mental dos alunos, ou seja, estes dois fatores influenciam o desenvolvimento do raciocínio do aluno. Numa aula sócio-histórica, inspirada em Vygotsky, "*os professores falam, os alunos ouvem"*. A aprendizagem é assente na aquisição de estruturas sociais já existentes, e a linguagem é o meio de transmissão cultural, de conhecimentos e valores de geração em geração. A linguagem, assume portanto, um instrumento de comunicação e é vista como um facto cultural. Na sala de aula, a comunicação ajuda a mediar o conhecimento que se pretende que os alunos adquiram. Por fim, quando o substrato é a orientação interacionista, "*professores e alunos em diálogo"*, ou seja, os significados são negociados entre o professor e os alunos, sendo tarefa do professor desempenhar o papel importante na negociação do significado, procurando facilitar a partilha de sentido pelos membros da cultura da aula.

Num estudo recente, Marques (2008) cita Menezes dizendo que “o ato educativo, que envolve ensinar e aprender, é acima de tudo comunicar” (p.32), e assim sendo estamos todos muito envolvidos neste processo comunicativo que, segundo alguns autores (Menezes, 1996, 1999; Sim-Sim e colegas, 2008; Mata, 2008), a comunicação oral ou escrita deve ser incrementada pelo professor porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e conhecimentos dos alunos.

É do conhecimento de todos nós, que desde sempre, o homem procura comunicar com os seus semelhantes. Inicialmente, através de sinais de fumo e sons e posteriormente, ainda na pré-história, criou a linguagem escrita. Contudo, foram precisos muitos e longos anos para descobrir como deixar os seus registos: primeiro desenhava-se nas paredes e mais tarde os egípcios criaram os hieróglifos. Assim, aos poucos, foi-se desenvolvendo o alfabeto, depois as palavras e por fim as frases.

A comunicação escrita tem como principal finalidade dizer algo que seja importante e, tal como falar, escrever requer uma aprendizagem. Lampreia (1996) diz que “o treino é essencial para o bom desempenho da escrita” (p.2). Os grandes escritores defendem que a leitura é a base da arte de escrever, e ler é a interpretação de símbolos gráficos de maneira a compreendê-los. Definem ainda, como as cinco atividades fisiológicas: ler, pensar, falar, ouvir e escrever, estando todas elas relacionadas entre si pois o pensamento é expresso pela fala, recebido pela audição, gravado pela escrita e interpretado pela leitura. Contudo, falar e escrever impõem técnicas muito diferentes, por mais perfeita que seja, a transcrição da fala para a escrita não consegue fazer com que esta atinja o colorido da fala (Lampreia, 1996).

Assim sendo, verifica-se que são vários os autores (Lampreia, 1996; Menezes, 1996; Marques, 2008; NCTM-APM, 2008) que defendem que a linguagem escrita, pelas suas características e pela sua natureza processual, problemática e social do uso, pode ser considerada um elemento facilitador da construção do pensamento. Bruschman, citado por Ponte; Guerreiro; Cunha; Duarte; Martinho; Martins; Menezes; Menino; Varandas; Veia e Viseu (2007) sustenta que a linguagem escrita é uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem da Matemática. Através da linguagem oral e escrita os alunos podem refletir sobre a sua compreensão da disciplina, ajudando-os a fazer conexões e a clarificar os conceitos aprendidos. Assim, sempre que os alunos comunicam matematicamente, recordam, compreendem e usam os conhecimentos anteriores na aquisição de novos conhecimentos.

Também Pimm (1987) refere que existem várias razões pelas quais os registos escritos são benéficos, não só para o aluno, mas também para o professor. No seu estudo, o autor menciona algumas das vantagens deste tipo de linguagem, nomeadamente: “o trabalho escrito pode ser realizado em privado e com reflexão evitando as distrações que acontecem na avaliação oral com interrupções dos colegas e do professor”; “permite que todos os alunos da turma, ao mesmo tempo, comuniquem sobre determinado assunto”; “fornece um acesso específico a determinados pensamentos dos alunos” e “fornece os erros, os equívocos e as crenças dos alunos” (pp.113-114). Assim, “o registo da escrita nas aulas de Matemática pode ajudar o professor, indicando a conceção do aluno acerca de um determinado conceito e fornece ao professor um sentido visível do sucesso pessoal do aluno” (p.114). Defende ainda que “a fala desempenha frequentemente uma função mais direta da comunicação, mas o que persiste dela são apenas lembranças do que alguém disse”, por sua vez, “um atributo essencial da linguagem escrita é que é visível, e de certa forma permanente e repetidamente acessível” (Pimm, 1987, p.111).

Freitag (1997), citando Emig, defende que a escrita é o mais poderoso e único modo de aprendizagem, pois envolve o máximo possível do funcionamento do cérebro. Escrever é uma ferramenta poderosa porque fornece uma forma única de *feedback*. Quando o aluno escreve, as informações estão prontamente visíveis e disponíveis, permitindo-lhe analisar a sua argumentação e verificar se o fez de forma clara.

A escrita é a chave de todo o processo de ensino-aprendizagem podendo desempenhar um papel de relevo nos processos de aquisição, estruturação e expressão de conhecimento (Carvalho e Pimenta, 2001). Whitin e Whitin, citados por Marques (2008), defendem que tem de se valorizar a linguagem dos alunos porque esta funciona como janela para o processo de construção de significados, isto é, sem comunicação torna-se impossível construir o conhecimento. Também o NCTM-APM (2008) foca a importância da comunicação escrita no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, uma vez que os ajuda a consolidar o seu pensamento pois obriga-os a clarificar as suas ideias acerca dos conteúdos trabalhados nas aulas.

A comunicação pode ser oral ou escrita. Contudo, segundo Lampreia (1996), existe uma grande dificuldade em transpor as ideias para o papel utilizando as palavras corretas no momento certo. A maior parte das vezes pensamos que a palavra não expressa suficientemente o que ela quer dizer e o texto acaba por ser uma fileira de palavras com o mesmo sentido ou que se relacionam entre si. Isto acontece porque antes de se iniciar a escrita não organizamos as ideias e escrevemos o texto sem o ver como um todo. Carvalho e Pimenta (2001) referem que o insucesso muitas vezes não está associado à falta de conhecimentos mas sim à incapacidade de o verbalizar por escrito.

Por sua vez, Civil (1998) refere que a comunicação depende, em parte, do tipo de tarefas que são apresentadas aos alunos e distinguiu três tipos: tarefas baseadas em resolução de problemas, tarefas baseadas em "coisas que eles sempre souberam" e tarefas destinadas à criação de conflitos cognitivos. Para tentar compreender a comunicação matemática e a falta de clareza dos alunos a autora cita Pirie e Schwarzenberger que consideram como algumas das razões: a falta de compreensão do tema em discussão; a falta de experiência de comunicação matemática; a crença/confiança na matemática e a relação da dinâmica do grupo.

Para complementar a análise do discurso dos alunos Pirie e Schwarzenberger (1988) defendem que o tipo de linguagem usada pelos alunos e o tipo de declarações que eles fazem são cruciais. Para os autores, linguagem e declarações não são sinónimos e é importante fazer uma distinção dos termos: "declarações reflexivas podem ser feitas em linguagem comum e, inversamente, uma nova linguagem matemática pode permitir fazer novas e poderosas declarações operacionais" (p. 466). Assim, para codificar e classificar os episódios de discussão descrevem três parâmetros: o foco da discussão, o tipo de linguagem utilizada e o tipo de declarações feitas.

> Primeiro parâmetro: o que é que dá aos falantes algo sobre o que falar?
> a) Eles têm uma tarefa ou objeto concreto como foco das suas conversas.
> b) Eles não têm uma compreensão de algo, mas sabem disso e dá-lhes alguma coisa para falar.
> c) Eles têm algum entendimento e isso dá-lhes algo para falar.
> Segundo parâmetro: Qual o nível de linguagem que estão a usar?
> f) Eles carecem de linguagem apropriada, pois não usam palavras certas ou úteis.
> g) Eles usam linguagem comum.
> h) Eles usam a linguagem matemática.
> Terceiro parâmetro: Que tipo de declarações estão a ser feitas?
> p) Declarações incoerentes, ou seja, incoerentes aos outros participantes.
> q) Declarações operacionais sobre o que fazer ou como fazê-lo.
> r) Declarações reflexivas oferecendo explicações ou tentativas para ir além da tarefa imediata. (p. 467, 468)

Comunicação matemática

A Comunicação matemática está fortemente patente no Programa de Matemática (ME – DGIDC, 2007).

> A Comunicação matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática a que este programa dá realce. A comunicação envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática. O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, mas também de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação oral tem lugar tanto em situações de discussão na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos,

> promovem a comunicação escrita. O desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, é assim considerado um objetivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. *(*p.8)

Por sua vez, em Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM-APM, 2008) para a comunicação referenciam que os programas de ensino desde o pré-escolar ao 12.º ano de escolaridade devem habilitar todos os alunos para:

> (i) organizar e consolidar o seu pensamento matemático através da comunicação; (ii) comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros; (iii) analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros e, (iv) usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão. (p.66)

De acordo com estas capacidades a desenvolver referem ainda que "a comunicação é uma parte essencial da Matemática e da educação matemática" (p.66), que "a reflexão e a comunicação são processos intimamente relacionados na aprendizagem da Matemática" (p.67), que "a comunicação escrita deverá ser encorajada" (p.68) e que "é importante evitar a imposição precoce e prematura da linguagem matemática formal" (p.69). No desenvolvimento destas aptidões, o professor é o grande encenador, pois é ele que passa o que está escrito nos programas e nas normas para a cena, ou seja para a sala de aula. Portanto, cabe ao professor preparar tarefas que desafiem e estimulem os alunos a escrever em Matemática e a propósito da Matemática, criar o hábito da escrita a partir da Matemática e sobre a Matemática, como referem Boavida e colaboradores (2008).

Menezes (1996), citando Lappan e Schram, refere que estas autoras consideram que "qualquer aula de Matemática deve incorporar "espaços" onde o aluno possa raciocinar e comunicar as suas ideias. É necessário que o professor escute os alunos e lhes peça para explicarem o seu pensamento" (p.4).

Em Matemática,

> a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construir um vínculo entre as noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da Matemática. Deste modo aprender Matemática exige comunicação, pois é através dos recursos de comunicação que as informações e as representações são veiculadas entre as pessoas. (Smole & Diniz, citados por Marques, 2008)

Segundo Pirie (1998) é através da linguagem que alunos e professores expressam a sua compreensão matemática, podendo esta ocorrer através de seis meios: linguagem comum, linguagem matemática (oral e escrita), linguagem simbólica, representação visual, compreensões não ditas mas partilhadas e linguagem quase matemática.

A linguagem que os alunos usam no seu dia a dia, através da sua língua materna é considerada a linguagem comum e é definida como o primeiro meio. Segundo a autora, varia de acordo com os alunos conforme as suas idades e estágios de compreensão.

A linguagem verbal matemática é o segundo meio de comunicação, em que verbal se refere ao uso de palavras, escritas ou faladas.

Como terceiro meio de comunicação matemática, Pirie (1998) define a linguagem simbólica, em que os alunos comunicam escrevendo símbolos matemáticos. Para exemplificar este meio de comunicação a autora dá o exemplo do símbolo “3/4” que pode ser entendido como uma divisão de três por quatro, uma unidade dividida em quatro partes iguais em que são tomadas três delas ou ainda pode ser interpretado como uma comparação entre duas quantidades.

A representação visual é o quarto meio de comunicação e para Pirie (1998) é uma forma de comunicar extremamente importante, pois permite que os alunos expressem as suas ideias através de gráficos, diagramas, esquemas ou outros elementos visuais. Outro autor, Usiskin (citado por Menezes, 1996), designa este tipo de comunicação matemática como linguagem pictórica em que se comunica através, por exemplo, de gráficos, diagramas, barras de Cuisenaire ou desenhos e, Ponte e Serrazina (2000) classificam-na de linguagem icónica.

Os últimos dois meios de comunicação matemática, compreensões não ditas mas partilhadas e linguagem quase matemática são para Pirie (1998) meios de comunicação de natureza diferente dos quatro anteriores. Os quatro primeiros meios evidenciam-se pela forma que assumem e por aquilo que colocam em jogo para comunicar, os dois últimos pelo que é comunicado. A comunicação denominada por compreensões não ditas mas partilhadas acontece quando os alunos conversam sobre o que lhes é familiar partilhando, desta forma, significados.

Por fim, a autora define linguagem quase matemática quando os alunos utilizam formulações pouco ortodoxas e dá como exemplo quando os alunos usam a comparação de uma balança equilibrada de dois pratos para entender os membros de uma equação.

Apesar da ênfase que é dada à comunicação nas aulas de Matemática, e do professor saber que é o grande impulsionador do desenvolvimento desta capacidade, muitas vezes "saber *quando* e *como* pode esta comunicação ser promovida, saber que tarefas favorecem o desenvolvimento da comunicação matemática na aula são apenas alguns dos aspetos que podem constituir constrangimentos ao professor" (Sousa, Cebolo, Alves & Mamede, 2008, p.3). Ainda, segundo estes autores,

> é manifesto que o professor tem conceções e crenças que por vezes não permitem a promoção da comunicação matemática em sala de aula. A sua postura é de tal forma tradicionalista que não dá lugar à comunicação oral e escrita. Estas conceções e crenças redutoras, impossibilitam os alunos de desenvolverem a comunicação matemática, pois se o próprio professor não consente o desenvolvimento desta capacidade, o aluno não tem sequer a oportunidade de a poder praticar. (p. 4)

A par destas dificuldades, os mesmos investigadores, salientam como obstáculos, enfrentados pelos professores, ao desenvolvimento da comunicação matemática na sala de aula: a escolha das tarefas, a valorização das produções dos alunos, o incentivo à explicação de processos de resolução e a forma de intervenção (Sousa e colegas, 2008).

Um estudo realizado em Portugal (Ponte e colegas, 2007) revela que,

> grande parte dos jovens professores refere que os seus alunos manifestam dificuldades de comunicação. Explícita ou implicitamente reconhecem que a comunicação é uma capacidade a desenvolver nos alunos. As estratégias indicadas pelos jovens professores para desenvolver a capacidade de comunicação são escassas, remetendo para o questionamento do professor e para uma atenção continuada a este aspeto. São poucos os professores que se referem à diversificação de situações de aprendizagem e à necessidade de que o discurso dos alunos seja valorizado como discurso legítimo para produzir e ouvir na turma. (p. 31)

Também Moreira (2008) quis perceber, entre outras coisas, como se caracteriza a qualidade da comunicação entre alunos quando trabalham em pequenos grupos e quais as dificuldades dos alunos no âmbito da comunicação. A autora verificou que a qualidade da comunicação pode ser considerada, maioritariamente, razoável e que esta é influenciada pela organização da comunicação e pelas competências colaborativas manifestadas pelos alunos. Verificou ainda que “a compreensão matemática e o conhecimento do tópico são fatores influentes na organização e qualidade da comunicação estabelecida”, (p. 137) tal como o tempo despendido na realização da tarefa, já que “o grupo com melhor desempenho comunicativo foi sempre o último a terminar as tarefas” (p. 138). No que se refere às dificuldades dos alunos no âmbito da comunicação matemática a autora menciona que se focam, principalmente, na estruturação de respostas escritas e, nos grupos com qualidade de comunicação fraca/razoável apresentam também dificuldades, “em exprimir e argumentar”… “em estabelecer interações positivas e harmoniosas” … “na proposta, análise, crítica, avaliação e integração de ideias” e “na interpretação de perguntas” (p. 142). Para ultrapassar estas lacunas Moreira (2008) considera que o professor deve:

> (a) estimular o desenvolvimento de competências colaborativas colocando os alunos em situações de resolução de problemas em pequenos grupos para os alunos serem capazes de alcançar uma organização colaborativa da comunicação e estabelecer uma situação de comunicação argumentativa construtiva com boa qualidade; (b) promover atividades e estratégias que possibilitem aos alunos exprimir e argumentar oralmente de modo a desenvolver competências neste

> domínio; (c) incrementar situações de comunicação escrita de modo a desenvolver as competências necessárias e superar as dificuldades na seleção e articulação de categorias de comunicação assim como da informação necessária; … (f) promover a comunicação na sala de aula participando como um modelo na comunicação, orientando e reforçando os padrões de interação válidos, fazendo-o com participação em pequenos grupos e/ou no âmbito do grande grupo de modo a focalizar a atenção dos alunos nos aspetos matemáticos importantes; (g) por último, contribuir para uma mudança na consciência dos alunos, valorizando o processo e a aprendizagem em detrimento do resultado e da tarefa. (p. 143)

Stacey e Gooding (1998) referem que está explicito na literatura que quando os alunos trabalham em pequenos grupos de discussão, a aprendizagem é mais significativa. Os alunos interagem mais uns com os outros e com as tarefas e, utilizam estratégias mais adequadas (citando Sharan & Shachar, 1988; Webb, 1991). No estudo que implementaram " comunicação e aprendizagem em pequenos grupos de discussão" verificaram que os grupos mais eficazes: falaram mais e com vocabulário matemático mais específico; discutiam explicitamente a ideia central do problema; trabalhavam juntos, lendo em voz alta as questões do problema e repetindo as declarações uns dos outros; propunham ideias e explicações com convicção, reorganizavam a discussão com mais frequência e, responderam a mais questões.

Proporcionalidade Direta

Mora e Aymemí (1990) referem que a proporcionalidade está associada à antiguidade com a ideia de precisar quantitativamente a noção de semelhança, sendo um termo muito usado desde cedo na rotina diária das populações. No que concerne à linguagem que está associada aos termos de proporcionalidade, razão e proporção, distinguem três níveis de linguagem: linguagem do quotidiano, linguagem gráfica e linguagem formal. Relativamente ao primeiro nível, relatam que os termos associados à proporcionalidade aparecem em vários documentos desde revistas a livros de literatura e que a palavra proporção pode substituir palavras do uso quotidiano como parte ou pedaço. A linguagem gráfica refere-se a desenhos, diagramas e esquemas e, por fim, a linguagem formal diz respeito à linguagem mais formalizada sobre o tema.

No que se refere ao desenvolvimento do conhecimento da proporcionalidade, os mesmos autores, mencionam que

> já que uma proporção é uma relação que se estabelece entre relações, as crianças não podem construí-las no estádio das operações concretas (7 aos 11 anos). Mas podem gradualmente: (a) estabelecer compensações aditivas $a + b = c + d$; (b) comparar por diferença $a - c = d - b$; (c) formular correlações qualitativas; (d) comparar qualitativamente a relação entre variáveis; (e) conhecer frações; (f) iniciar as compensações multiplicativas do tipo $xy = zv$. (Mora & Aymemi, 1990, p.109)

A partir do momento em que os alunos compreendem as compensações multiplicativas do tipo $ab = a'b'$, compreendem também a noção de proporção $\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}$.

Assim sendo, constata-se que o conceito de proporcionalidade não é recente e que está muito presente no nosso quotidiano. Contudo a sua compreensão desenvolve-se gradualmente. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) consideram-no essencial no desenvolvimento da capacidade de lidar com diversas situações do mundo real; na apreensão de conhecimentos em várias áreas do saber e, no desenvolvimento cognitivo do aluno.

Silvestre e Ponte (2006) referem que o conceito de proporcionalidade é fundamental na interpretação de fenómenos do mundo real e na resolução de problemas, e que no contexto escolar, o raciocínio proporcional, está presente na aprendizagem de vários conteúdos como Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Também Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008), consideram que este tema é de extrema importância no currículo da Matemática e que devia "ocupar uma parte central tanto no currículo para as escolas quanto no dos cursos de formação inicial de professores de Matemática" (p. 131).

Associado ao conceito da proporcionalidade encontra-se o raciocínio proporcional, considerado por vários autores (Ben-Chaim e colegas, 2008; Godinho e Batanero, 2004) e pelas Normas (NCTM-APM, 2008), fundamental para o ensino da Matemática e extremamente útil na interpretação de situações da vida quotidiana, pelo que deve ser desenvolvido cuidadosamente ainda que o seu desenvolvimento implique tempo e esforço.

No antigo Programa de Matemática – Plano de Organização de Ensino – Aprendizagem, Volume II (ME, 1991), no tema da Proporcionalidade – desenvolver o conceito de proporcionalidade direta – faz-se referência ao facto de "os alunos quando chegam ao 6.º ano, já utilizaram muitas vezes raciocínios de proporcionalidade" (p.29) contudo, o programa do 1.º ciclo não se refere explicitamente a este tema. Desta forma, vai-se ao encontro do que vários autores defendem, as crianças desde cedo usam a proporcionalidade em vivências do quotidiano (e.g. Mora e Amymemí, 1990; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

No atual Programa de Matemática (ME - DGIDC, 2007), o conceito é referido nos temas matemáticos do 2.º ciclo, "aprofunda-se o estudo da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões" (p.7); na articulação da álgebra com o 1.º ciclo

> no 1.º ciclo, trabalha-se com as estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que constitui uma base para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade. No 2.º ciclo, este assunto é aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção, (p.40)

e, nos objetivos gerais de aprendizagem, surge referência à necessidade de "compreender a noção de proporcionalidade direta e usar o raciocínio proporcional" (p. 40).

As Normas (NCTM-APM, 2008) referem que todos os alunos deveriam aprender álgebra, uma vez que a componente algébrica se revela importante na vida adulta e que os programas de ensino, desde o pré-escolar, devem preparar os alunos para compreender relações e analisar a variação em diferentes contextos. Portanto, de uma forma informal, expõe que o raciocínio proporcional deve ser desenvolvido desde muito cedo.

Também, Walle (2007) defende que o raciocínio proporcional é uma das metas mais importantes do ensino básico pois está presente nas frações, na álgebra, nas probabilidades, nos gráficos de dados e na semelhança de figuras. Para reforçar a sua conceção faz referência a Lesh, Post e Behr "o raciocínio proporcional é a pedra angular do ensino básico e a pedra fundamental da álgebra" (p.353). Refere ainda que existem várias atividades informais que desenvolvem o raciocínio proporcional, como por exemplo atividades de identificação de relações multiplicativas, seleção de frações equivalentes, comparação de frações e, construções e medições. Cada uma delas oferece uma oportunidade diferente para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, mas como são informais não se destinam a produzir diretamente as habilidades algorítmicas ou procedimentos. Contudo, é fundamental que os alunos se familiarizem com atividades similares a estas para desenvolverem adequadamente o raciocínio proporcional.

Apesar da importância que o raciocínio proporcional desempenha no percurso escolar dos alunos e na própria vida quotidiana, Ben-Chaim e colegas (2008, p. 131) referem que várias pesquisas mostram que "poucos alunos, com habilidades razoáveis, usam o raciocínio proporcional de modo adequado (Post; Berh e Lesh, 1988), ou enfatizam com sucesso atividades que o envolvam" (Ben-Chaim e colegas, 1998).

Segundo Oliveira e Santos (2000) o conceito de proporção é adquirido pelas crianças antes do ensino formal do tema. Para confirmar estas conceções resolveram fazer um estudo com alunos da 5.ª à 8.ª série[1], visto o tema só ser abordado na 6.ª série. Com este estudo identificaram as seguintes estratégias usadas pelos alunos: não identificadas, adições sucessivas, valor unitário, fator de proporcionalidade e regra de três simples. Referem-se a estratégia não identificada quando não conseguem entender o cálculo que foi usado pelo aluno para resolver o problema, uma vez que o mesmo só regista a resposta do problema.

No que concerne ao desempenho dos alunos no ensino formal das proporções, Pittalis, Chistou e Papageorgiou (2003), consideram quatro níveis de complexidade no desempenho dos alunos para as respostas dadas:

[1] No ensino brasileiro é utilizada a designação de "série" no sentido de ano de escolaridade.

> - nível pré-estrutural : dados ou processos incorretos são usados de modo simplista o que conduz a conclusões irrelevantes.
> - nível uniestrutural: um único dado ou conceito é aplicado a pelo menos um item dos dados. Pode ser utilizada uma conclusão inválida, porque os dados selecionados não foram suficientes.
> - nível multiestrutural: processos e conceitos são usados num ou mais itens de dados, mas sem a síntese de informações ou conclusões intermediárias. Isto pode indicar o desempenho cognitivo inferior ao requerido para a solução correta do problema.
> - nível relacional: a resposta é caraterizada pela síntese de informações, processos e resultados intermediários. (p.3)

No primeiro nível, as repostas dos alunos possuem ideias subjetivas e não relacionadas com os dados do problema, o que leva a uma conclusão irrelevante. As respostas dos alunos são caracterizadas por revelarem ideias subjetivas e não serem relacionadas com a estrutura nem com os dados do problema. Os alunos apresentam respostas numéricas erradas e sem justificação ou apresentam palavras isoladas retiradas dos dados do problema, mas sem suporte numérico.

No segundo nível os alunos utilizam um único processo ou conceito a pelo menos um dos dados. As respostas deste nível não têm em consideração todas as informações fornecidas pelos problemas ou ignoram sistematicamente a estrutura multiplicativa dos problemas de proporção, as conclusões podem estar incorretas por serem obtidas a partir de dados insuficientes. Por vezes, os alunos também aplicam estratégias aditivas ou uma ordem multiplicativa. Para melhor compreender as respostas dos alunos deste nível, são tidos em conta dois subníveis: o aditivo e uma ordem multiplicativa. No primeiro subnível os alunos não compreendem o conceito de proporção e focam-se em estruturas aditivas. Os alunos utilizam os padrões aditivos na solução de problemas. No subnível ordem multiplicativa os alunos compreendem a razão de uma proporção e a relação multiplicativa entre as duas quantidades. Contudo, não são capazes de aplicar essa relação para uma segunda relação da ordem da analogia.

No nível multiestrutural os alunos utilizam estratégias formais ou informais, mas não conseguem sintetizar todos os elementos do problema ou a resposta é orientada processualmente. Com base na carga cognitiva de cada estratégia, este nível divide-se em dois subníveis: elementar[2] e processual. As respostas no subnível elementar são caracterizadas por uma conceção elementar da analogia. Os alunos percebem as relações entre os termos do problema, mas não compreendem o conceito de analogia, a equivalência entre duas razões, ou seja não sintetizam todas as relações da proporção. Os alunos chegam à resposta correta mas não pelo processo correto. No nível processual, os alunos utilizam sistematicamente uma estratégia específica independentemente dos dados do problema, normalmente a estratégia de "valor unitário". O uso sistemático desta estratégia não deixa os alunos pensar noutras que sejam mais apropriadas ao problema. Neste subnível os alunos são capazes de resolver um problema, mas incapazes de justificar a sua resposta ou a sua justificação é incompleta.

Por fim, no nível relacional a resposta dos alunos incorpora a aplicação de estratégias formais e informais, isto é, são capazes de utilizar diversas estratégias, independentemente do conhecimento do tipo e da estrutura do problema ou da dificuldade das relações proporcionais. Os alunos também têm a flexibilidade de escolher a estratégia mais adequada, independentemente das relações entre os termos da analogia e têm a capacidade de justificar a sua seleção. Este nível também está dividido em dois subníveis: o semisseletivo e o formal seletivo. No primeiro subnível os alunos chegam a uma resposta usando uma variedade de estratégias formais e informais de acordo com o tipo de relações dos problemas. No entanto, não são capazes de justificar as suas respostas e acreditam que cada estratégia é a única apropriada para determinados problemas. No segundo as respostas são semelhantes às do primeiro subnível com duas grandes diferenças: a escolha da estratégica é mais flexível e não é influenciada por fatores tais como os números ou os problemas em questão. Particularmente, a presença de razões com números não inteiros não afeta o raciocínio dos alunos na resolução de problemas de proporcionalidade. Os alunos são capazes de escolher a estratégia mais adequada na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade direta.

[2] Original *frailty*

Costa (2007) investigou o raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo e, entre outros aspetos, estudou as estratégias que são usadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem raciocínio proporcional; que dificuldades ou erros são apresentados pelos alunos e em que momento da resolução da tarefa surgem. A autora verificou que os alunos, conforme o tipo de tarefa, recorriam a diferentes estratégias: procedimentos multiplicativos, procedimentos aditivos (*building-up*), tabelas pouco estruturadas, regra de três simples e a propriedade fundamental das proporções. Segundo a autora os resultados obtidos pelos alunos foram satisfatórios e de modo geral eles conseguiram explicar o seu raciocínio. Os erros surgiram na execução do plano de resolução, sendo os mais vulgares: manter constante a diferença entre os valores; nos resultados e, principalmente, na apresentação de cálculos incompreensíveis ou errados. No final do estudo a investigadora averiguou que nas questões de valor omisso (são dados 3 valores e é pedido o quarto valor) os alunos passaram a utilizar mais estratégias multiplicativas, em vez de aditivas, e que a estratégia preferida é a regra de três simples. No que se refere às tarefas de comparação numérica (são dadas duas razões e quer-se a comparação entre as duas), os alunos progrediram, substancialmente, no poder argumentativo, deixando argumentos subjetivos passando a argumentos mais aceitáveis matematicamente. Contudo, notou que alguns alunos não alteraram as suas estratégias de resolução, usavam as que estavam habituados e não as que eram mais rápidas. As dificuldades deixaram de estar focadas na execução do plano de resolução e passaram para o momento da interpretação da tarefa e dos seus dados. Assim concluiu que houve um progresso crescente no desempenho dos alunos, principalmente, no tipo/sofisticação de estratégias apresentadas, na qualidade dos argumentos usados, nas suas justificações e uma maior tendência para o uso de estratégias multiplicativas.

Outras pesquisas demonstram que "há evidências de que um amplo segmento da nossa sociedade nunca adquire fluência no pensamento proporcional" (Hofer citado por Ben-Chaim e colegas, 2008, p.131) e que existem muitas lacunas por parte dos professores que exercem a profissão e dos professores em formação quanto a temas matemáticos como "razão" e “proporção”. Muitos destes professores detêm “conhecimento técnico, esquemático, desconectado e incoerente” (Fischbein; Jehiam; Cohen, 1994; Sowder e colegas, 1998; Keret, 1999; Ben-Chaim; Ilany; Karet, 2002, citados por Ben-Chaim e colegas, 2008, p.131) o que os impede de dominar e ensinar estes conceitos aos seus alunos.

Ainda, relativamente a pesquisas realizadas com futuros professores de Matemática, Silvestre (2006) faz referência a dois estudos que demonstram que o tema da Proporcionalidade é bastante complexo. Um, efetuado por Monteiro (2003), refere que “a totalidade dos erros registados em problemas de relação aditiva entre variáveis, deve-se ao uso inadequado da regra de três simples” (p.12) e quando foi pedido para não ser utilizada qualquer regra os erros foram provenientes da “utilização de raciocínio aditivo e a erros de cálculo da razão” (p. 12). Outro, desenvolvido por Peled e Hershkovitz (2004), revela que “alguns professores não usam o raciocínio proporcional e outros consideram incorretas respostas dadas por alunos mais sofisticadas que as suas” (p. 12).

Visto serem várias as investigações que mostram que os professores de Matemática em formação possuem diversas lacunas tanto ao nível dos tópicos que envolvem raciocínio proporcional como em relação ao conteúdo propriamente dito, Ben-Chaim e colegas (2008) concordam que é de extrema importância que “haja pelo menos um semestre, nos cursos de formação, em que estes tópicos sejam trabalhados” (p. 149) e sugerem algumas atividades que poderão ser trabalhadas e ajudarão os futuros professores a ultrapassar as suas lacunas.

Ainda sobre a temática de como ajudar os alunos a compreenderem temas como frações, proporções e percentagens, que são os que os alunos consideram mais difíceis, Chick (s/d) refere algumas estratégias, usadas por diferentes investigadores, que os professores podem utilizar para ajudar os seus alunos. Por exemplo, Mitchelmore, White e McMaster (2007) e, Steinthorsdottir e Sriraman (2009) analisaram a importância da representação visual, recorrendo a barras divididas, no estudo das frações e razões. Verificaram, também, que o conhecimento dos alunos pode melhorar se o professor recorrer a um ensino cognitivamente orientado e averiguaram que os alunos têm diferentes níveis de compreensão. Para além das representações visuais, autores como, Middleton e van den Heuvel-Panhuizen (1994); Brinker (1998) e Dole (2008), sugerem o uso de tabelas de relação, onde os alunos podem organizar os dados e começar por preencher a tabela com uma razão conhecida e desenvolver outras equivalentes, recorrendo a multiplicações simples, facilitam a compreensão destes temas e o desenvolvimento do pensamento multiplicativo. A autora refere, ainda, que algumas investigações revelam que a compreensão destes temas, "muitas vezes centra-se no desafio de desenvolver o pensamento multiplicativo necessário, e sobre a importância de identificar as partes componentes e do todo associado" (p.145).

Capítulo III – Metodologia do estudo

Esta investigação pretende estudar como os alunos comunicam por escrito o seu raciocínio quando realizam tarefas e resolvem problemas que envolvem a proporcionalidade direta. Neste capítulo estão descritas as opções metodológicas, os participantes, os instrumentos utilizados na recolha de dados, o modo como foram analisados os dados e a calendarização de todas as atividades.

Opções metodológicas

O paradigma qualitativo também referenciado como interpretativo, fenomenológico, naturalista, humanista ou etnográfico, surgiu primeiro em Antropologia e em Sociologia e só mais tarde é que passou a ser utilizado em áreas como a Psicologia e a Educação. Privilegia o contexto natural como fonte direta dos dados sendo o investigador o principal elemento de recolha enquanto observador do que quer investigar. Privilegia a descrição, os dados recolhidos apresentam-se normalmente num texto (texto das entrevistas, fotografias, gravações, documentos pessoais, artigos), e menos com o aspeto numérico (Bogdan e Biklen, 1994).

Os métodos qualitativos são adequados quando se pretende observar, registar, analisar, refletir, dialogar e repensar e não pretende quantificar, ou seja, para usar métodos qualitativos é preciso aprender a observar, registar e analisar interações reais entre pessoas, e entre pessoas e sistemas (Liebscher, 1998, citado por Dias, 2000).

De acordo com o problema e as questões colocadas, este estudo assumirá a forma de estudo de caso, múltiplo, segundo Merriam, citado por Bogdan e Biklen (1994), visto que serão acompanhados mais de perto três pares de alunos. Ainda, segundo estes autores, num estudo de caso os investigadores "começam por recolher os dados, revendo-os e explorando-os" (…) "organizam e distribuem o seu tempo, escolhem as pessoas que irão entrevistar e quais os aspetos a aprofundar" (p.89).

Contexto

O estudo foi realizado numa escola da região Norte, com 1097 alunos dos quais 681 são do 2.º ciclo do Ensino Básico.

Uma parte significativa dos alunos vem de ambientes familiares desestruturados e apresentam alguns problemas de integração social e escolar, onde mais de metade dos alunos beneficia de auxílios económicos, no âmbito da Ação Social Escolar. Apenas 42,1% dos alunos têm computador em casa e destes 19,2% não dispõem de ligação à Internet. Conhecem-se, as habilitações literárias de 45,3% dos pais e, destes 27% têm o 2.º ciclo, 22,1% têm o 3.º ciclo, 20,3% têm o 1.º ciclo, 19,1% têm o ensino secundário, 11% possuem habilitação de nível superior e 0,5% não tem qualquer habilitação.

Trata-se de uma escola em que os alunos manifestam bastante indisciplina, tendo sido instaurados 72 processos disciplinares no ano letivo 2009/2010 e um valor aproximado a este no presente ano letivo. As causas apontadas para a indisciplina centram-se na sobrelotação da escola e na falta de assistentes operacionais, a qual condiciona a resolução dos comportamentos menos adequados, relacionados com a convivência nos recreios.

Participantes

Os participantes são alunos do 6.º ano de escolaridade (ano letivo 2010/2011), de uma turma constituída por 25 alunos com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos.

Ao contrário da maioria das turmas do agrupamento, trata-se de uma turma com alunos disciplinados e empenhados nas tarefas escolares, os Encarregados de Educação são preocupados e atentos à evolução das aprendizagens dos seus educandos.

A investigação decorreu nas aulas de Estudo Acompanhado, a par da lecionação do tema Proporcionalidade Direta, nas aulas de Matemática. As tarefas foram implementadas em oito blocos de 90 minutos, contudo, algumas delas não ocuparam todo o tempo a serem realizadas. Em algumas aulas foram aplicadas duas tarefas.

A escolha do tema deveu-se ao facto de não haver muitas investigações sobre o mesmo e as que existem não se referirem à análise da capacidade de comunicação escrita dos alunos. Paralelamente a esta razão, reconheço que a proporcionalidade é um tema que nos facilita bastante na rotina quotidiana e que está presente em quase tudo que nos rodeia, por isso penso que é importante para os alunos compreenderem a sua utilidade, não só na escola mas também, e principalmente, fora dela. Outra razão da minha escolha foi tentar perceber porque é que os alunos manifestam imensas dificuldades neste tema.

Do estudo fazem parte apenas três pares de alunos da turma, que têm desempenhos médios e bons, visto que se pretende analisar a sua produção escrita. A escolha dos alunos envolvidos foi feita de duas formas: inicialmente selecionei três alunos que me interessava estudar, visto terem bom desempenho nas diferentes disciplinas, inclusivamente Matemática e, por serem alunos empenhados e responsáveis. Depois dei a opção a esses alunos de escolherem os seus pares de trabalho, uma vez que, segundo Civil (1998) um dos elementos essenciais que influencia as discussões em pequenos grupos é a dinâmica de grupos. Também Moreira (2008) refere que “os grupos com qualidade de comunicação razoável/fraca apresentaram dificuldades sociais ao nível das competências colaborativas de formação e funcionamento relacionadas com o estabelecimento de conflitos entre os seus elementos prejudicando a cordialidade e harmonia das interações e das participações” (p. 142). Desta forma, permiti que os pares se sentissem confortáveis para partilharem as suas ideias, tal como refere a autora. Assim os três pares eram constituídos por três alunos com bom desempenho a Matemática, com níveis de quatro e cinco (os que eu escolhi) e por três alunos com desempenho médio, com níveis de três (os escolhidos pelos pares).

A minha relação com a turma era extremamente cordial e afável, havendo respeito mútuo e uma grande empatia entre mim e os alunos. Desde setembro a finais de janeiro fui professora de Matemática da turma, contudo nessa altura regressou a colega que eu estava a substituir e entretanto, a partir dessa data, substitui outra colega e passei a ser professora de Ciências da Natureza e Estudo Acompanhado. Curiosamente deixei de ser professora de Matemática na altura que ia começar a lecionar o tema da proporcionalidade portanto, o estudo foi realizado nas aulas de Estudo Acompanhado. Como já conhecia bem o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática não foi difícil escolher os alunos para o estudo.

O par A é constituído por duas alunas: a Ana Rita com bom desempenho a todas as disciplinas porque é muito estudiosa e a Marisa com desempenho médio.

O par B é constituído por dois alunos: o Emanuel com bom desempenho e bom raciocínio matemático, mesmo sem estudar muito e o Leonardo com desempenho médio que poderia ser bom se fosse um aluno mais aplicado.

O par C é constituído por uma rapariga, a Diana, que é muito aplicada e tem um bom raciocínio matemático e um rapaz, o Joel, que devido à sua falta de concentração tem desempenho médio.

No geral a turma tem aproveitamento e comportamento bastante razoáveis. A escolha destes pares baseou-se essencialmente no maior empenho e responsabilidade dos alunos na realização das tarefas.

Recolha de dados

A recolha de dados realizou-se através da resolução de diferentes tarefas escritas que envolveram o tema da proporcionalidade direta; documentos, resolução escrita dos alunos; notas de campo e entrevistas.

A realização das tarefas decorreu paralelamente à lecionação do tema pela professora de Matemática. Correspondeu aproximadamente a 8 aulas de 90 minutos e decorreu durante os meses de fevereiro e março do ano letivo 2010/2011. Durante a implementação das tarefas foram tiradas notas de campo. Nestas notas, entre outros aspetos, registava as tarefas em que os alunos demonstravam mais dificuldades e qual o envolvimento dos pares na realização das mesmas. Após a implementação das tarefas foram realizadas entrevistas para melhor compreender algumas das respostas dos alunos, visto que na implementação das tarefas não foram tiradas dúvidas aos alunos para não influenciar o seu raciocínio. Como refere um dos estagiários/licenciados que fez parte da investigação de Sousa e colaboradores (2008) “numa atividade de investigação o professor deve apenas orientar os alunos nas suas descobertas e não influenciá-los de acordo com as suas previsões” (p. 8).

É de salientar que durante o terceiro período do ano letivo anterior, 2009/2010, foi realizado um ensaio da recolha de dados com algumas das tarefas de forma a perceber se eram suficientes, desafiadores e significativas para a realização do estudo, bem como para averiguar se eram as apropriadas para o objetivo do estudo, ou seja, se promoviam a comunicação escrita dos alunos. Como consta nas Normas (NCTM – APM, 2000), “no ensino, tarefas matemáticas significativas são usadas para introduzir importantes ideias matemáticas e para motivar e desafiar intelectualmente os alunos. Tarefas bem escolhidas podem despertar a curiosidade dos alunos e motivá-los em relação à Matemática” (p.18). Serviu ainda para verificar se os enunciados das tarefas eram claros e não suscitavam problemas de compreensão aos alunos.

Essa recolha realizou-se nas aulas de Matemática durante a lecionação do tema Proporcionalidade Direta. Este estudo exploratório revelou-me que quando os alunos diziam que não entendiam o que lhes era pedido e quando como professora lhes explicava a tarefa acabava por influenciar a resposta deles, tal como referem Sousa e colaboradores (2008) e Moreira (2008). Assim, depois desta experiência e pela aprendizagem ocorrida, durante o presente estudo, optei por não tirar qualquer dúvida que surgisse durante a resolução das tarefas. Apenas voltava a ler o enunciado com os alunos pois, muitas vezes as suas dificuldades situam-se na interpretação do enunciado.

Como referi anteriormente, após a aplicação das tarefas foram realizadas várias entrevistas com os diferentes pares do estudo para tentar compreender melhor o seu raciocínio e os motivos das suas escolhas metodológicas, uma vez que apenas um dos pares explicou sempre por escrito o seu raciocínio. Os outros, na maior parte das tarefas, limitaram-se a realizar cálculos e a usá-los como justificação.

Tarefas

Foram implementadas onze tarefas (Anexo1) ao longo do estudo mas só se apresenta a análise de cinco delas. A escolha das tarefas a analisar baseou-se na heterogeneidade do desempenho dos alunos e nas dificuldades demonstradas na realização das mesmas.

Ao selecionar as tarefas tive o cuidado de seguir Civil (1998) e escolher tarefas baseadas em resolução de problemas, tarefas baseadas em "coisa que eles sempre souberam" e tarefas destinadas à criação de conflitos cognitivos. As diferentes tarefas foram retiradas e adaptadas de estudos já realizados e de manuais escolares. A primeira tarefa foi adaptada do estudo "The significance of task design in Mathematics Education: examples from proportional reasoning" onde colaboraram entre outros: Dirk De Bock, Wim Van Dooren e Lieven Verschaffel (2005), autores do estudo "not everything is proportional: task design and small-scale experiment", a qual adaptei. As tarefas 2, 3, 4, 5 e 6 foram adaptadas do plano de formação contínua em Matemática da Universidade de Aveiro e as tarefas 7, 8, 9, 10 e 11 foram retiradas do manual: Matemática no 2.º ciclo - propostas para a sala de aula, programa de formação m2 da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

A primeira tarefa foi apresentada ainda antes do começo do estudo do tópico da Proporcionalidade Direta e tinha por objetivo fazer uma apreciação do conhecimento dos alunos para a deteção de situações de proporcionalidade direta. De acordo com Civil (1998), é baseada em "coisas que eles sempre souberam" e destinadas à criação de conflitos cognitivos, poderia ser considerada, também, uma tarefa de resolução de problemas, mas não foi com esse fim que ela foi aplicada. A tarefa serviu, ainda, para averiguar se as crianças desde cedo usam a proporcionalidade em vivências do quotidiano, como defendem vários autores (Mora e Amymemí, 1990; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; Oliveira e Santos, 2000) e diferentes documentos curriculares (Programa de Matemática, 1991; Programa de Matemática, 2007; NCTM-APM, 2008), que referem que muitas das bases do tópico da Proporcionalidade Direta são trabalhadas ao longo do 1.º ciclo e quando os alunos chegam ao 6.º ano de escolaridade já se depararam com diversas situações de proporcionalidade.

Depois seguiram-se tarefas para aplicação de conhecimentos sobre Proporcionalidade Direta, nas quais estava patente a resolução de problemas, tarefas 2, 3, 5, 7, 9 e 10 e, tarefas destinadas à criação de conflitos cognitivos, tarefas 4, 6, 8 e 11 (Civil, 1998).

Entrevistas

As entrevistas serviram para recolher mais dados sobre o raciocínio dos alunos, complementar a falta de comunicação escrita, bem como para perceber as dificuldades sentidas pelos alunos na realização das tarefas. Estas decorreram após a implementação das tarefas, sempre que possível, na mesma semana em que foram aplicadas ou então na semana seguinte. Cada entrevista teve a duração de, aproximadamente, vinte minutos e foram realizadas na hora de almoço para não interferir com as aulas dos alunos. A maior parte delas foram áudio gravadas através do computador e posteriormente passadas para papel. Sempre que as respostas dos alunos estavam explicitas e bem estruturadas e as entrevistas eram mais curtas não era feita a gravação áudio, apenas era feito um registo escrito. Os alunos interagiram e colaboraram bastante durante a sua realização e, sempre que necessitaram efetuaram cálculos para facilitar o seu raciocínio e melhor se explicarem.

Notas de campo

As notas de campo foram tiradas no decorrer da realização das tarefas. Serviram essencialmente para registar as dificuldades e as conversas dos pares ao longo da implementação das tarefas. Como não foram retiradas quaisquer dúvidas ao longo da implementação das tarefas, os pares discutiram bastante as suas ideias, o que contribuiu bastante para estes registos.

Análise de dados

Para responder às questões do estudo, os dados recolhidos foram analisados e organizados em categorias.

Assim, para apreciar o desempenho dos alunos foram consideradas três categorias: Bom, Médio e Fraco, tendo em conta os itens seguintes, suscitados pelo trabalho escrito dos alunos:

i- leu e interpretou o problema.

ii- selecionou e implementou corretamente as estratégias de resolução. Seguindo Oliveira e Santos (2000) as estratégias consideradas foram: não identificadas; adições sucessivas; valor unitário; fator de proporcionalidade e regra de três simples.

iii- em que nível se encontram as resoluções dos alunos. Aqui seguiu-se Pittalis, Chistou e Papageorgiou (2003): nível preestrutural; nível uniestrutural; nível multiestrutural e nível relacional.

Considerando estes parâmetros, o desempenho dos alunos é considerado:

Bom, quando os alunos:

- leram e interpretaram corretamente o problema;
- aplicaram a estratégia mais adequada (Oliveira e Santos, 2000);
- consideraram todos os aspetos do problema na sua resolução (Pittalis e colegas, 2003);
- responderam corretamente.

Médio, quando os alunos:

- leram e interpretaram corretamente o problema;
- não aplicaram a estratégia mais adequada (Oliveira e Santos, 2000);
- não consideraram todos os aspetos do problema na sua resolução (Pittalis e colegas, 2003);
- responderam conforme as falhas cometidas.

Fraco, quando os alunos:

- não leram nem interpretaram corretamente o problema;
- não aplicaram a estratégia mais adequada (Oliveira e Santos, 2000);

- não consideraram todos os aspetos do problema na sua resolução (Pittalis e colegas, 2003);
- responderam incorretamente, ou não responderam.

Para caraterizar a comunicação escrita dos alunos e depois de estudar as suas respostas baseei-me em Pirie (1998) que considera que a comunicação escrita pode caraterizar-se pelo recurso à:

a) linguagem comum – do dia a dia;

b) linguagem verbal matemática – uso de palavras escritas ou faladas;

c) linguagem simbólica – uso de símbolos;

d) linguagem visual – gráficos, diagramas, esquemas;

e) linguagem quase matemática – uso de formulações pouco ortodoxas (p.e. metáforas).

Após a análise das duas questões iniciais foram averiguadas as dificuldades manifestadas pelos alunos quando comunicam o seu raciocínio e como poderão ser ultrapassadas.

Calendarização

A investigação decorreu entre fevereiro de 2010 e fevereiro de 2012. A revisão de literatura foi realizada em todos os momentos da investigação.

Como foi realizado um estudo exploratório antes da investigação, com o intuito de testar as tarefas a implementar, a preparação das mesmas decorreu em duas fases: a primeira durante o ano letivo 2009/2010, nos meses de março e abril, para o estudo exploratório que realizei antes deste estudo, e a segunda decorreu nos meses de dezembro e janeiro do ano letivo 2010/2011. Na última fase, foram organizadas e selecionadas tarefas de natureza mais aberta, uma vez que durante o estudo exploratório verifiquei que as tarefas propostas não eram suficientes e as mais adequadas ao desenvolvimento da comunicação escrita.

Durante do estudo exploratório, ano letivo 2009/2010, foram realizados todos os passos de uma investigação. Houve a preparação das tarefas, a sua aplicação em sala de aula e posterior análise das respostas dos alunos. Foram também realizadas entrevistas com os alunos para perceber quais as dificuldades apresentadas pelas tarefas e possíveis alterações a fazer para melhorar a sua compreensão.

A implementação das tarefas ocorreu no ano letivo 2010/2011, nos meses de abril e maio, no decorrer do tópico da Proporcionalidade Direta.

A análise de dados foi efetuada após a realização das tarefas.

As entrevistas foram realizadas após a implementação das tarefas e as notas de campo foram escritas ao longo da implementação das tarefas.

Por fim, a escrita do relatório final foi iniciada após o estudo exploratório, no ano letivo 2009/2010 e foi terminada em fevereiro de 2012.

Fases de trabalho	mar/abr 2010	mai/jun 2010	(…)	fev/mar 2011	abr/mai 2011	jun/dez 2011; jan/fev 2012
Revisão literatura						
Preparação/reorganização das tarefas						
Estudo exploratório (implementação, análise e entrevistas)						
Recolha de dados (implementação tarefas)						
Notas de campo						
Entrevistas						
Análise de dados						
Escrita do relatório final						

Capitulo IV – Apresentação e Análise de dados

Neste capítulo é feita a apresentação das tarefas e seguidamente são apresentadas as resoluções efetuadas pelos pares e a sua análise, especificamente focada no desempenho, na comunicação escrita e nas dificuldades manifestadas pelos alunos. Segue-se uma análise comparativa do desempenho dos diferentes pares em cada uma das tarefas. Este estudo pretendeu responder às questões:

a) Como se caracteriza o desempenho de alunos do 6.º ano de escolaridade em tarefas de proporcionalidade direta?

b) Como se caracteriza a comunicação escrita dos alunos?

c) Que dificuldades manifestam os alunos na comunicação do seu raciocínio? Como podem ser superadas essas dificuldades?

Apresentação das tarefas analisadas

Tarefa 1

A tarefa 1 foi implementada em duas fases distintas da investigação: antes de ser lecionado o tema da proporcionalidade direta e após a sua lecionação.

Trata-se de uma tarefa que se revelou bastante difícil para os alunos, tanto na primeira vez que foi aplicada como na segunda. Inicialmente os alunos não compreendiam o que tinham de fazer, sabiam que tinham de agrupar os problemas mas não sabiam se os tinham de resolver primeiro ou em que é que se deviam basear para os agrupar.

No estudo exploratório que foi realizado no ano letivo 2009/2010 os alunos demoraram noventa minutos a realizar esta tarefa e as suas respostas foram bastante influenciadas pelas ajudas que fui dando à medida que era questionada pelos diferentes pares. Para não se voltar a verificar a mesma situação, neste estudo, não dei qualquer ajuda. Apenas li os problemas com os alunos e disse-lhes que os podiam agrupar da forma que quisessem desde que justificassem, convenientemente, as suas escolhas. Ao perceberem que não teriam qualquer ajuda da minha parte, cada par de alunos começou a resolver a tarefa da forma que achou mais correta. A tarefa foi efetuada em aproximadamente sessenta minutos e ao longo da sua realização houve bastante envolvimento e discussão entre os alunos para tentarem chegar a uma conclusão. Apenas circulei pela sala para ouvir as discussões dos pares e retirar notas de campo.

Após o término da lecionação do tema, a tarefa foi aplicada novamente e os alunos demoraram cerca de vinte minutos a realizá-la.

Tarefa 2

A atividade dois é a típica tarefa de verificar onde existe proporcionalidade direta. Nas duas receitas o número de pessoas duplica e, apena numa delas todas as quantidades dos ingredientes também duplicam. É uma atividade rotineira que muitas vezes é trabalhada no primeiro ciclo.

Tarefa 4

Esta tarefa é muito semelhante à tarefa dois, contudo com uma grande diferença: as quantidades não são o dobro umas das outras. São dadas duas receitas de concentrado de laranja e os alunos têm de descobrir qual delas sabe mais a laranja. Para responderem acertadamente têm de verificar que o número de copos de concentrado do Tiago aumenta uma vez e meia, ou seja têm de aplicar o raciocínio multiplicativo com números não inteiros.

Tarefa 7

Esta tarefa trata-se de um problema típico de proporcionalidade de valor em falta, segundo alguns autores os mais usados pelos professores (De Bock e colegas, 2005).

Neste problema os alunos podiam recorrer a diferentes processos para o resolver, como por exemplo: tentativa e erro, desenho, regra de três simples ou formar uma proporção.

Tarefa 11

Nesta tarefa os alunos tinham de desenhar um novo tangram sabendo que a medida 4 passava para 6. Para completarem a construção tinham de descobrir para que medida passava o valor 2.

Tangram Pitagórico

Material: Papel quadriculado; lápis; régua; tesoura

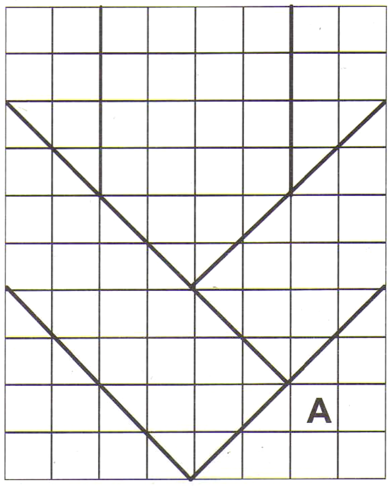
Desenvolvimento:

Considera o seguinte puzzle, construído com base num retângulo.

O triângulo A é retângulo e isósceles e o seu cateto (lado) tem 4 unidades de comprimento.

1. Recorta as peças, que te são dadas em anexo e constrói o retângulo. Cola-o no espaço em branco.

2. Constrói agora outro tangram em que a medida 4 passe para 6.



Depois de obteres as sete peças tenta construir o novo retângulo.

Foi uma tarefa que se revelou bastante morosa e difícil para os alunos. Através das notas de campo foi possível constatar que, inicialmente, os alunos começaram por desenhar, através de tentativa, aumentando apenas a medida 4 para 6 e ver como ficava a medida 2 sem efetuar qualquer cálculo ou raciocínio. Quando verificavam que o tangram não ficava bem construído faziam nova tentativa, aumentavam duas medidas em todas as medidas iniciais e, mais uma vez, o tangram não ficava bem construído. Ao fim destas experiências só o par C percebeu que teria de usar cálculos.

Resolução das tarefas pelos pares

Par A (Ana Rita e Marisa)

Tarefa 1

Como referi anteriormente, esta tarefa foi implementada duas vezes durante o estudo. A primeira vez antes da lecionação do tópico da proporcionalidade e a segunda após a sua lecionação. Para realizarem esta tarefa, as alunas indicaram sempre os cálculos que envolviam cada problema e só depois os agruparam.

Assim, as suas respostas foram as seguintes:

	Antes da lecionação do tema		Após a lecionação do tema	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
Par A	A, E, F, H	B, C, D, G	A, C, D, F, G, H	B, E

As justificações utilizadas antes da lecionação do tema foram: "no grupo 1 os problemas resolvem-se com multiplicações e no grupo 2 com somas" e após terem trabalhado o tema da proporcionalidade direta nas aulas de matemática, as suas justificações foram: "no grupo 1 envolve cálculos em todos os problemas e no grupo 2 envolve raciocínio e lógica".

Antes de estudarem o tópico da proporcionalidade direta, as alunas sentiram bastantes dificuldades na classificação dos problemas, especialmente no que se refere às operações a utilizar na resolução dos problemas. No primeiro grupo colocaram dois problemas de proporcionalidade, um problema aditivo e um de não proporcionalidade e dizem que são resolvidos com multiplicações. Por sua vez, no grupo dois colocaram dois "problemas constantes"[3], um problema aditivo e um de proporcionalidade e dizem que são resolvidos com somas. Verifica-se que as alunas não foram capazes de distinguir o tipo de problemas, nem de identificar as estratégias de resolução, erros, que provavelmente, estão associados à pouca familiaridade com problemas deste tipo, uma vez que durante

[3] Entende-se por "problemas constantes" aqueles em que a resposta está no enunciado do problema (problemas B e G).

a realização da tarefa as alunas discutiram bastante os processos de resolução dos problemas.

Após o término do estudo do tópico em questão, a Ana Rita e a Marisa, separaram os problemas em “os que não exigem cálculos, apenas raciocínio e lógica” e “os que envolvem cálculos”, não especificando o tipo de cálculos. Fizeram uma separação mais correta, à exceção de terem colocado um problema constante no grupo dos problemas que envolvem cálculos.

Enquanto realizavam a tarefa e eu circulava pela sala, presenciei à discussão das alunas acerca da classificação “raciocínio e lógica”. A Ana Rita defendia que o problema B tinha uma “ratoeira” e era parecido com um que fizeram numa das aulas de Matemática, e que o problema E não era possível calcular pois dependia da “quantidade de comida que a Ana comesse” e por isso não se podiam fazer cálculos, isto porque a Marisa tentava fazer cálculos e tinha chegado a 7,850 Kg (resposta que depois apagaram, mas que ficou percetível).

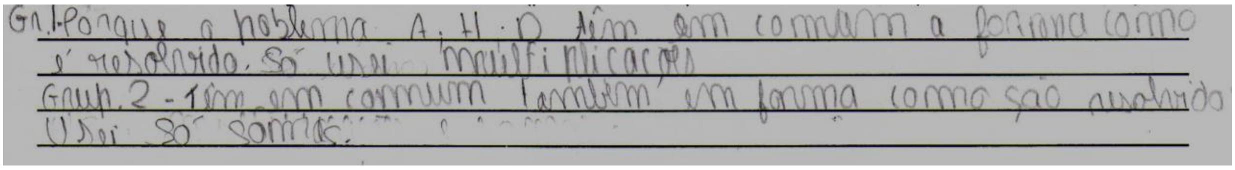
Comparando as duas resoluções, notei uma certa evolução da primeira aplicação da tarefa para a segunda. Houve uma maior preocupação em ler os enunciados dos problemas com mais detalhe e atenção de forma a não serem induzidas em erro. Evoluíram também nos argumentos que utilizaram para separar os problemas em dois grupos, sendo esta última fundamentação mais aceitável do que a primeira. Contudo, foram respostas muito simplistas, inseguras e pouco fundamentadas matematicamente.

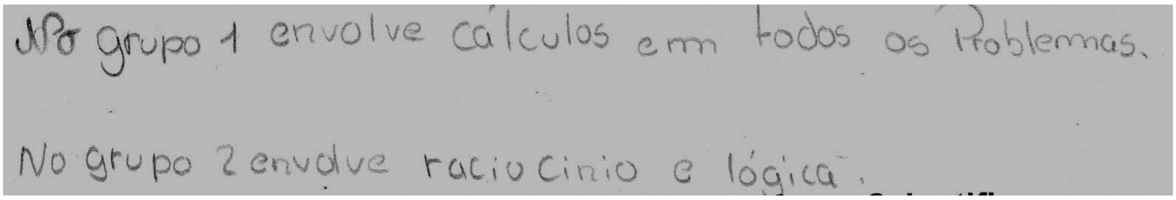
Sintetizando, no primeiro contato com a tarefa nenhum aluno entendeu o que era pretendido com ela, não por conter um enunciado complexo ou longo, mas por nunca terem realizado qualquer tarefa do género desta. Porém, após alguma discussão entre os elementos dos pares, sobre diferentes estratégias de resolução conseguiram realizar a tarefa. Também a Ana Rita e a Marisa, após várias leituras cuidadas e atentas do enunciado, conseguiram interpretá-lo corretamente. Entenderam que era necessário agrupar os problemas e arranjar critérios que justificassem as suas escolhas. Apesar da insegurança, mostraram empenho e interesse na realização da tarefa.

Relativamente à escolha e implementação da estratégia de resolução, as alunas optaram por identificar os processos/operações de resolução de cada problema. Foi uma boa estratégia, contudo não procederam à separação acertada dos problemas pelos grupos. Os erros cometidos foram devidos à identificação incorreta das estratégias de resolução dos problemas. Assim, o seu desempenho foi considerado médio na leitura e interpretação do problema e fraco na seleção e implementação da estratégia.

A resposta das alunas encontra-se no nível uniestrutural, em que um único dado ou conceito é aplicado a pelo menos um item dos dados. Pode ser utilizada uma conclusão inválida, porque os dados selecionados não foram suficientes (Pittalis e colegas, 2003).

A comunicação das alunas centra-se na linguagem verbal da matemática,

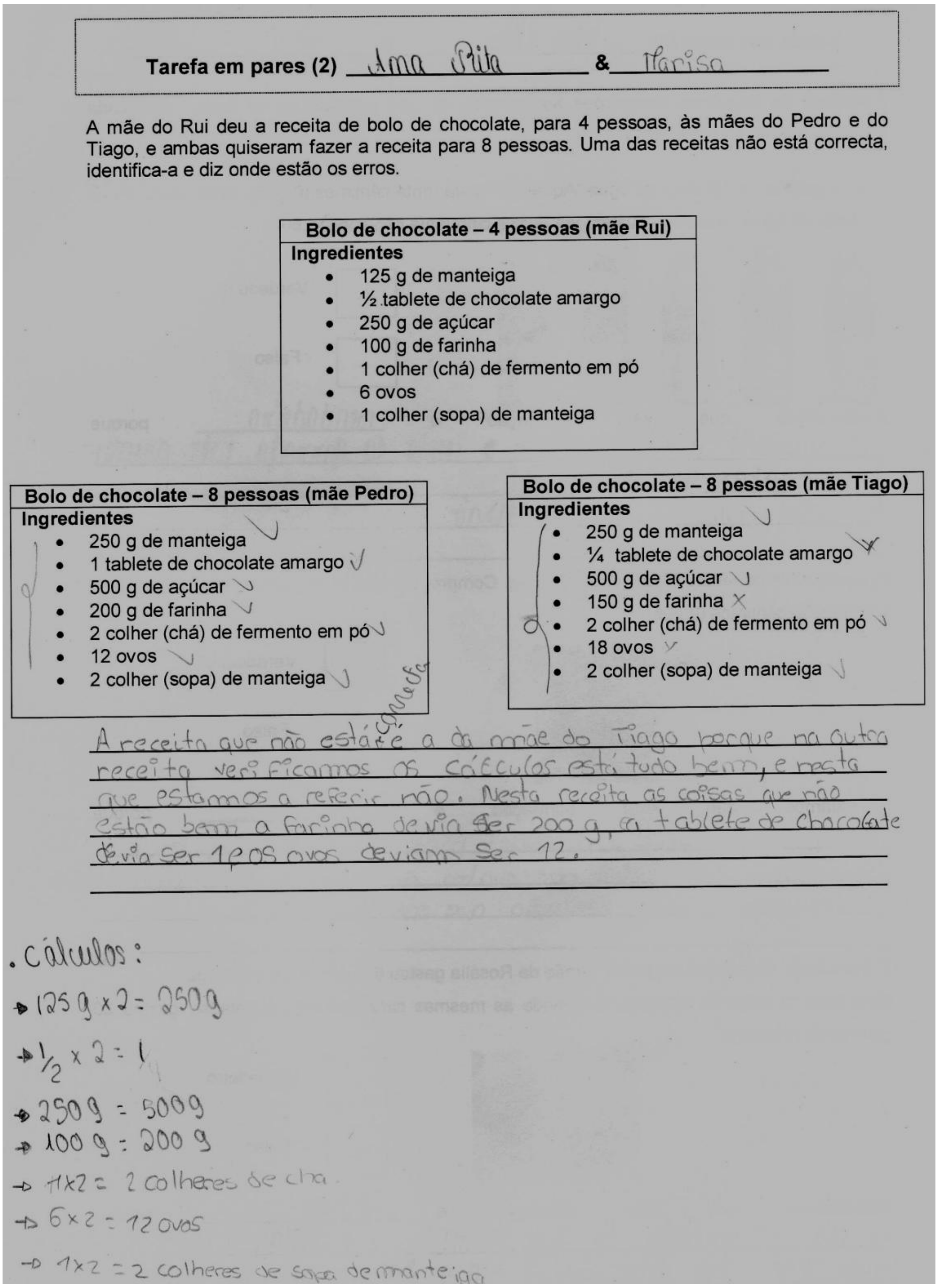

Gr.1-Porque o problema A, H, D têm em comum a forma como é resolvido. Só usei multiplicações
Grup. 2 - têm em comum também em forma como são resolvido Usei só somas.


No grupo 1 envolve cálculos em todos os Problemas.
No grupo 2 envolve raciocinio e lógica.

uso de palavras escritas e na linguagem simbólica, uso de símbolos (Pirie, 1998).

As dificuldades das alunas verificaram-se, inicialmente, na compreensão do objetivo da tarefa, lacuna que foi ultrapassada com bastante diálogo entre elas e várias leituras do enunciado. Posteriormente, as dificuldades centraram-se na escolha das estratégias de resolução dos diferentes problemas e consequente separação dos mesmos. Foram várias as discussões, entre as alunas, sobre qual a estratégia de resolução a aplicar a cada problema. E como não aplicaram as estratégias de resolução corretas, também sentiram muitas dificuldades em selecionar o critério de diferenciação entre os grupos. Se as alunas tivessem conseguido identificar corretamente as operações que envolviam cada problema talvez não sentissem tantas dificuldades em agrupar e justificar a sua escolha.

Tarefa 2



Tarefa em pares (2) Ana Rita & Marisa

A mãe do Rui deu a receita de bolo de chocolate, para 4 pessoas, às mães do Pedro e do Tiago, e ambas quiseram fazer a receita para 8 pessoas. Uma das receitas não está correcta, identifica-a e diz onde estão os erros.

Bolo de chocolate – 4 pessoas (mãe Rui)

Ingredientes

- 125 g de manteiga
- ½ tablete de chocolate amargo
- 250 g de açúcar
- 100 g de farinha
- 1 colher (chá) de fermento em pó
- 6 ovos
- 1 colher (sopa) de manteiga

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Pedro)

Ingredientes

- 250 g de manteiga
- 1 tablete de chocolate amargo
- 500 g de açúcar
- 200 g de farinha
- 2 colher (chá) de fermento em pó
- 12 ovos
- 2 colher (sopa) de manteiga

correcta

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Tiago)

Ingredientes

- 250 g de manteiga
- ¼ tablete de chocolate amargo
- 500 g de açúcar
- 150 g de farinha
- 2 colher (chá) de fermento em pó
- 18 ovos
- 2 colher (sopa) de manteiga

A receita que não está é a da mãe do Tiago porque na outra receita verificamos os cálculos está tudo bem, e nesta que estamos a referir não. Nesta receita as coisas que não estão bem a farinha devia ser 200 g, a tablete de chocolate devia ser 1 e os ovos deviam ser 12.

. Cálculos:

→ 125 g x 2 = 250 g

→ $\frac{1}{2}$ x 2 = 1

→ 250 g = 500 g

→ 100 g = 200 g

→ 1x2 = 2 colheres de cha

→ 6x2 = 12 ovos

→ 1x2 = 2 colheres de sopa de manteiga

As alunas resolveram a tarefa sem qualquer dificuldade. Começaram por comparar a receita da mãe do Rui com a da mãe do Pedro e depois com a da mãe do Tiago e facilmente verificaram que a que estava errada era a da mãe do Tiago porque em alguns ingredientes não estava o dobro das quantidades.

A leitura do enunciado foi atenta e cuidada.

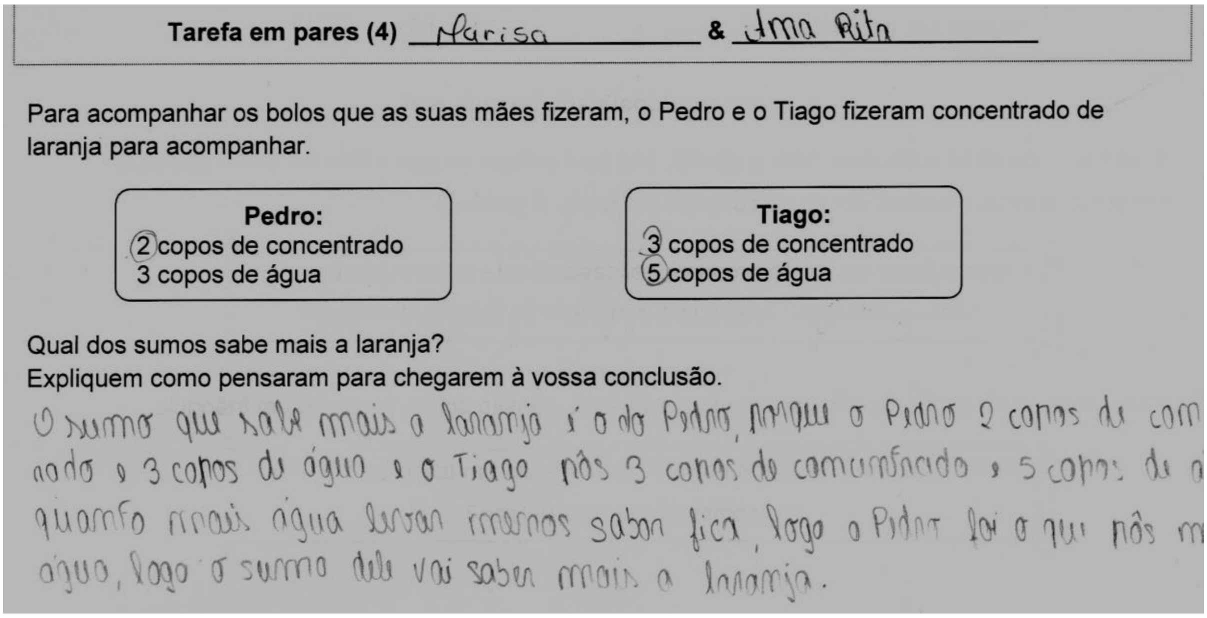
A estratégia de resolução foi bem selecionada e implementada, optaram pelo fator de proporcionalidade – raciocínio multiplicativo. A escolha da estratégia terá a ver com o facto de se tratar do dobro da receita e os alunos estarem habituados a este tipo de problemas. Assim, o desempenho foi considerado bom.

Por sua vez, a resposta das alunas encontra-se no nível relacional pois é caracterizada pela síntese de informações, processos e resultados intermediários, ou seja, utilizaram uma estratégia formal e apresentam todos os passos da sua resolução.

A comunicação escrita das alunas, segundo Pirie (1998) carateriza-se por linguagem verbal matemática, uso de palavras escritas e por linguagem simbólica, uso de símbolos.

Não foram sentidas dificuldades nesta tarefa, talvez por estarem envolvidas multiplicações por números inteiros, mais especificamente o dobro, que é bastante trabalhado desde o primeiro ciclo.

Tarefa 4



Tarefa em pares (4) Marisa & Ana Rita

Para acompanhar os bolos que as suas mães fizeram, o Pedro e o Tiago fizeram concentrado de laranja para acompanhar.

Pedro:
2 copos de concentrado
3 copos de água

Tiago:
3 copos de concentrado
5 copos de água

Qual dos sumos sabe mais a laranja?
Expliquem como pensaram para chegarem à vossa conclusão.

O sumo que sabe mais a laranja é o do Pedro, porque o Pedro 2 copos de com
nado e 3 copos de água e o Tiago pôs 3 copos de concentrado e 5 copos de á
quanto mais água levar menos sabor fica, logo o Pedro foi o que pôs m
água, logo o sumo dele vai saber mais a laranja.

Esta tarefa era bastante semelhante à tarefa dois, contudo as alunas não a compreenderam como tal. Não recorreram a cálculos escritos para a resolverem e revelaram bastantes lacunas na sua justificação.

As alunas basearam-se nas quantidades de concentrado e água que cada sumo leva e na diferença entre elas para responderem ao problema. Contudo, quando confrontadas com a questão “mas como podem ter a certeza que é o sumo do Pedro que sabe mais a laranja?”, as alunas revelaram bastantes dificuldades para justificarem a sua escolha.

Para melhor compreender a resposta deste par, foi realizada uma entrevista alguns dias após a resolução da tarefa.

Professora: Dizem que o sumo do Tiago leva mais água por isso sabe menos a laranja. Mas se repararem também leva mais concentrado. Então como podem ter a certeza que sabe menos a laranja?

AR_M: Porque leva muita água, leva 5 copos de água e 3 de concentrado…

Professora: Mas no do Pedro leva 3 copos de água e 2 de concentrado, como podem ter a certeza que este sabe mais a laranja?

AR_M: Só provando mesmo!

Professora: Mas sem provar, não haverá uma forma de terem a certeza, usando cálculos ou desenhos?

(as alunas voltaram a ler e a chegar à mesma conclusão, então resolvi intervir)

Professora: E se compararem os copos de concentrado e de água de cada um deles o que verificam?

AR_M: O do Tiago leva mais um copo de concentrado do que o do Pedro mas também leva mais dois copos de água que o do Pedro.

Professora: E então qual sabe mais a laranja?

AR_M: Achamos que é o do Pedro que sabe mais a laranja porque equilibrou mais as quantidades.

Professora: Então para terem a certeza que cálculos podem fazer? (as alunas não sabiam como fazer) Vou ajudar! Se cada um dos sumos levasse apenas um copo de concentrado, quanto levariam de água?

AR_M: Se calhar dois, diz AR! … um e meio - responde a outra aluna prontamente. O do Tiago … (as alunas realizaram um cálculo 3:5) levava um vírgula seis.

Professora: Então qual deles sabe mais a laranja?

AR_M: Sabe mais a sumo o do Pedro, porque leva menos água. Era o que nós pensávamos!

Após a entrevista comprovou-se que as alunas não sabiam como justificar a sua resposta, apesar de acharem que era o sumo do Pedro que sabia mais a laranja.

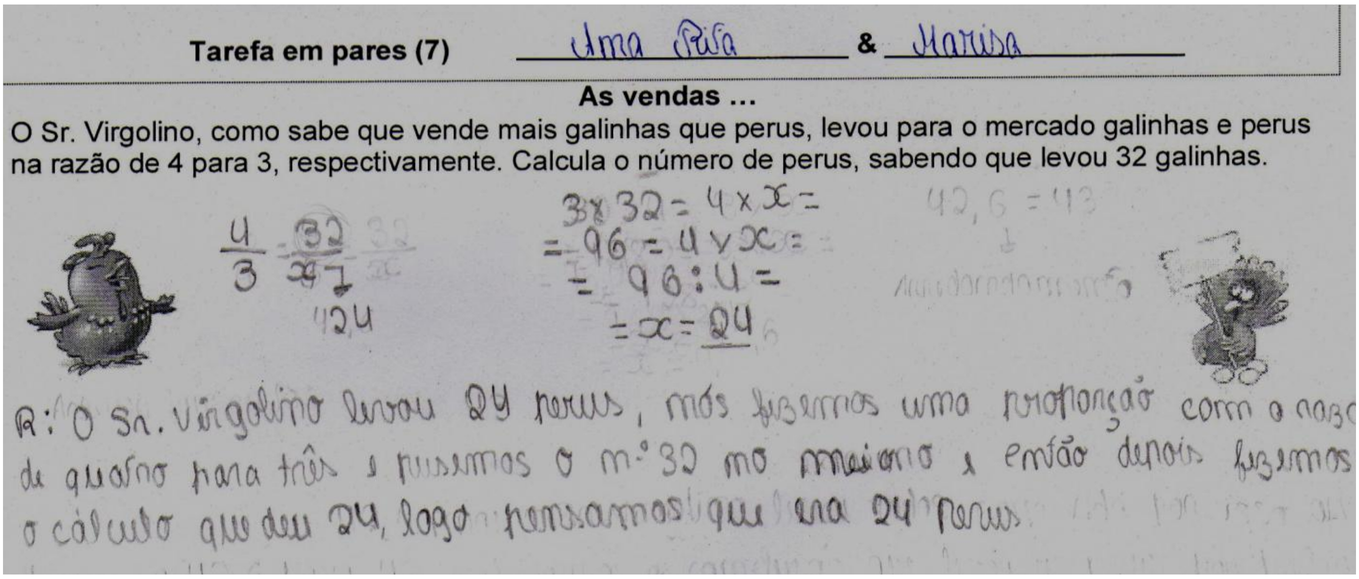
Relativamente ao desempenho, as alunas mostram que leram e interpretaram corretamente o enunciado do problema, porém selecionaram e implementaram incorretamente a estratégia de resolução, optaram pela estratégia aditiva em vez da multiplicativa. Por um lado, quando a tarefa foi implementada a turma já tinha iniciado o estudo do tópico da proporcionalidade e já tinha aprendido a noção de razão. Assim, esperava-se que fossem capazes de comparar as duas razões e conseguir responder à questão justificadamente. Por outro lado, já tinham resolvido a tarefa dois, semelhante a esta e resolveram-na acertadamente utilizando o pensamento multiplicativo. O embaraço revelado pelas alunas vai ao encontro das investigações que referem que os alunos têm muitas dificuldades em compreender este tema (e.g. Ben-Chaim e colegas, 2008). Também demonstra que quando se trata de números não inteiros os alunos revelam mais dificuldades do que quando as operações envolvem números inteiros. Assim, o desempenho das alunas foi considerado bom na leitura e interpretação do problema e médio na seleção e implementação da estratégia.

A resposta das alunas encontra-se no nível uniestrutural e dentro deste, no no subnível aditivo, pois ignoraram sistematicamente a estrutura multiplicativa, utilizando os padrões aditivos (Pittalis e colegas, 2003).

A comunicação escrita utilizada pelas alunas centra-se na linguagem comum do dia a dia. (Pirie, 1998)

As dificuldades das alunas verificaram-se essencialmente na argumentação utilizada na resposta, pois não conseguiram arranjar uma justificação plausível que as fizesse ter a certeza de que a sua resposta estava certa. Relativamente à estratégia utilizada, apesar de estar errada, as alunas achavam-na correta, por isso penso que não sentiram dificuldades neste aspeto.

Tarefa 7


Tarefa em pares (7) Ana Rita & Marisa

As vendas ...

O Sr. Virgolino, como sabe que vende mais galinhas que perus, levou para o mercado galinhas e perus na razão de 4 para 3, respectivamente. Calcula o número de perus, sabendo que levou 32 galinhas.

$\frac{4}{3} = \frac{32}{x}$

$3 \times 32 = 4 \times x =$
$= 96 = 4 \times x =$
$= 96 : 4 =$
$= x = 24$

R: O Sr. Virgolino levou 24 perus, nós fizemos uma proporção com a razão de quatro para três e pusemos o n.º 32 no meio e então depois fizemos o cálculo que deu 24, logo pensamos que era 24 perus.

Nesta resolução, por baixo da proporção $\frac{4}{3}=\frac{32}{x}$, é possível observar que as alunas, inicialmente, tinham realizado outros cálculos, formaram a proporção $\frac{3}{4}=\frac{32}{x}$, e que o resultado era 42,6 (número decimal). Mas como o problema é referente ao número de perus e galinhas, as alunas aperceberam-se que o resultado tinha de ser um número inteiro e arredondaram para 43. Este erro foi originado pela não organização dos dados na construção da proporção e uma leitura pouco atenta do enunciado.

Apesar de apresentarem os cálculos, as alunas fizeram um esforço em passar para palavras a estratégia que utilizaram. Contudo, a explicação está incompleta. Apenas referem que o 32 é um meio, mas não explicam porquê. Essa explicação foi obtida durante a entrevista:

> Professora: Por que é que dizem que o 32 é um meio?
>
> AR_M: Porque o problema diz que levou galinhas e perus na razão de 4 para 3, ou seja, 4 refere-se às galinhas porque aparece primeiro e, como o 32 também é galinhas tinha de ficar em cima e ser um meio.

Como referi anteriormente, também foi através da entrevista que as alunas justificaram a escolha da estratégia utilizada:

> Professora: Que estratégia usaram para resolver este problema?
> AR_M: As proporções.
> Professora: E como sabem que esta estratégia é a correta ou a mais apropriada?
> AR_M: Como fala na razão de 4:3 entre o número de galinhas e perus é mais fácil usar a estratégia das proporções, assim temos a certeza que está correta.

O desempenho das alunas foi considerado médio na leitura e interpretação do problema, uma vez que, apesar da primeira leitura menos atenta do enunciado, a segunda leitura foi atenta e cuidada e bom na seleção e implementação da estratégia.

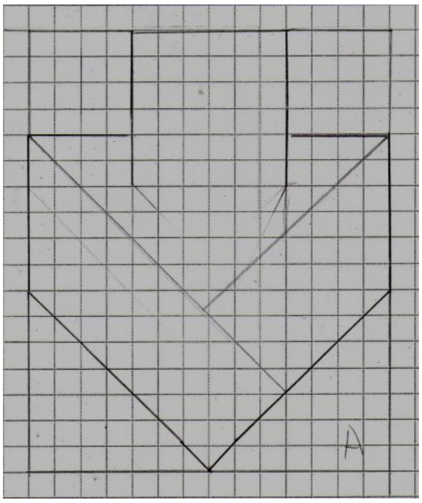
A resposta das alunas encontra-se no nível relacional, uma vez que incorpora a aplicação da estratégia utilizada e justifica a escolha da mesma (Pittalis e colegas, 2003).

A comunicação utilizada pelas alunas pode ser caraterizada por linguagem simbólica e linguagem verbal matemática. A primeira caracteriza-se pelo uso de símbolos matemáticos e a segunda pelo uso de palavras escritas (Pirie, 1998).

Nesta tarefa não foram reveladas grandes dificuldades. Apenas houve uma pequena confusão na construção da proporção que foi ultrapassada com a leitura mais atenta do enunciado. Um aspeto importante a salientar é o facto das alunas terem verificado que o resultado não devia ser um valor não inteiro o que as levou a reler o problema e perceber que a proporção tem de ser construída seguindo algumas condições.

Tarefa 11

Esta tarefa foi a que acarretou mais dificuldades às alunas. O primeiro entrave surgiu na leitura do enunciado que não foi atenta e cuidada. Era dito que a medida com quatro quadrículas passava para seis e as alunas aplicaram esta condição a todas as medidas do trangram. A segunda lacuna revelou-se na escolha da estratégia. As alunas optaram pela tentativa/erro através do desenho, sem antes tentarem perceber o que era pedido em concreto.



Inicialmente, as alunas acharam a tarefa muito simples, mas esta acabou por se revelar muito complicada e nem a conseguiram terminar. Após várias tentativas não conseguiam acertar com as medidas do tangram, ficava sempre mal desenhado pois a parte interna não batia certo, isto porque aumentaram sempre duas quadrículas em todas as partes do desenho.

Através da entrevista tentei perceber as dificuldades das alunas:

> Professora: Por que é que não terminaram a tarefa?
>
> AR_M: Porque não bate certo, não é possível construir. Nós aumentamos 2 quadrados como diz no enunciado, mas não dá.
>
> Professora: Mas diz para aumentar 2 quadrados na medida 4, na outra medida têm de ser vocês a descobrir.
>
> AR_M: Já desenhámos de várias formas mas não conseguimos.

Como as alunas não estavam a conseguir construir o tangram desistiram de arranjar outra estratégia. Mais uma vez, uma tarefa que não revela explicitamente o uso de cálculos mostrou-se complexa para as alunas, o que demonstra, que os alunos nas aulas de matemática não estão habituados a resolver tarefas que não envolvam cálculos (De Bock e colegas, 2005).

Assim, a leitura do enunciado foi muito superficial e pouco cuidada o que desencadeou todas as dificuldades sentidas, levou à não conclusão da tarefa e ao fraco desempenho das alunas.

A comunicação escrita das alunas caracteriza-se por linguagem visual, uma vez que recorreram ao desenho para tentar resolver a tarefa (Pirie, 1998).

As dificuldades das alunas centraram-se na compreensão do enunciado do problema e na pouca familiaridade com problemas deste género. Durante a resolução da tarefa apercebi-me que as alunas não a enquadraram nos conteúdos matemáticos que estavam a estudar, o que revela que durante as aulas de matemática o tipo de tarefas não é muito diversificado (De Bock e colegas, 2005).

Par B (Emanuel e Leonardo)

Tarefa 1

O Emanuel e o Leonardo não efetuaram qualquer cálculo para realizarem a tarefa, tanto na primeira implementação como na segunda. As respostas dos alunos foram as seguintes:

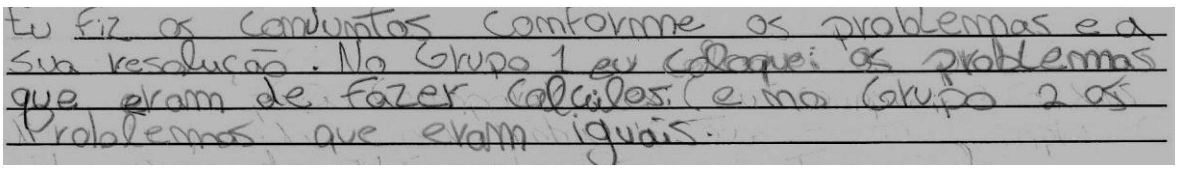
	Antes da lecionação do tema		Após a lecionação do tema	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
Par B	A, C, D, E, H	B, F, G	A, C, D, H	B, E, F, G

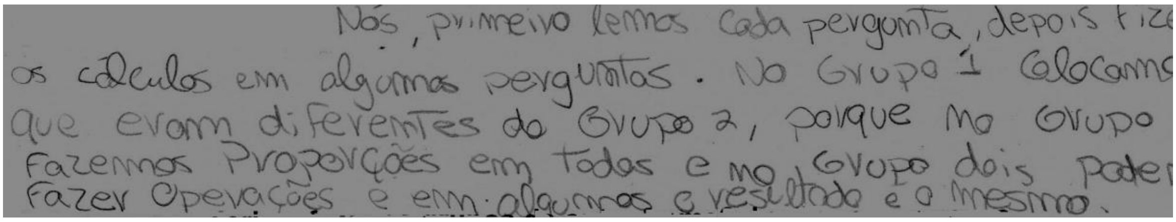
As justificações utilizadas pelos alunos antes da lecionação da proporcionalidade direta foram: “fizemos os conjuntos conforme os problemas e a sua resolução. No grupo 1 colocamos os problemas que eram de fazer cálculos e no grupo 2 os problemas que eram iguais”, ou seja aqueles que não envolviam cálculos e as respostas estavam no enunciado. Após o término do estudo do tópico em questão justificaram-se com: “no grupo 1 colocamos os problemas que se resolvem através de proporções e no grupo 2 podemos usar outras operações e em alguns o resultado é o mesmo”. As justificações utilizadas por este par são, na minha perspetiva, mais fundamentadas e com maior qualidade do ponto de vista matemático do que as apresentadas pelo par A. Logo no primeiro contato com a tarefa, os alunos distinguiram os problemas que envolvem cálculos dos que não envolvem. Estes últimos designados pelos alunos de “iguais”. Mais tarde, na entrevista, percebi que a palavra “iguais” se referia à resposta do problema, que é dada no próprio enunciado, e não ao tipo de problema. Na segunda confrontação dos alunos com esta tarefa, e já após terem estudado o tema da proporcionalidade, a justificação utilizada pelos alunos foi ao encontro do que era pretendido. No primeiro grupo os alunos colocaram os problemas que podiam ser resolvidos usando proporções (apenas erraram numa das opções) e no segundo grupo, problemas que tinham outras estratégias de resolução, envolvendo ou não cálculos. É de salientar que este par não efetuou qualquer cálculo para responder à tarefa, as suas conclusões foram todas retiradas apenas pela leitura dos enunciados dos problemas, o que revela uma grande concentração na leitura dos mesmo e vai ao encontro do que defende Costa (2007), de que os alunos que leem mais que uma vez os enunciados dos problemas fazem uma interpretação mais adequada e apresentam melhor desempenho na resolução de problemas.

Com a resolução que os alunos apresentaram, pode concluir-se que leram e interpretaram corretamente o enunciado.

Quanto à escolha e implementação da estratégia de resolução, os alunos optaram pela leitura atenta do enunciado, o que exigiu uma maior concentração do que a estratégia utilizada pelo par A, uma vez que não fizeram qualquer registo escrito ao lado de cada problema. Embora não tenham acertado completamente na resposta à tarefa, foram os que mais se aproximaram do objetivo da mesma. O desempenho dos alunos foi considerado médio mas próximo do bom. A resposta à tarefa encontra-se no nível multiestrutural, pois foram utilizados corretamente processos de resolução, contudo com algumas falhas. Isto pode indicar o desempenho cognitivo inferior ao requerido para a solução correta do problema (Pittalis e colegas, 2003).

No que concerne à comunicação dos alunos, como utilizaram apenas palavras escritas centra-se na linguagem verbal da matemática (Pirie, 1998).

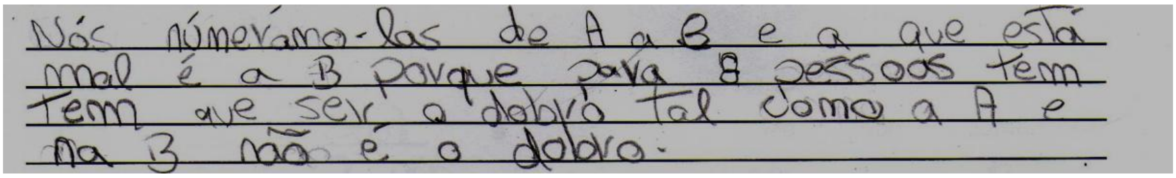

Eu fiz os conjuntos conforme os problemas e a sua resolução. No Grupo 1 eu coloquei os problemas que eram de fazer calculos e no Grupo 2 os Problemas que eram iguais.


Nós, primeiro lemos cada pergunta, depois fize
os cálculos em algumas perguntas. No Grupo 1 colocamo
que eram diferentes do Grupo 2, porque no Grupo
fazemos proporções em todos e no Grupo dois pode
fazer operações e em algumas o resultado é o mesmo.

As dificuldades sentidas por estes alunos, no primeiro momento de resolução da tarefa, foram na perceção do objetivo da mesma, tal como os restantes alunos, e ainda, na separação dos problemas pelos grupos. Durante o registo das notas de campo, na primeira realização da tarefa, assisti a algumas indecisões dos alunos, nomeadamente onde enquadrar os problemas B e G (constantes). Só depois de uma leitura mais atenta é que perceberam que os problemas continham "ratoeiras" como eles diziam.

Tarefa 2

Nesta tarefa, os alunos consideraram como A, a receita da mãe do Pedro e B, a da mãe do Tiago. Realizaram todos os cálculos mentalmente e com facilidade descobriram que na primeira receita (mãe do Pedro) todos os ingredientes tinham duplicado e na segunda não.


Nós númeramo-las de A a B e a que está
mal é a B porque para 8 pessoas tem
tem que ser o dobro tal como a A e
na B não é o dobro.

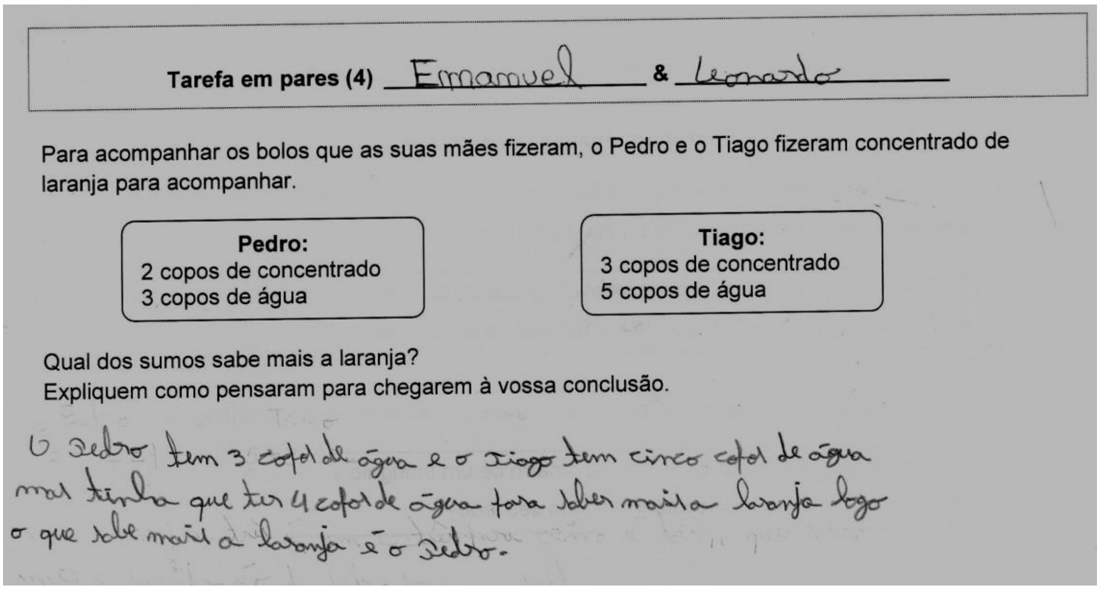
Os alunos não revelaram qualquer dificuldade em aplicar o raciocínio multiplicativo com números inteiros, facto que não se verificou quando se trata de números não inteiros (tarefa 4) que é analisada seguidamente.

A leitura do enunciado foi atenta e cuidada, o que levou os alunos a escolher adequadamente a estratégia a implementar e consequentemente a obterem bom desempenho na resolução da tarefa. A confiança que os alunos demonstraram na resolução desta atividade revela que têm familiaridade com este tipo tarefas e percebem os conceitos de dobro e metade. A resposta dos alunos encontra-se no nível relacional pois engloba a estratégia utilizada (Pittalis e colegas, 2003).

A comunicação escrita dos alunos enquadra-se na linguagem verbal matemática, uso de palavras escritas (Pirie, 1998).

Os alunos não revelaram dificuldades nesta tarefa, realizaram-na com destreza e empenho.

Tarefa 4



Tarefa em pares (4) Emanuel & Leonardo

Para acompanhar os bolos que as suas mães fizeram, o Pedro e o Tiago fizeram concentrado de laranja para acompanhar.

Pedro:	**Tiago:**
2 copos de concentrado	3 copos de concentrado
3 copos de água	5 copos de água

Qual dos sumos sabe mais a laranja?
Expliquem como pensaram para chegarem à vossa conclusão.

O Pedro tem 3 copos de água e o Tiago tem cinco copos de água mas tinha que ter 4 copos de água para saber mais a laranja logo o que sabe mais a laranja é o Pedro.

Os alunos efetuaram uma leitura atenta do enunciado do problema e perceberam o que era pretendido.

Tal como o par anterior, estes alunos responderam através de palavras. Porém, a justificação utilizada é relativamente diferente, não relaciona as duas quantidades, concentrado e água, mas compara a quantidade de água nos dois preparados de sumo.

Relativamente à escolha e implementação da estratégia, os alunos cometeram o mesmo erro do par A, usaram o raciocínio aditivo em vez do multiplicativo. Para que os alunos justificassem a sua escolha e para perceber as suas lacunas, foi realizada uma entrevista:

Professora: Dizem que o sumo do Tiago tinha de ter quatro copos de água em vez de cinco. Porquê?

E_L: Porque o que tem mais água vai saber menos a laranja. No sumo do Pedro, três copos de água menos dois copos de concentrado dá um copo de diferença e no do Tiago cinco copos de água menos três copos de concentrado dá dois copos de diferença, se tivesse quatro copos de água dava como o do Pedro e sabiam igualmente a laranja. Como tem mais água se calhar vai saber menos a laranja.

Professora: Dizem se calhar, mas como podem ter a certeza? Se quiserem podem fazer cálculos ou então de outra forma qualquer, mas quero ter a certeza.

E_L: Três menos dois é um e cinco menos três é dois.

Professora: Sim, e o que é que isso significa?

E_L: Como a diferença entre o concentrado e a água no do Pedro é um sabe mais a laranja, no outro é dois e sabe menos a laranja.

Professora: Mas o do Pedro tem dois copos de concentrado e o do Tiago tem três.

E_L: Mas o do Tiago tem cinco copos de água e o do Tiago só tem três copos de água.

Professora: Mas como podemos ter a certeza de qual sabe mais a laranja?

E_L: O que tiver maior diferença entre a quantidade de concentrado e de água é o que sabe menos a laranja.

Professora: Então vamos pensar no seguinte: e se cada um só levasse um copo de concentrado, que quantidade de água levava?

E_L: No do Pedro levava dois copos de água.

Professora: Porquê?

E_L: Porque três menos um é dois.

Professora: De dois copos de concentrado para um copo o que é que acontece?

E_L: Tira-se um copo de concentrado.

Professora: E um relativamente a dois é o quê?

E_L: Metade.

Professora: Então os três copos de água têm de passar para quanto?

E_L: Um e meio.

Professora: Então no sumo do Pedro se levasse um copo de concentrado levava um copo e meio de água. E no sumo do Tiago, se de três copos de concentrado passasse para um, o que acontecia à quantidade de água?

E_L: Divide-se por três.

Professora: E então?

E_L: Dá 1,6.

Professora: E qual sabe mais a laranja?

E_L: O do Pedro porque por cada copo de concentrado leva 1,5 copos de água e o do Tiago leva 1,6 que é mais água.

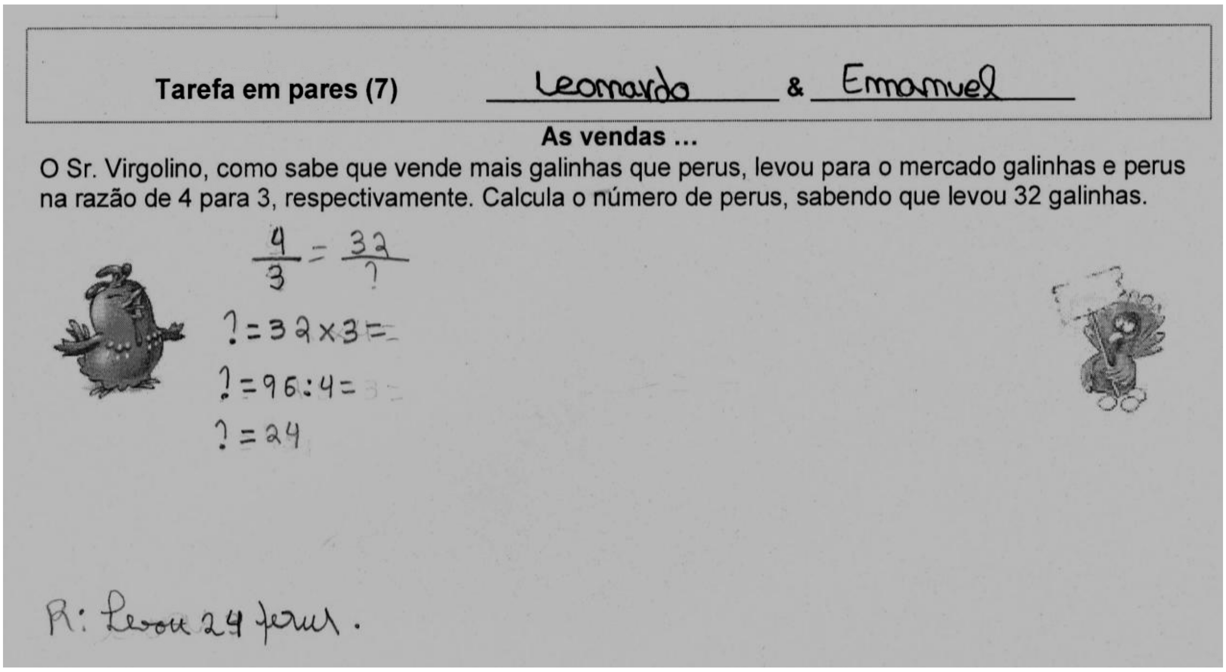
A entrevista comprovou que os alunos têm mais dificuldades em aplicar o raciocínio multiplicativo quando se trata de números não inteiros. Ao longo de quase toda a entrevista os alunos insistiram no pensamento aditivo. Só depois de lhes ser pedido para pensarem o que acontecia se houvesse apenas um copo de concentrado é que conseguiram perceber o problema.

No que concerne ao desempenho apresentado por este par, os alunos leram e interpretaram cuidadosamente o enunciado do problema. Contudo, também recorreram ao pensamento aditivo e só com ajuda, durante a entrevista, é que conseguiram perceber por que é que era o sumo do Pedro que sabia mais a laranja. Portanto, selecionaram e implementaram a estratégia incorreta. A resposta dos alunos encontra-se no nível uniestrutural, pois ignoraram sistematicamente a estrutura multiplicativa e focam-se em padrões aditivos (Pittalis e colegas, 2003). No geral pode considerar-se que o desempenho foi bom na leitura e interpretação do problema e médio na seleção e implementação da estratégia.

Uma vez mais, a comunicação escrita utilizada pelos alunos é a linguagem comum, do dia a dia (Pirie, 1998).

As dificuldades dos alunos centraram-se em arranjar uma justificação plausível para a sua resposta, apesar de referirem que o sumo do Tiago tinha de ter quatro copos de água para saber mais a laranja não se justificam. Esta dificuldade pode dever-se à pouca prática em dar respostas escritas nos problemas matemáticos. Outra possível causa pode ser o facto de operar com números não inteiros, foi mais fácil aplicar o pensamento aditivo (aumentar 2 unidades) do que o multiplicativo (multiplicar por 1,5). Na tarefa dois os alunos detetaram com facilidade o dobro e consequentemente argumentaram com esse facto. Nesta tarefa os valores escolhidos levaram a que fosse mais fácil "visualizar" um aumento aditivo do que multiplicativo. Assim, no que se refere à escolha da estratégia penso que os alunos não sentiram dificuldades na escolha, apenas raciocinaram de forma errada. Portanto, não se pode considerar que sentiram dificuldades, apenas comprova que os alunos, nestas idades, só reconhecem o pensamento multiplicativo em situações mais simples como dobro e não o reconhecem em situações de números não inteiros.

Tarefa 7



Tarefa em pares (7) Leonardo & Emanuel

As vendas ...

O Sr. Virgolino, como sabe que vende mais galinhas que perus, levou para o mercado galinhas e perus na razão de 4 para 3, respectivamente. Calcula o número de perus, sabendo que levou 32 galinhas.

$\frac{4}{3} = \frac{32}{?}$

$? = 32 \times 3 =$

$? = 96 : 4 =$

$? = 24$

R: Levou 24 perus.

A leitura do enunciado foi, num primeiro momento, superficial e pouco cuidada. Após efetuarem os primeiros cálculos e verificarem o valor obtido, fizeram uma leitura mais atenta e cuidada do enunciado.

Apesar de não ser percetível aqui na digitalização, no original é possível verificar que estes alunos, inicialmente, cometeram o mesmo erro do par anterior e tinham chegado ao número 43 (aproximado) como resposta. Contudo, também acharam estranho (foi possível detetar enquanto tirava as notas de campo: os alunos diziam que o problema não podia estar bem porque não se podia dividir perus a meio) obter um número decimal como resposta e, após lerem novamente o enunciado, trocaram a posição dos números 3 e 4 na proporção e chegaram à resposta correta. Inicialmente o 3 era um extremo em vez de meio, o 32 foi sempre considerado meio. Na minha opinião, este erro, tem a ver com a não organização dos dados e com a pouca concentração na leitura do enunciado. O facto de os alunos terem alterado os cálculos, tanto este par como no A, mostra que os alunos têm em atenção a razoabilidade dos resultados, o que é extremamente importante para evitar erros.

Outro aspeto a salientar é o facto de os alunos não terem escrito corretamente a identidade fundamental das proporções, pois na primeira expressão não dividem por 4 e na segunda já o fazem. Isto revela que os alunos não têm a preocupação que cada uma destas expressões valha o mesmo – e por isso se usa o sinal “=” – ora 32 x 3 que vale 96 não pode valer o mesmo de 24. Isto mostra a importância dos professores estarem atentos a este modo de escrever, para habituar os alunos a usar os símbolos matemáticos corretamente ou ajudá-los a ultrapassar estas dificuldades.

Na entrevista que tive com o Emanuel e o Leonardo questionei os alunos o motivo de resolveram o problema desta forma e também me responderam que a palavra “razão” escrita no enunciado os influenciou na escolha da estratégia, o que demonstra que estiveram atentos na leitura do mesmo, evitando, mais uma vez, que cometessem erros por distração.

Professora: Como é que calcularam o número de perus?

E_L: Usamos uma proporção.

Professora: Por que é que usaram a proporção e não outra estratégia?

E_L: Também dava a regra de 3 simples.

Professora. E porque optaram pela proporção?

E_L: Porque no problema fala na razão de 4 para 3, então usamos uma proporção.

O desempenho dos alunos foi considerado médio na leitura e interpretação do problema e bom na seleção e implementação da estratégia.

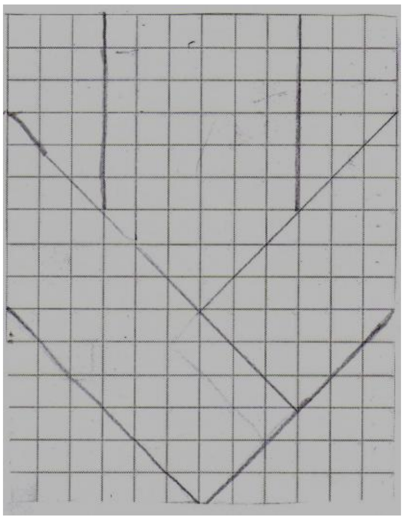
Segundo Pittalis e colegas (2003), como a estratégia implementada está correta e é uma estratégia formal, a resposta dos alunos encontra-se no nível relacional.

Tal como no par anterior, a comunicação escrita dos alunos é caracterizada como simbólica e verbal matemática, pelos mesmos motivos (Pirie, 1998).

No que concerne às dificuldades demonstradas pelos alunos, estas também foram originadas por uma leitura do enunciado muito superficial e pouco atenta.

Tarefa 11

Esta tarefa foi igualmente a menos fácil para estes alunos. Começaram por fazer uma leitura superficial e pouco atenta do enunciado, o que os levou a aumentar duas unidades em todas as medidas do desenho. Após várias tentativas erradas, os alunos conversaram com o par C e a Diana explicou-lhes como tinham de desenhar o tangram. Disse-lhes que só aumentavam duas unidades na medida quatro e uma unidade na medida dois e assim os alunos conseguiram desenhar a figura corretamente.



Como fizeram para realizar a tarefa? Indiquem todos os passos que efectuaram.

Quando tem 4 aumenta-se 2, porque 6-4=2.
Quando tem 2 aumenta-se 1, porque 2-1=1

Porém, através da entrevista foi possível constatar que os alunos só conseguiram resolver a tarefa por cauda da ajuda que tiveram, pois não conseguiram justificar por que é que aumentaram uma unidade na medida dois:

Professora: Por que é que aumentaram mais um quadradinho onde a medida era dois quadrados?
E_L: Porque dizia para aumentar.
Professora: E por que é que aumentaram um e não dois quadrados?
E_L: Porque ao construir o resto ficava torto.

Com esta resposta comprovou-se que os alunos não tinham percebido que o problema envolvia raciocínio proporcional e que não podia ser resolvido apenas por tentativas.

Professora: Mas então como chegaram à conclusão que tinham de aumentar um quadrado? Por que é que apresentaram estes cálculos? [como os alunos ficaram a olhar para a construção e para os cálculo e não sabiam responder, reformulei a questão] Quando temos quatro quadrados passa para seis, ou seja aumenta dois, certo?
E_L: Sim.
Professora: E dois que parte é de quatro?
E_L: É metade.
Professora: E então, onde temos dois quadrados passa para um porquê?
E_L: Porque é metade.

Para que os alunos conseguissem compreender a tarefa foi necessária alguma ajuda durante a entrevista.

Uma vez que os alunos só resolveram a tarefa com a ajuda da Diana, o seu desempenho é considerado fraco e a sua resposta encontra-se no nível pré-estrutural, pois os alunos demostraram um pensamento subjetivo e não relacionado com a estrutura dos dados do problema (Pittalis e colegas, 2003).

A caracterização da comunicação não deve ser considerada, pois foi uma aluna de outro par que lhes disse o que deviam escrever.

Assim, as dificuldades dos alunos verificaram-se na compreensão do enunciado e na escolha da estratégia adequada.

Par C (Diana e Joel)

Tarefa 1

Para resolverem esta tarefa, a Diana e o Joel, depois de lerem várias vezes o enunciado, optaram por resolver cada problema e só depois os agruparam. As suas respostas foram as seguintes:

	Antes da lecionação do tema		Após a lecionação do tema	
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 1	Grupo 2
Par C	A, C, F, G	B, D, E, H	A, C, D, F, G, H	B, E

Na primeira aplicação da tarefa, os seus argumentos foram: "no grupo 1 os problemas têm de ser resolvidos com multiplicações, subtrações e somas e no grupo 2 os problemas apresentados têm de ser resolvidos com divisões, somas e subtrações", argumentos que não coincidem com os cálculos realizados, pois em nenhum dos problemas usaram divisões. Esta contradição mostra a confusão que a tarefa provocou nos alunos, talvez por ser a primeira vez que se depararam com uma tarefa matemática onde a resposta envolvia justificações e não apenas cálculos. Já no segundo encontro que os alunos tiveram com a tarefa, as suas fundamentações foram: "problemas que dão para resolver com proporcionalidade e os que não dão". Quando se referem aos problemas que não dão para resolver com proporcionalidade, analisando os cálculos que efetuaram percebe-se que entenderam que o problema B era constante e o F era de não proporcionalidade. Contudo, relativamente aos problemas que se referem a proporcionalidade direta fizeram confusão porque misturaram problemas aditivos com constantes e com os que envolvem, realmente, a proporcionalidade. Penso que esta confusão foi gerada pelo facto de terem terminado de estudar o tema da proporcionalidade e pensarem que o objetivo da tarefa se centrava neste tópico, o que os levou a juntar os problemas que envolvem cálculos num grupo e os que não envolvem noutro grupo, mas não tiveram a capacidade de pensar corretamente sob o ponto de vista aditivo e multiplicativo.

Apesar do primeiro impacto ser de insegurança, incertezas e confusão mental, os alunos empenharam-se para tentar perceber a tarefa. Tiveram o cuidado de ler várias vezes o enunciado e de arranjar uma estratégia para o resolverem. Assim, a leitura do enunciado foi cuidada e atenta e o desempenho foi considerado médio. Porém, a leitura dos diferentes problemas não foi assim tão atenta, pois no problema B (constante) concluíram que não precisavam de fazer cálculos, mas no problema G (constante) que é do mesmo género usaram as proporções para o resolveram.

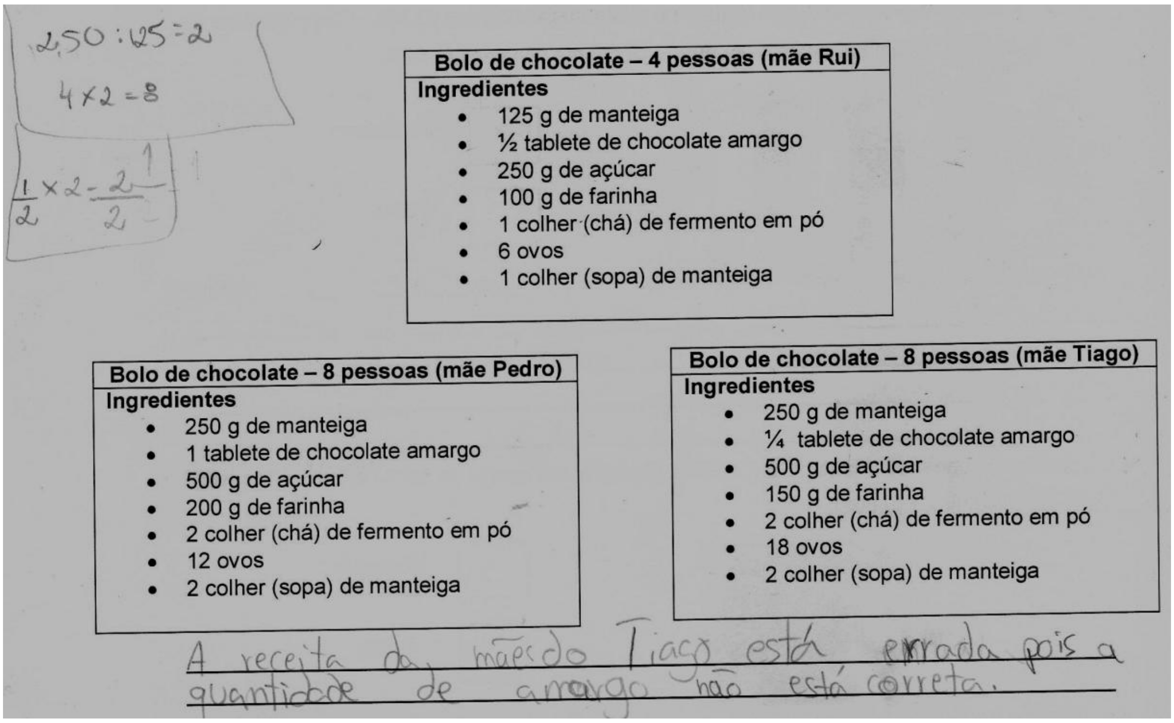
A estratégia escolhida, tal como o par A, foi a resolução dos diferentes problemas e posterior separação conforme as operações envolvidas. Como os alunos tiveram algumas falhas na escolha das operações dos diferentes problemas e a resposta à tarefa foi influenciada por esses erros, o desempenho dos alunos foi considerado fraco. A resposta encontra-se no nível uniestrutural (Pittalis e colegas, 2003).

A comunicação utilizada pelos alunos foi a linguagem verbal matemática e a linguagem simbólica, uso de palavras escritas e cálculos, respetivamente (Pirie, 1998).

As dificuldades destes alunos centraram-se essencialmente na leitura pouco cuidada e atenta dos problemas e na escolha das estratégias de resolução dos mesmos. Na primeira resolução da tarefa referiram que todos os problemas envolviam cálculos e só acertaram na estratégia do problema A. Na segunda resolução, em todos os problemas que referiram envolver cálculos, aplicaram a estratégia das proporções, talvez por terem terminado de estudar esse tópico nas aulas e pensarem que era esse o objetivo da tarefa. Já constatei em várias situações, na aprendizagem de novos conteúdos, que quando é apresentada alguma tarefa os alunos pensam sempre que é para aplicar esse conteúdo e não se abstraem dessa nova aprendizagem procurando resolver a tarefa com recurso a conhecimentos prévios. Pensam que se o professor está a lecionar um conteúdo, as tarefas propostas giram à sua volta.

Tarefa 2

Os alunos leram com cuidado e atenção o enunciado do problema. Para o resolverem, compararam as quantidades dos ingredientes nas duas receitas e efetuaram alguns cálculos para evidenciarem um dos erros e comprovarem que os ingredientes de uma receita têm de ser o dobro da outra.



$250 : 125 = 2$

$4 \times 2 = 8$

$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$

Bolo de chocolate – 4 pessoas (mãe Rui)
Ingredientes
• 125 g de manteiga
• ½ tablete de chocolate amargo
• 250 g de açúcar
• 100 g de farinha
• 1 colher (chá) de fermento em pó
• 6 ovos
• 1 colher (sopa) de manteiga

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Pedro)
Ingredientes
• 250 g de manteiga
• 1 tablete de chocolate amargo
• 500 g de açúcar
• 200 g de farinha
• 2 colher (chá) de fermento em pó
• 12 ovos
• 2 colher (sopa) de manteiga

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Tiago)
Ingredientes
• 250 g de manteiga
• ¼ tablete de chocolate amargo
• 500 g de açúcar
• 150 g de farinha
• 2 colher (chá) de fermento em pó
• 18 ovos
• 2 colher (sopa) de manteiga

A receita da mãe do Tiago está errada pois a quantidade de amargo não está correta.

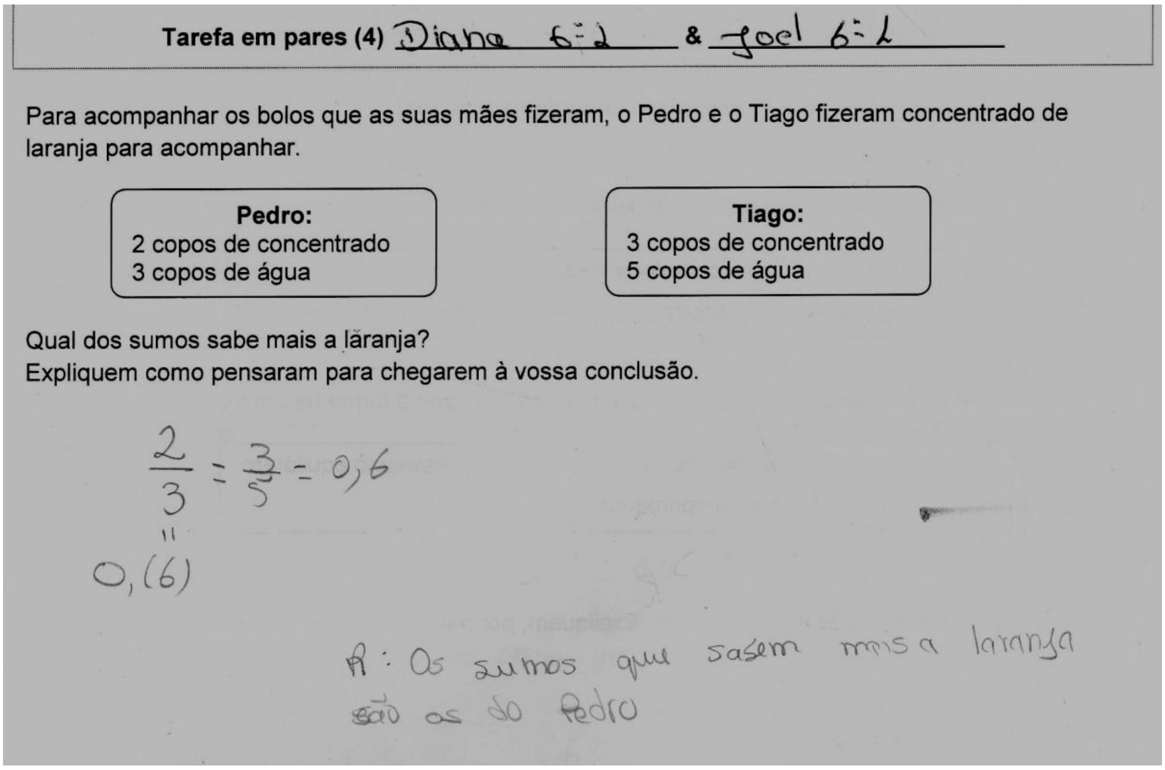
É possível verificar que os alunos não efetuaram todos os cálculos por escrito e quando o fizeram não usaram sempre o mesmo método. Primeiro compararam as receitas das mães do Rui e do Pedro e verificaram que a quantidade de manteiga estava correta. Dividiram as quantidades para averiguarem se dava dois, ou seja o dobro. Depois duplicaram o número de pessoas da receita da mãe do Rui e comprovaram que a da mãe do Pedro teria de ser para oito pessoas. Depois compararam as quantidades de chocolate amargo nas receitas das mães do Rui e do Tiago. Para tal duplicaram a quantidade de chocolate da receita da mãe do Rui e verificaram que a quantidade de chocolate na receita da mãe do Tiago tinha de ser um e não era. Com estes cálculos dá para constatar que os alunos compreenderam que as quantidades da receita da mãe do Rui tinham de ser duplicadas e tal só aconteceu na receita da mãe do Pedro.

Assim, a resposta dos alunos encontra-se no nível relacional, pois justificam-se com base na estratégia implementada (Pitallis e colegas, 2003) e o desempenho dos alunos foi considerado bom.

A comunicação utilizada pelos alunos é caracterizada por linguagem simbólica, uso de símbolos e linguagem verbal matemática, uso de palavras escritas (Pirie, 1998).

Os alunos não revelaram dificuldades na resolução da tarefa.

Tarefa 4


Tarefa em pares (4) Diana 6º2 & Joel 6º2

Para acompanhar os bolos que as suas mães fizeram, o Pedro e o Tiago fizeram concentrado de laranja para acompanhar.

Pedro:
2 copos de concentrado
3 copos de água

Tiago:
3 copos de concentrado
5 copos de água

Qual dos sumos sabe mais a laranja?
Expliquem como pensaram para chegarem à vossa conclusão.

$\frac{2}{3} = \frac{3}{5} = 0,6$

$\frac{2}{3} = 0,(6)$

R: Os sumos que sabem mais a laranja são os do Pedro

Os alunos fizeram uma leitura atenta e cuidada do enunciado do problema, pois compreenderam que tinham de comparar as quantidades de concentrado e de água em cada sumo e referir qual deles sabia mais a laranja.

Relativamente à escolha da estratégia de resolução, foram os únicos que recorreram a cálculos para averiguarem a relação entre as quantidades nas duas situações. Os alunos verificaram se a razão entre o número de copos de concentrado e o número de copos de água era igual nos dois casos. Após formarem as razões, recorreram à calculadora, efetuaram a divisão e verificaram que a razão entre concentrado e água era maior no sumo do Pedro, logo era este que sabia mais a laranja. A escolha da estratégia foi a aplicação do que aprenderam nas aulas de matemática. Apesar de terem sido apresentados cálculos, os alunos não os justificaram, portanto foi igualmente realizada uma entrevista para tentar compreender o seu pensamento e desenvolver a sua comunicação matemática.

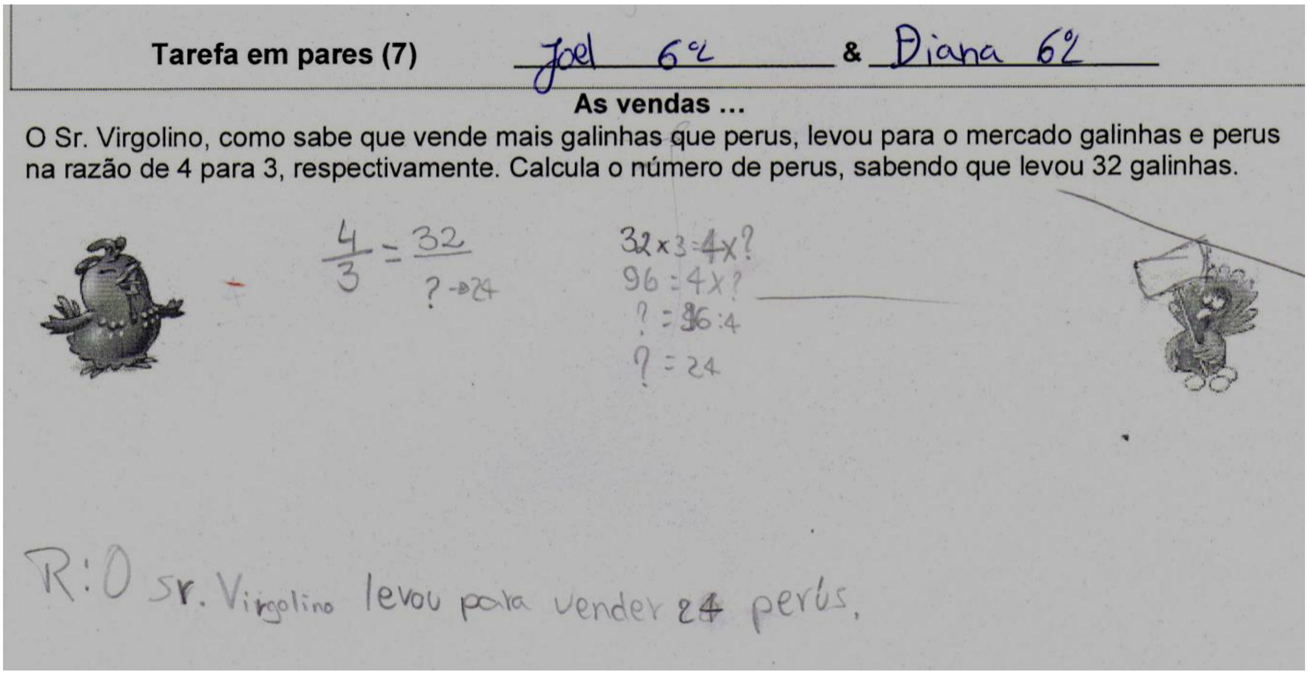
> Professora: Por que é que dizem que é o sumo do Pedro que sabe mais a laranja?
> D_J: Porque o do Tiago tem mais água.
> Professora: E por que é que fizeram estes cálculos?
> D_J: Para ver o que tinha maior resultado, o do Pedro é 0,(6) e o do Tiago é 0,6.
> Professora: E que conclusão é que tiram desses resultados?
> D_J: Que o do Pedro sabe mais a laranja porque a razão entre copos de concentrado e copos de água é maior.

Analisando o desempenho dos alunos, mesmo antes da entrevista verifica-se que entenderam o problema, tendo lido e interpretado corretamente o enunciado e selecionando e implementando a estratégia correta. Contudo, a entrevista serviu para perceber se os cálculos foram realizados com compreensão. Este par foi o único que compreendeu que comparando as razões entre o número de copos de concentrado e o número de copos de água conseguiam responder ao problema, logo a sua resposta encontra-se no nível relacional (Pittalis e colegas, 2003) e o desempenho foi considerado bom.

A comunicação escrita utilizada por estes alunos é caracterizada por Pirie (1998) como linguagem simbólica, uma vez que usaram símbolos matemáticos para se justificarem.

As dificuldades destes alunos são respeitantes à comunicação escrita, usaram apenas os cálculos como justificação sem recorrer a palavras, como era pretendido.

Tarefa 7



Tarefa em pares (7) Joel 6º & Diana 6º

As vendas …

O Sr. Virgolino, como sabe que vende mais galinhas que perus, levou para o mercado galinhas e perus na razão de 4 para 3, respectivamente. Calcula o número de perus, sabendo que levou 32 galinhas.

$\frac{4}{3} = \frac{32}{? \to 24}$

$32 \times 3 = 4 \times ?$

$96 = 4 \times ?$

$? = 96 : 4$

$? = 24$

R: O sr. Virgolino levou para vender 24 perus.

Este par foi o único que formou corretamente a proporção logo após a leitura do enunciado contudo, cometeu alguns erros de cálculo que, seguidamente, corrigiram. Assim, a leitura do enunciado foi cuidada e atenta.

A escolha da estratégia a aplicar, também foi influenciada pela palavra “razão” contida do enunciado. Facto verificado durante a entrevista:

Professora: Que estratégia utilizaram para resolver esta tarefa?

D_J: Não é a “dos três simples” é a outra …

Professora: Qual?

D_J: (Voltaram a ler a tarefa) Usamos as proporções porque fala aqui na razão de quatro para três.

Apesar de ter sido frisado, em todas as aulas onde foram aplicadas as tarefas, que todos deviam explicar o raciocínio através de palavras mesmo que efetuassem cálculos, tal como o par B, estes alunos só utilizaram cálculos para justificar as suas respostas. Esta resistência à escrita demonstra que os alunos não estão habituados a dar respostas escritas nas aulas de matemática.

Estes alunos também não revelaram dificuldades na leitura do enunciado nem na escolha e implementação da estratégia, pelo que o seu desempenho foi considerado bom. Segundo Pittalis e colegas (2003) as respostas dos alunos encontram-se no nível relacional, pois tiveram a flexibilidade de escolher a estratégia mais adequada e de a usarem nas suas justificações.

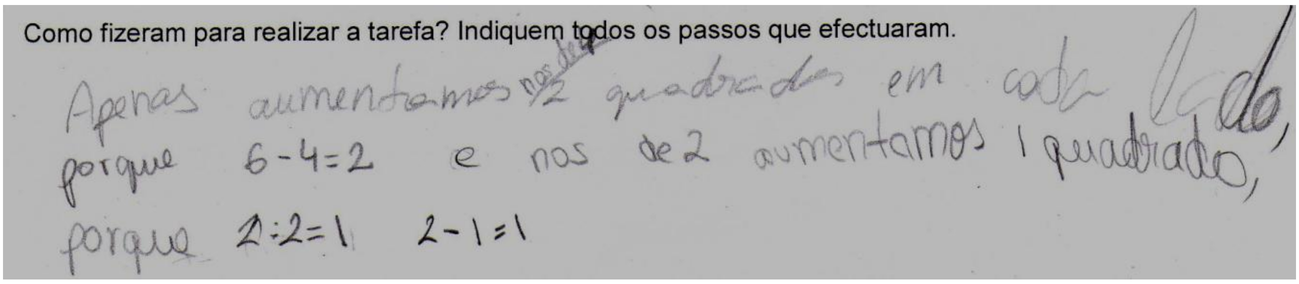
Uma vez que só recorreram a cálculos para justificar a sua resposta, a comunicação escrita é caracterizada por linguagem simbólica (Pirie, 1998).

Relativamente às dificuldades, não foram detetadas quaisquer dúvidas na resolução dos cálculos nem na formação da proporção, porém, não foi apresentada nenhuma justificação escrita, o que revela dificuldades em verbalizar por palavras o pensamento matemático.

Tarefa 11

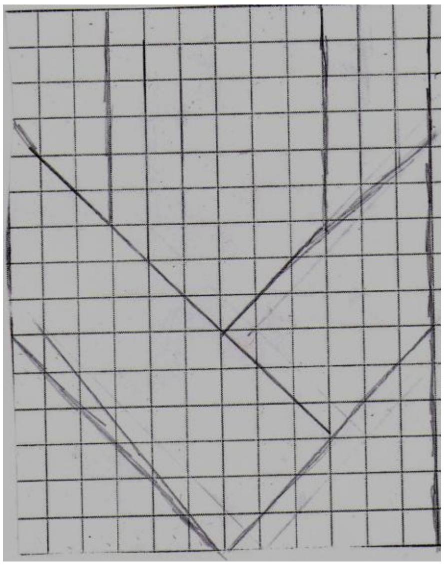
A Diana e o Joel foram o par que leu e compreendeu melhor esta tarefa. Fizeram uma leitura atenta e cuidada do enunciado e para isso releram-no várias vezes.

Tal como os outros pares, estes alunos também começaram pela estratégia de tentativa erro através do desenho, porém facilmente se aperceberam que só se aumentavam duas unidades na medida quatro e que tinham de descobrir quanto tinham de aumentar na medida dois. Para tal, recorreram a cálculos:


Como fizeram para realizar a tarefa? Indiquem todos os passos que efectuaram.

Apenas aumentamos nos de 4 2 quadrados em cada lado, porque 6-4=2 e nos de 2 aumentamos 1 quadrado, porque 2:2=1 2-1=1

Na digitalização é possível verificar que os alunos fizeram várias tentativas e que apagaram muitas vezes durante a construção do tangram.



Para averiguar se os alunos perceberam corretamente a atividade e os cálculos que efetuaram foi realizada a entrevista.

Professora: Por que é que nas medidas onde tinha dois quadrados aumentaram mais um?
D_J: Porque aumenta-se metade da medida inicial.
Professora: E porquê metade?
D_J: Porque se na medida quatro passou para seis aumentou dois, que é metade de quatro, que era a medida inicial, então na medida dois tem de aumentar metade de dois que é um.

A entrevista comprovou que os alunos perceberam a tarefa, pois nunca hesitaram nas respostas e justificaram-se convenientemente do ponto de vista matemático.

Assim, o desempenho dos alunos foi considerado médio na leitura e interpretação do problema e bom na escolha e implementação da estratégia. A resposta dos alunos encontra-se no nível relacional, segundo Pittalis e colegas (2003), pois realizam corretamente a tarefa e justificam a sua escolha na resposta à tarefa.

A comunicação dos alunos caracteriza-se por linguagem visual, uso de desenhos; simbólica, uso de símbolos e, verbal matemática, uso de palavras escritas (Pirie, 1998).

As dificuldades dos alunos, mais uma vez, se realçam na passagem do raciocínio a palavras. Na resposta à questão: "como fizeram para realizar a tarefa? Indiquem todos os passos que efetuaram", os alunos responderam com cálculos em vez de palavras: "apenas aumentamos, nos de 4, 2 quadrados em cada lado, porque 6 – 4 = 2 e, nos de 2 aumentamos 1 quadrado, porque 2 : 2 = 1 e 2 – 1 =? 1", o que mostra que em Matemática os alunos sentem-se mais à vontade com os cálculos do que com as palavras.

Análise comparativa do desempenho dos diferentes pares

Tarefa 1

Fazendo uma análise comparativa das resoluções apresentadas pelos alunos nas duas fases da aplicação da tarefa, na primeira aplicação alguns resolveram os diferentes problemas e a partir das operações que utilizaram agruparam-nos (pares A e C), outros tentaram encontrar palavras comuns nos diferentes problemas e outros separaram em: problemas em que era necessário fazer cálculos e problemas que não envolviam cálculos. Contudo, não indicaram as operações que seriam utilizadas nos problemas que envolviam cálculos (par B). Nenhum par de alunos usou as palavras "proporcionalidade direta". Na segunda aplicação, os pares B e C usaram a justificação "os que dão para resolver usando a proporcionalidade e os que não dão" embora, não tenham efetuado corretamente a sua separação. Foi possível constatar que os alunos não distinguem ou confundem problemas aditivos com problemas de proporcionalidade direta, o que demonstra que têm dificuldades em identificar corretamente as situações de proporcionalidade.

Um aspeto relevante a tirar da análise das respostas dos alunos, e baseado apenas na análise das respostas dadas antes da lecionação do tema da proporcionalidade, é o facto de todos os pares terem colocado o problema A num grupo e o B noutro grupo, o que demonstra que os alunos perceberam que estes dois problemas são diferentes.

Apenas o par B agrupou, acertadamente, o problema D no grupo do A.

Os pares A e B consideraram, corretamente, o problema H semelhante ao A e D.

Os pares A e B encaixaram o problema E (não proporcional) no grupo dos problemas com proporcionalidade, talvez pelo facto de saberem que nos primeiros meses de vida todos os bebés, por regra, aumentam de peso. Contudo não tiveram em atenção que esse aumento não é constante ao longo dos meses.

Os pares A e C agruparam o problema F (não proporcional) no grupo dos problemas com proporcionalidade e ambos o resolveram recorrendo ao pensamento aditivo (juntando 4 a 12), o que revela que os alunos confundem este tipo de pensamento com o pensamento multiplicativo. O mesmo aconteceu com o problema C (não proporcional) que foi considerado de proporcionalidade pelos pares B e C.

Apesar do problema G ser semelhante ao B (ambos são constantes), o par C colocou-o no grupo dos problemas com proporcionalidade. Talvez o enunciado do problema G seja um pouco mais complexo do que o do B, uma vez que logo na primeira frase estão presentes duas variáveis: número de músicos e tempo, e no problema C as variáveis/informações são fornecidas em frases diferentes, simplificando o pensamento dos alunos. Relativamente a esta situação, Costa (2007) refere que “em enunciados um pouco mais extensos do que o habitual, os pares manifestaram dificuldades no conhecimento sintático, nomeadamente, na compreensão de frases complexas, tanto em orações coordenadas como subordinadas” (p.144). Esta constatação aponta para a necessidade de ter atenção ao modo como se redigem os enunciados dos problemas/questões a colocar aos alunos, visto que esse modo pode tornar-se um obstáculo à compreensão.

Com esta tarefa era pretendido que os alunos distinguissem os problemas que envolvem proporcionalidade direta dos que não envolvem, agrupando num conjunto os problemas A, D e H (os que envolvem proporcionalidade) e noutro conjunto os problemas B, C, E, F e G (problemas de não proporcionalidade).

Assim, considero que o par que teve melhor desempenho nesta tarefa foi o B, embora não tenha acertado completamente na resposta à tarefa, foi o que mais se aproximou do objetivo da mesma. Todos os pares demonstraram que leram e interpretaram corretamente o enunciado do problema e apresentaram uma separação/justificação aceitável dos problemas. As respostas dos alunos encontram-se, segundo Pittalis e colegas (2003), no nível uniestrutural (pares A e C) e multiestrutural (par B).

Quanto à caracterização da comunicação escrita dos alunos, seguindo Pirie (1998), os três pares enquadram-se na linguagem verbal matemática – uso de palavras escritas ou faladas

> No grupo 1 os problemas resolvem-se com multiplicações e no grupo 2 com somas; no grupo 1 envolve cálculos em todos os problemas e no grupo 2 envolve raciocínio e lógica (par A).

> Fizemos os conjuntos conforme os problemas e a sua resolução. No grupo 1 colocamos os problemas que eram de fazer cálculos e no grupo 2 os problemas que eram iguais; no grupo 1 colocamos os problemas que se resolvem através de proporções e no grupo 2 podemos usar outras operações e em alguns o resultado é o mesmo (par B).

> No grupo 1 os problemas têm de ser resolvidos com multiplicações, subtrações e somas e no grupo 2 os problemas apresentados têm de ser resolvidos com divisões, somas e subtrações; os que dão para resolver com proporcionalidade e os que não dão (par C).

e, na linguagem simbólica – uso de símbolos.

As dificuldades desta tarefa foram mais visíveis antes da lecionação do tema da proporcionalidade, não pelo conteúdo em si, mas pelo tipo de tarefa. Inicialmente, não compreendiam o que era pretendido com a tarefa. Depois de perceberem que tinham de agrupar os problemas em grupos, não sabiam em que se focar para os separar, se deviam efetuar cálculos ou se tinham de procurar palavras comuns nos diferentes problemas. Sentiam-se preocupados com o que estavam a fazer, se seria o certo ou se era aquilo que eu pretendia que respondessem. Foi uma tarefa que deixou os alunos um pouco perdidos, sem saberem por onde e como começar.

Os alunos nunca tinham realizado uma tarefa deste género e por isso mostraram insegurança e desconfiança na realização da mesma, pois não tinham qualquer certeza se o procedimento que estavam a implementar era o correto, uma vez que eu não dei qualquer ajuda à realização da mesma para não os influenciar nas respostas. Os seus argumentos demonstram, igualmente, que os alunos parecem não ter consciência de utilizar o raciocínio proporcional antes do tema da proporcionalidade ser trabalhado, o que vai ao desencontro da literatura que defende que os alunos ao longo da sua vida quotidiana e escolar se deparam com diversas situações de proporcionalidade (Oliveira e Santos, 2000; NCTM-APM, 2008). Isso não quer dizer que não se deparem com tais situações mas, provavelmente, que não as encaram como tal, uma vez que os termos “raciocínio proporcional” e “proporcionalidade” lhes são alheios.

Para serem ultrapassadas estas dificuldades, cabe aos professores aplicarem mais tarefas de classificação ao longo dos diferentes tópicos do programa e, ainda, apresentar tarefas menos abertas, isto é, limitar o campo de escolha dos alunos, fornecendo-lhes o tipo de classificação que pretendem.

Com referi anteriormente, esta tarefa foi adaptada de uma tarefa utilizada por três investigadores, Dirk De Bock, Wim Van Doreen e Lieven Verschaffel, citados por Ainley e Pratt (2005), que realizaram um estudo muito similar a este, apenas difere em alguns dos problemas apresentados e no facto de os alunos trabalharam individualmente e não em pares. Tal como eu, estes autores verificaram que os alunos tiveram muitas dificuldades para resolver este tipo de tarefas e referem como possíveis justificações o facto de os alunos não estarem familiarizados com tarefas de classificação, já que por regra em matemática os alunos estão habituados a “resolver” matemática, isto é, a dar respostas numéricas. Também mencionam que a tarefa é bastante difícil e “abstrata” para alunos com onze anos de idade e pensam que seria mais fácil para eles se o professor fornecesse as categorias de classificação em vez de pedir apenas que as agrupem sem dar qualquer orientação.

Algumas das respostas dadas pelos alunos neste estudo foram: "são semelhantes" (problemas C e F); "porque falam em quanto tempo vai levar a fazer isto" (problemas B e G) e quando confrontados pelos investigadores para explicar o porquê do seu agrupamento o aluno separou os problemas em problemas com "como" e problemas com "o quê". Noutra situação o aluno fez três grupos e justificou-os com as operações a usar: no grupo 1 colocou o problema H e não indicou a operação; no grupo 2 colocou os problemas B, A, D e F e disse que usava multiplicações e, no grupo 3 colocou os problemas B e G e disse que usava adições. Quando questionado pelos investigadores para explicar melhor a sua escolha, o aluno respondeu que separou os problemas conforme a sua resolução: fácil, média e difícil.

Com este estudo, os investigadores concluíram que os alunos usaram distinções essencialmente linguísticas e diferenças superficiais referentes à formulação dos problemas e não distinções de estrutura matemática, conclusões similares às retiradas da minha investigação, justificações muito pobres e bastante inseguras.

À medida que fui circulando pela sala, enquanto os pares realizavam a tarefa pela primeira vez, foram vários os alunos que demonstraram um ar pouco convicto do que estavam a fazer, como se duvidassem do que estavam a fazer e alguns até me questionaram "professora é assim que quer que responda? não é preciso apresentar cálculos?". Esta postura vai ao encontro das conclusões retiradas por De Bock e colegas (2005), em matemática, os alunos não estão habituados a dar respostas escritas, mas sim a responder através de cálculos.

Tarefa 2

A tarefa dois foi a que se revelou mais clara e totalmente eficaz para os três pares de alunos.

Todos leram com atenção e cuidado o enunciado da tarefa, escolheram e implementaram corretamente uma estratégia de resolução e explicaram por escrito as suas respostas. O desempenho dos alunos foi considerado bom e as suas respostas encontram-se no nível relacional, segundo Pitallis e colegas

(2003), uma vez que todos se justificaram tendo por base a estratégia de resolução do problema.

A comunicação escrita dos alunos caracteriza-se por linguagem simbólica, uso de símbolos e linguagem verbal da matemática, uso de palavras escritas. (Pirie, 1998)

Os alunos não manifestaram dificuldades na execução da tarefa. Por um lado, provavelmente, por se tratar de uma tarefa rotineira ao longo dos diferentes ciclos de escolaridade. Por outo lado, pelo facto do conteúdo patente na tarefa, o dobro, ser de fácil compreensão para os alunos e muito frequente em situações rotineiras do dia a dia.

Tarefa 4

Ao longo da realização desta tarefa houve bastante discussão entre os elementos de cada par. Todos diziam que era o sumo do Pedro o que mais sabia a laranja, mas não conseguiam encontrar palavras para o justificarem.

Dois pares de alunos (A e B) explicaram o seu raciocínio através de palavras e o par C através de cálculos.

Assim, globalmente, todos os alunos leram e interpretaram corretamente o problema. Os pares A e B, apesar de reponderem corretamente ao problema, selecionaram e implementaram incorretamente a estratégia, logo as respostas destes alunos encontram-se no nível uniestrutural (Pittalis e colegas, 2003). O par C selecionou e implementou a estratégia de resolução corretamente e a sua resposta encontra-se no nível relacional (Pittalis e colegas, 2003). A comunicação escrita dos alunos (pares A e B) denomina-se de linguagem comum, do dia a dia (Pirie, 1998) e, paralelamente, a do par C de linguagem simbólica, uso de símbolos. As dificuldades dos alunos centraram-se na escolha da estratégia adequada (pares A e B) e na dificuldade de exprimirem o seu raciocínio através de palavras (todos os pares).

Foi notória a dificuldade dos alunos usarem o pensamento multiplicativo para resolverem este problema e justificarem convenientemente as suas respostas. Os alunos usam desde o 1.º ciclo o pensamento aditivo e quando surgem situações em que têm de utilizar o pensamento multiplicativo, por vezes são “entendidas” como continuando a ser situações envolvendo a adição. Este aparente recurso à adição precisa de ser trabalhado com os alunos recorrendo, por exemplo à exibição de contra exemplos que os alunos acompanhem e/ou construam e percebam a não adequação da operação adição para a resolução daquele tipo de situação. Esta dinâmica de procura de contra exemplos precisa de ser bem trabalhada em sala de aula.

Acertando ou não na estratégia, os alunos também sentiram muitas dificuldades em exprimir as suas ideias e o seu raciocínio matemático, o que mostra que os alunos não estão habituados a escrever quando resolvem problemas matemáticos. Esta problemática vai ao encontro de Carvalho e Pimenta (2005) quando referem que o insucesso dos alunos, muitas vezes, não depende da falta de conhecimentos, mas da incapacidade de os utilizar/aplicar e verbalizar por escrito.

Mais uma vez, a prestação dos alunos vai ao encontro do que vários estudos revelam: o raciocínio multiplicativo é essencial para a compreensão de temas como frações, razões e proporções (e.g. Ben-Chaim, 2008; Chick, s/d; Godino, 2004) e os erros dos alunos, em questões de proporcionalidade, estão associados a erros aditivos (e.g. Chick, s/d; Godino, 2004).

Tarefa 7

Efetuando uma análise global ao desempenho dos alunos nesta tarefa é possível concluir que os pares A e B inicialmente fizeram uma leitura superficial e pouco cuidada do enunciado do problema, pois, através da notas de campo foi possível averiguar que se tinham enganado a formar a proporção e após uma segunda leitura do enunciado corrigiram o equívoco. Por sua vez, o par C realizou uma leitura cuidada e atenta do enunciado, não tendo sido necessária uma segunda leitura ao longo da realização da tarefa.

Relativamente à escolha da estratégia, todos os pares aplicaram a identidade fundamental das proporções. Inicialmente, achei que talvez fosse por ser o processo mais rápido ou por ser o que tinham aprendido, recentemente, nas aulas de matemática, mas durante as entrevistas percebi que não foram estes os principais motivos que os levaram a implementar esta estratégia. Durante as entrevistas, os alunos referiram que o enunciado falava na razão entre galinhas e perus logo usaram a proporção para o resolver. Assim, os três pares selecionaram e implementaram a mesma estratégia, escolha esta que foi fortemente influenciada pela palavra “razão” contida no enunciado do problema. Possivelmente, o facto de estarem a estudar o tema da proporcionalidade nas aulas de Matemática e terem resolvido problemas semelhantes a este, também pesou na escolha da estratégia. Se os alunos ainda não tivessem aprendido este processo de resolução, talvez optassem pelas estratégias de tentativa e erro ou pelo desenho. Porém, estas estratégias seriam mais morosas e trabalhosas.

Como todos os alunos utilizaram uma estratégia formal e correta para resolver o problema, as suas respostas encontram-se no nível relacional (Pittalis e colegas, 2003).

Quanto à caracterização da comunicação escrita dos alunos, segundo Pirie (1998) esta qualifica-se de linguagem simbólica, uso de símbolos matemáticos e linguagem comum, do dia a dia, uma vez que recorreram essencialmente a cálculos e não ao uso de palavras escritas para se justificarem.

As dificuldades reveladas pelos alunos manifestaram-se na formação da proporção (pares A e B). Todavia, após chegarem ao resultado, os alunos verificaram que a sua resposta não era razoável e o erro foi corrigido. A minha experiência profissional, embora não muito extensa, revela-me que este tipo de erros é muito cometido por vários alunos, pois se não lerem com muita atenção o enunciado do problema trocam as posições dos números na proporção. De forma a evitar tais confusões, sugiro aos alunos que antes de formarem a proporção escrevam as inicias das informações relevantes do problema ou as representem por símbolos e/ou desenhos, sempre uma por cima da outra, e só depois coloquem os dados de acordo com o enunciado. Neste caso poderiam ter escrito um G (galinhas) e um P (perus) e depois formavam a proporção, o 4 corresponde a G, o 3 a P e o 32 a G; esta forma ajuda os alunos a organizarem os dados fornecidos pelo problema. $\frac{G}{P} \qquad \frac{4}{3} = \frac{32}{?}$

A dificuldade maior verificou-se em passar a palavras os cálculos efetuados. Presumivelmente não o fizeram por não estarem habituados a usar justificações escritas nas aulas de Matemática ou por pensarem que os cálculos que efetuaram já explicava todo o seu raciocínio ou pela facto de, até aqui, não lhes ser solicitado que o fizessem.

Tarefa 11

Esta tarefa é um pouco diferente das anteriores e das que os alunos estão habituados a resolver nas aulas de Matemática, pelo que se revelou bastante difícil para a maior parte dos alunos. Apenas a Diana ao fim de algumas tentativas e leituras atentas conseguiu entender o problema e resolvê-lo. Posteriormente, explicou-o ao seu par e aos alunos do par B, pelo que considero que apenas esta aluna o entendeu e respondeu corretamente ao que era pedido.

Assim, só se pode considerar que apenas o par C concretizou a tarefa na totalidade. Leu e interpretou corretamente o problema e selecionou e implementou a estratégia apropriada, fator de proporcionalidade. A resposta dos alunos encontra-se no nível relacional, usaram uma estratégia apropriada e tentaram explicá-la nos seus argumentos (Pittalis e colegas, 2003). A comunicação escrita, segundo Pirie (1998), foi expressa usando a linguagem verbal matemática, na justificação que deram, linguagem visual, na realização da tarefa e linguagem simbólica, nos cálculos que efetuaram.

O par B, leu e interpretou o problema contudo, sentiu bastantes dificuldades em selecionar e implementar uma estratégia adequada, pelo que foi através de tentativas e com a ajuda de uma colega de outro par que conseguiu desenhar corretamente o tangram. Desta forma, a resposta dos alunos encontra-se no nível pré-estrutural, pois demostraram um pensamento subjetivo e não relacionado com a estrutura dos dados do problema (Pittalis e colegas, 2003). A parte escrita da justificação deste par teve a ajuda de uma colega de outro par, pelo que não deve ser considerada nem caracterizada a sua resposta.

O par A não conseguiu terminar a tarefa. As dificuldades das alunas iniciaram-se na leitura e interpretação do problema.

Desempenho dos pares nas diferentes tarefas

Podemos sintetizar o desempenho dos pares ao longo das tarefas nos seguintes quadros:

	Desempenho dos pares					
Par A	Leu e interpretou o problema			Selecionou e implementou corretamente a estratégia		
Tarefa 1		X				X
Tarefa 2	X			X		
Tarefa 4	X				X	
Tarefa 7		X		X		
Tarefa 11			X			X
	Bom	**Médio**	**Fraco**	**Bom**	**Médio**	**Fraco**

	Desempenho dos pares					
Par B	Leu e interpretou o problema			Selecionou e implementou corretamente a estratégia		
Tarefa 1		X			X	
Tarefa 2	X			X		
Tarefa 4	X				X	
Tarefa 7		X		X		
Tarefa 11		X			X	
	Bom	**Médio**	**Fraco**	**Bom**	**Médio**	**Fraco**

	Desempenho dos pares					
Par C	Leu e interpretou o problema			Selecionou e implementou corretamente a estratégia		
Tarefa 1		X				X
Tarefa 2	X			X		
Tarefa 4	X			X		
Tarefa 7	X			X		
Tarefa 11		X		X		
	Bom	**Médio**	**Fraco**	**Bom**	**Médio**	**Fraco**

No desempenho destas tarefas destaca-se o par C, quer na leitura e interpretação do enunciado do problema, quer na seleção e implementação da estratégia de resolução mais apropriada.

Nível das respostas dos pares

	Nível das respostas dos pares			
Par A	Pré-estrutural	Uniestrutural	Multiestrutural	Relacional
Tarefa 1		X		
Tarefa 2				X
Tarefa 4		X		
Tarefa 7				X
Tarefa 11	(a)	(a)	(a)	(a)

(a) Tarefa não terminada

	Nível das respostas dos pares			
Par B	Pré-estrutural	Uniestrutural	Multiestrutural	Relacional
Tarefa 1			X	
Tarefa 2				X
Tarefa 4		X		
Tarefa 7				X
Tarefa 11	(b)	(b)	(b)	(b)

(b) Resposta dada com a ajuda do par C

	Nível das respostas dos pares			
Par C	Pré-estrutural	Uniestrutural	Multiestrutural	Relacional
Tarefa 1		X		
Tarefa 2				X
Tarefa 4				X
Tarefa 7				X
Tarefa 11				X

Mais uma vez, se destaca o par C. Este par utilizou uma linguagem mais completa na justificação das suas respostas, demonstrou maior flexibilidade em escolher a estratégia mais adequada e a resposta inclui a aplicação da estratégia.

Caracterização da comunicação escrita

	Tipo de linguagem usadas pelos pares				
Par A	Comum	Verbal matemática	Simbólica	Visual	Quase-matemática
Tarefa 1		X	X		
Tarefa 2		X	X		
Tarefa 4	X				
Tarefa 7		X	X		
Tarefa 11				X	

	Tipo de linguagem usadas pelos pares				
Par B	Comum	Verbal matemática	Simbólica	Visual	Quase-matemática
Tarefa 1		X			
Tarefa 2		X			
Tarefa 4	X				
Tarefa 7		X	X		
Tarefa 11				X	

	Tipo de linguagem usadas pelos pares				
Par C	Comum	Verbal matemática	Simbólica	Visual	Quase-matemática
Tarefa 1		X	X		
Tarefa 2		X	X		
Tarefa 4			X		
Tarefa 7			X		
Tarefa 11		X	X	X	

Relativamente ao tipo de linguagem utilizada pelos pares, destaca-se a linguagem simbólica, utilizada em todas as tarefas pelo par C, seguida da linguagem verbal matemática. Verifica-se que os alunos tendem a recorrer a símbolos para comunicar o seu raciocínio.

Análise comparativa das tarefas

A tarefa em que os alunos demonstraram mais dificuldades em perceber o pedido e na sua realização foi na primeira, em que os alunos tinham de agrupar diferentes problemas em dois ou mais grupos justificando as suas escolhas. A tarefa foi implementada na semana anterior a terem começado a estudar o tema da proporcionalidade direta. Pelo facto de nenhum dos pares ter conseguido agrupar corretamente os problemas a tarefa foi novamente aplicada após o término do estudo do tema para verificar se as dificuldades estavam associadas à falta de conhecimentos científicos ou a outros fatores.

Também a tarefa onze foi outra em que os alunos demonstraram mais dificuldades. Nesta tarefa os alunos tinham de desenhar a ampliação de um tangram pitagórico e um dos grupos não conseguiu realizá-la.

A que se revelou menos complexa para os alunos foi a sétima tarefa, em que os alunos tinham de calcular o número de perus, sabendo a razão entre o número da venda de perus e galinhas e o total de galinhas vendidas.

Nos quadros seguintes sintetizam-se os desempenhos dos pares, o seu nível de resposta e aspetos de comunicação escrita que revelaram ao longo das tarefas.

Desempenho dos pares

	Desempenho dos pares					
Global	Leu e interpretou o problema			Selecionou e implementou corretamente a estratégia		
Tarefa 1		ABC		C	B	AC
Tarefa 2	ABC			ABC		
Tarefa 4	ABC			C	AB	
Tarefa 7	C	AB		ABC		
Tarefa 11		BC	A	C	B	A
	Bom	**Médio**	**Fraco**	**Bom**	**Médio**	**Fraco**

A tarefa onde os pares manifestam melhor desempenho é a tarefa 2 seguindo-se as tarefas 4 e 7. O par que se destaca é o par C e o que revela um desempenho menos positivo é o par A.

Nível das respostas dos pares

	Nível das respostas dos pares			
Global	Preestutural	Uniestrutural	Multiestrutural	Relacional
Tarefa 1		AC	B	
Tarefa 2				ABC
Tarefa 4		AB		C
Tarefa 7				ABC
Tarefa 11				C

As respostas dos pares centram-se no nível relacional (Pitallis e colegas, 2003), sobressaindo-se nas tarefas 2 e 7 que foram as que se revelaram mais acessíveis para os três pares. Este nível de respostas demonstra que os pares são capazes de escolher a estratégia mais adequada à resolução da tarefa, seja ela uma estratégia formal ou informal.

Caracterização da comunicação escrita

	Tipo de linguagem usadas pelos pares				
Global	Comum	Verbal matemática	Simbólica	Visual	Quase-matemática
Tarefa 1		ABC	AC		
Tarefa 2		ABC	AC		
Tarefa 4	AB		C		
Tarefa 7		AB	ABC		
Tarefa 11		C	C	ABC	

Quanto à caracterização da comunicação escrita apresentada pelos pares, seguindo Pirie (1998) evidencia-se a linguagem simbólica que foi utilizada em todas as tarefas pelo menos por um dos pares, seguindo-se a linguagem verbal matemática. Nenhum par utiliza a linguagem quase-matemática, o que demonstra uma grande lacuna na comunicação escrita na disciplina de matemática.

Capítulo V – Conclusões

Neste capítulo são dadas as respostas às questões do estudo, são indicadas as limitações do estudo, são sugeridos aspetos para futuros estudos e é feita uma conclusão sobre o modo de trabalhar a proporcionalidade direta e a comunicação escrita, tendo por base este estudo.

É de referir que o estudo envolveu alunos com desempenhos médio e bom à disciplina de Matemática pelo que as conclusões retiradas são baseadas na análise das tarefas desses alunos e não da turma em geral.

Como se caracteriza o desempenho de alunos do 6.º ano de escolaridade em tarefas de proporcionalidade direta?

O desempenho dos alunos em tarefas de proporcionalidade direta é considerado médio em alguns tipos de tarefas e bom noutros tipos. Todos os pares de alunos revelaram um desempenho razoável/bom na leitura dos enunciados das tarefas, na escolha e implementação da estratégia e na resposta dada.

Foi notável um melhor desempenho nas tarefas que envolviam cálculos e nas questões de valor omisso, as ditas tarefas rotineiras de proporcionalidade direta, em que são dados três valores e é pedido o quarto valor (tarefa 7), acontecimento igualmente averiguado por Costa (2007).Também nas tarefas que envolviam cálculos com números inteiros (tarefa 2) o desempenho dos alunos foi superior do que nas tarefas que envolviam resultados não inteiros (tarefas 4 e 11).

A tarefa que não envolvia diretamente cálculos (tarefa 1) foi a que se revelou mais complexa para os alunos. Assim, verificou-se que na tarefa 1, o desempenho dos alunos foi menos positivo e os objetivos propostos foram menos conseguidos. Mais do que qualquer dificuldade significativa na leitura do enunciado ou na escolha e implementação de uma estratégia de resolução, os alunos revelaram admiração e desconfiança com o tipo da tarefa apresentada, pois era a primeira vez que se deparavam com uma tarefa daquele tipo nas aulas de Matemática e não sabiam como começar. De Bock e colegas (2005) referem que os alunos nas aulas de Matemática não estão habituados a resolver tarefas de classificação (tarefa 1), mas sim tarefas que envolvam cálculos, facto igualmente verificado neste estudo.

A tarefa de comparação numérica que envolvia conceitos de dobro e metade (tarefa 2), foi aquela em que os alunos demonstraram maior destreza e melhores resultados, tanto na sua execução como na justificação da resposta dada. Concordando com o que vários autores e documentos referem (e.g. Mora e Amymemí, 1990; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999; Programa de Matemática – ME – DGIDC, 2007), o à vontade com este tipo de tarefas revela que os alunos estão bastante familiarizados com o tipo de problema e se deparam muitas vezes com tarefas do género, não só na escola mas também na vida quotidiana. O desempenho neste tipo de tarefas pode ser considerado bom. Por sua vez, na tarefa do mesmo género, mas onde são usados valores que não envolvem os conceitos de dobro ou metade (tarefa 4), os alunos já se revelaram menos eficientes na sua resolução, talvez por não estar explicito o raciocínio multiplicativo ou por os resultados das comparações envolverem números não inteiros, os alunos recorreram ao raciocínio aditivo. Esta ocorrência vai ao encontro do parecer de vários autores: os alunos revelam bastantes dificuldades em aplicar o raciocínio multiplicativo e tendem a utilizar o raciocínio aditivo (e. g. Oliveira e Santos, 2000; Costa, 2007; Ben-Chaim e colegas, 2008).

Godinho e Batareno (2004) citando Walle, apresentam algumas estratégias que permitem ajudar as crianças no desenvolvimento do raciocínio proporcional:

> 1. Fornecer uma grande variedade de tarefas sobre razões e proporções em diversos contextos que ponham em jogo relações multiplicativas entre diferentes quantidades.
> 2.Estimular a discussão e experimentação na comparação e previsão de razoes. Garantir que os alunos distingam situações de comparação multiplicativa (proporcionalidade) de não multiplicativa, fornecendo exemplos e discutindo as diferenças entre elas.
> 3. Ajudar os alunos a relacionar o raciocínio proporcional com outros processos matemáticos. O conceito de fração unitária é muito semelhante à taxa unitária. O uso de taxas unitárias para comparar frações e resolver proporções é umas das técnicas mais apropriadas.

> 4. Reconhecer que os métodos mecânicos de manipulação de símbolos, como o esquema da “regra de três” para resolver problemas de proporcionalidade não são apropriados para desenvolver o raciocínio proporcional e não deve ser introduzido até que os alunos tenham um certo domínio de outros métodos intuitivos e com fundamento matemático coerente. (p. 276,277)

Os mesmos autores sugerem ainda algumas atividades que podem ser aplicadas com os alunos desde os primeiros níveis de ensino. Alguns exemplos são: progressões crescentes e decrescentes, envolvendo dinheiro, tempo, unidades de comprimento; atividades de construção e medição, onde os alunos possam medir o mesmo objeto recorrendo a diferentes unidades de medida e compreender a relação entre as unidades de medição e as medições realizadas com essas unidades; construções com palitos, onde possam relacionar o comprimento dos lados de uma figura com o seu perímetro; desenhos à escala, em que os alunos têm de descobrir a razão entre os lados da figura ou desenhar uma nova figura; razões entre comprimentos, áreas e volumes; recurso a sítios da internet, onde os alunos podem manusear, visualizar, construir e comparar razões, proporções e percentagens.

Como se caracteriza a comunicação escrita dos alunos?

Ao longo da investigação foi possível constatar que passar para palavras o raciocínio, a linguagem simbólica e a linguagem oral é uma tarefa que se revela bastante complexa para os alunos. Lampreia (1996) defende que a transcrição da fala para a escrita não consegue fazer com que esta atinja o colorido da fala, ou seja, os alunos têm maior capacidade de se exprimir oralmente do que por escrito. Também Carvalho e Pimenta (2001) mencionam que o insucesso muitas vezes não está associado à falta de conhecimentos, mas sim à incapacidade de os verbalizar, episódio verificado na resolução da tarefa 1.

Foi visível ao longo de todo o estudo que os alunos sentem que para explicar os conteúdos matemáticos é suficiente e mais importante o recurso aos cálculos do que à escrita. Esta atitude vai ao encontro do que referem Pirie e

Schwarzenberger (1988): os alunos não são ensinados a escrever matemática. Em várias situações os alunos diziam que já tinham feito os cálculos para explicar, logo não era preciso escrever por palavras o que fizeram.

A primeira tarefa em que era necessária, obrigatoriamente, a justificação através de palavras foi a que levou mais tempo a ser compreendida e realizada, pois os alunos não sabiam em que argumentos se deviam centrar nem conseguiam encontrar as palavras certas para as suas respostas. Após conseguirem identificar alguns argumentos em que se podiam focar, a comunicação utilizada pelos alunos caracteriza-se, maioritariamente, por linguagem comum, do dia a dia e linguagem simbólica, uso de símbolos (Pirie, 1998).

É de realçar que nas tarefas onde o desempenho foi melhor, a comunicação escrita utilizada pelos alunos também foi mais completa do ponto de vista matemático. Nas tarefas 2 e 7 onde todos os pares tiveram um melhor desempenho, a linguagem utilizada pelos alunos caracteriza-se por linguagem verbal matemática, uso de palavras escritas e linguagem simbólica, uso de símbolos matemáticos.

Globalmente, a comunicação escrita dos alunos participantes caracteriza-se pelo uso de linguagem simbólica na resolução/justificação das suas respostas, talvez por estarem habituados a que lhes sejam propostas tarefas que apenas exijam este tipo de comunicação. Inverter esta tendência está nas mãos de cada um de nós, professores. Para tal devemos apresentar aos alunos tarefas que os desafiem e estimulem a escrever em Matemática e a propósito da Matemática (Boavida e colegas, 2008). Outras prováveis causas para a falta de momentos de escrita nas aulas de Matemática pode ser o número de horas atribuídas à disciplina e a extensão do programa ou ainda, como defendem Sousa e colegas (2008) muitas vezes o professor não sabe *quando* e *como* promover esta comunicação. Talvez, a partir de agora, com o aumento do número de horas/blocos atribuídos à disciplina e com a implementação do Programa de Matemática (ME – DGIDC, 2007) já desde o primeiro ciclo, esta capacidade seja mais desenvolvida e trabalhada nas aulas de Matemática.

Que dificuldades manifestam os alunos na comunicação do seu raciocínio? Como podem ser superadas essas dificuldades?

A maior dificuldade apresentada pelos alunos está relacionada com a transcrição do pensamento a palavras: que palavras usar, como organizar as frases, como encadear as ideias. A maioria demonstra resistência à escrita, para eles basta apresentar os cálculos para explicar o raciocínio. Vários alunos comentavam: “já explicamos com cálculos, não é preciso voltar a explicar”.

A oposição dos alunos à escrita nas aulas de Matemática, muitas vezes está relacionada com a falta de tal prática, esta atitude demonstra que não estão habituados a realizar tarefas onde têm de explicar o raciocínio através de palavras. Aqui cabe ao professor escolher e implementar tarefas que desenvolvam esta capacidade que, segundo diferentes autores, é de extrema importância no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Por exemplo, para Pimm (1987) a escrita “fornece os erros, os equívocos e as crenças dos alunos” (p.114); para Emig citado por Freitag (1997), a escrita é o mais poderoso e único meio de aprendizagem, pois envolve o máximo possível do cérebro; para Carvalho e Pimenta (2001) a escrita é a chave de todo o processo de ensino-aprendizagem podendo desempenhar um papel de relevo nos processos de aquisição, estruturação e expressão do conhecimento. Porém, apesar de serem vários os autores a reconhecer a importância da escrita, Sousa e colegas (2008) referem que existem professores que mantêm crenças que não permitem aos alunos desenvolver a comunicação, mantendo uma postura bastante tradicionalista onde não há lugar para comunicar nem por escrito nem oralmente.

Os textos produzidos pelos alunos nas justificações das suas respostas, maioritariamente, são pobres e com pouca qualidade. Contudo, nas tarefas onde o desempenho dos alunos foi superior, a comunicação escrita foi também mais elaborada, tendo relacionado a estratégia utilizada com os dados do enunciado e utilizado vocabulário específico da matemática.

Para superar estas dificuldades deve haver um esforço conjunto, não só por parte dos alunos e dos professores mas principalmente por parte dos responsáveis pela educação e pelos programas educativos. Porém, na recente revisão curricular (Programa de Matemática, ME – DGIDC, 2007) já se começa a notar uma certa preocupação em desenvolver a capacidade de comunicação escrita nas aulas de Matemática:

> a Comunicação matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática a que este programa dá realce. A comunicação envolve as vertentes oral e escrita. … Os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita. O desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno, é assim considerado um objetivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. *(*p.8)

Os professores também já começam a preocupar-se em desenvolver esta habilidade e nas tarefas que preparam já começam a pedir aos alunos que expliquem como pensaram. Os manuais escolares apresentam igualmente tarefas que permitem desenvolver a capacidade de comunicação escrita. Contudo, esta mudança terá de ser gradual e não se pode esperar que tanto alunos como professores alterem os seus hábitos de um momento para o outro.

É de salientar que os alunos que fizeram parte deste estudo só a partir do 5.º ano de escolaridade é que começaram a ser confrontados com tarefas em que lhes era pedido que explicassem através de palavras o seu raciocínio. Portanto, era previsível que esta capacidade não estivesse muito desenvolvida nos alunos. O importante é continuar a aplicar tarefas que lhes permitam ultrapassar as suas limitações e desenvolver a capacidade de comunicar por escrito, provavelmente no final do 3.º ciclo estes alunos já o consigam fazer com maior destreza.

Limitações do estudo e sugestões para futura investigação

Ao longo do ano letivo 2010/2011substitui uma colega que se encontrava de atestado por acidente em trabalho e em grande preocupação era a de saber se ficava na escola o tempo suficiente para poder aplicar as tarefas de investigação com a turma desejada. Porem, apesar de ter permanecido na escola deixei de ser professora de Matemática da turma onde realizei o estudo e passei a ser professora de Estudo Acompanhado, e essa foi uma grande limitação deste estudo. Se a investigação fosse realizada nas aulas de Matemática, as tarefas podiam ser inseridas num contexto mais natural e nos momentos mais apropriados. Assim, foram aplicadas semanalmente nas aulas de Estudo Acompanhado, mas no mesmo momento em que estava a ser lecionado o tema da Proporcionalidade Direta. A vantagem foi já conhecer bem os alunos uma vez que durante o primeiro período fui a professora de Matemática.

Se a investigação tivesse decorrido enquanto professora de Matemática tinha mais possibilidades em detetar eventuais dificuldades relacionadas com a compreensão do tema da proporcionalidade. Mesmo assim, em algumas aulas de Estudo Acompanhado, para além de aplicar as tarefas do estudo também tirava dúvidas surgidas nas aulas de Matemática, o que me ajudou a compreender alguns dos erros cometidos pelos alunos.

Relativamente a futuras investigações seria interessante realizar um estudo com alunos que desde o 1.º ano de escolaridade estivessem habituados a ter de explicar o seu raciocínio, quer oralmente quer por escrito, para verificar como se caracteriza a sua comunicação escrita e quais as dificuldades manifestadas por eles. Outra sugestão seria tentar perceber que importância dão os professores de Matemática ao uso da comunicação escrita para explicar o raciocínio dos seus alunos e/ou se os professores criam momentos da aula dedicados à escrita.

Nota final

Com este estudo foi possível verificar que os alunos são mais ágeis em algumas tarefas que envolvem o tema da proporcionalidade direta do que noutras. As que envolvem conteúdos de dobro e metade são as que se revelaram mais familiares para os alunos e onde o seu desempenho é mais positivo. Também foi notório que tendem a utilizar o raciocínio aditivo, o seu primeiro pensamento vai para a adição e não para a multiplicação. Outra constatação observada ao longo deste estudo foi que os alunos mecanizam os exercícios/tarefas, se o tema que estão a estudar é a proporcionalidade direta então as tarefas apresentadas pelo professor focam-se nessa tema e a estratégia a utilizar, provavelmente, é a que acabaram de aprender. Para contrariar esta tendência dos alunos, os professores devem variar o tipo de tarefas/atividades implementadas e devem apresentar aos alunos tarefas que os levem a descobrir a estratégia de resolução e não dar-lhes a estratégia e seguidamente atividades de treino. Devem também promover a partilha entre diferentes modos de resolver uma tarefa para que os alunos vão percebendo que podem gerir os seus conhecimentos livremente e sustentar as suas opções junto dos colegas e do professor.

Relativamente à comunicação escrita, este estudo mostrou-me que os alunos não estão habituados a explicar o seu raciocínio por palavras e por esta não ser uma atividade rotineira das aulas de matemática revelam resistência à escrita. Preferem apresentar os cálculos ou até explicar oralmente do que escrever, acham a escrita muito difícil e não possuem destreza nem vocabulário apropriado para o fazerem. Pirie e Schwarzenberger (1988) consideram que os alunos não são explicitamente ensinados a ler, escrever ou falar matemática porque estas atividades parecem naturais. Uma vez mais, se chega à conclusão que o professor deve variar o mais possível o tipo de tarefas e proporcionar aos alunos momentos de reflexão e escrita, pois a Matemática não pode envolver apenas treino e atividades mecanizadas.

Esta investigação mostrou-me que é benéfico para os alunos trabalhar em pares, pois permite-lhes discutir as suas ideias e desenvolver as suas capacidades de comunicar. Aplicar as tarefas nas aulas de Estudo Acompanhado, permitiu-me ainda comprovar que é necessário dar tempo aos alunos para pensar e transcrever para o papel o seu raciocínio. Muitas vezes nas aulas de matemática, os professores querem avançar com os conteúdos e não é dado o tempo suficiente para os alunos assimilarem os conteúdos e perceberem o objetivo da tarefa que estão a realizar.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ainley, J. & Pratt, D. (2005). *The significance of task design in mathematics education: examples from proportional reasoning*. Acedido em janeiro de 2011 de http: //www.emis.de/ proceedings/ PME29/PME29ResearchForums/ PME29RFAinleyPratt.pdf.

Ben-Chaim, D., Ilany, B. & Keret Y. (2008). *"Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio*. Acedido em 22 de agosto, 2011 de http:// www.rc.unesp.br/ igce/matematica/bolema/ SITE % 2031 /David.pdf.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Ministério da Educação – DGIDC.

Bogdan, R., Biklen, S.(1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Carvalho, J. Pimenta, J. (2005). *Escrever para aprender, escrever para exprimir o aprendido*. Braga: Universidade do Minho.

Chick, H. (s/d). *Aspects of Teachers' Knowledge for Helping Students Learn About Ratio*. Acedido em março, 2010, de http://www.merga.net.au/documents/MERGA33_Chick.pdf

Civil, M. (1998). *Mathematical Communication Through Small-Group Discussions*. Em H. Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 207-222.

Costa, A. (2007). *A importância da língua portuguesa na aprendizagem da matemática*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho).

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Dias, C. (2000). *Pesquisa qualitativa – características gerais e referências.* Acedido em fevereiro, 2010, de http://www.reocities.com/claudiaad/qualitativa.pdf.

Freitag, M. (1997). *Reading and writing in the mathematics classroom*. Acedido em fevereiro, 2010, de http://www.paec-fame.org/reading_docs/rdgwrtgmathclassfreitag.pdf.

GAVE (2009). *Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 2º ciclo de 2009*. Acedido em janeiro, 2010, de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=268&fileName=RelNac_PA09_MAT_2C.pdf.

GAVE (2011). *Testes intermédios*. Acedido em 9 de junho de 2011, de http://www.gave.min-edu.pt/np3/9.html.

Godino, J. D. (2004). *Didática de las Matemáticas para Maestros*. Acedido em janeiro, 2010, de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Guedes, J., Colaço, J., Vicente, G., Colaço, A., Vale, C., Sotto-Mayor. J., Monteiro, S., Tavares, C., Guimarães, M., Coelho, M., Brás, A., Sequeira, F., Branco, M. & Fontes, C. (2004). *A Enciclopédia vol V*. Madrid: Editorial Verbo.

Lamm, M. & Pugalee, D. (2009). *Elementary Students' Construction of Proportional Reasoning Problems: Using Writing to Generalize conceptual Understanding in Mathematics.* Acedido em 20 de agosto, 2011, de http://math.unipa.it/~grim/21_project/Lamm364-367.pdf .

Lampreia, J. (1996). *Técnicas de Comunicação*. Acedido em fevereiro, 2010, de http://w3.ualg.pt/~jmartins/tecnicascomunicacao/tecnicascomunicacao.pdf .

Marques, R. (2008). *Matemática e Língua Portuguesa: Laços para o Sucesso?* Tese de mestrado em Educação. Universidade de Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências.

Mata, L. (2008). *A descoberta da escrita – textos de apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: Ministério da Educação.

Menezes, L. (1996). *Comunicação na aula de matemática*. Comunicação apresentada no ProfMat99. Acedido em dezembro, 2009, de http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/Comunicacao/Comunicação_LM1996.pdf.

Menezes, L.(1999). *Matemática, Linguagem e Comunicação*. Acedido em dezembro, 2009, de http: //clientes.netvisao.pt/lmenezes/ Microsoft%20Word%20%20Artigo%20ProfMat%2099.pdf.

Mora, M. & Aymemí, J. (1990). *Proporcionalidad Direta. La forma y el número*. Madrid: Editorial Sintesis.

Moreira, S. (2008). *A comunicação matemática desenvolvida por alunos do 2º ciclo do ensino básico quando resolvem problemas envolvendo padrões*. (Tese de mestrado, Universidade do Minho).

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Acedido em dezembro, 2010, de http://www.nctm.org/standards/overview.htm.

NCTM-APM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, I. & Santos, M. (2000). *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: Uma análise das estratégias*. 23.ª ANPED, Acedido em 12 de abril, 2011, de http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1913T.PDF.

Pirie, S. (1998). Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones: Em H. Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 7-29.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge.

Pirie, S. & Schwarzenberger, R. (1988). *Mathematical discussion and mathematical understanding.* Acedido em dezembro, 2011, de http://www.springerlink.com/content/t10800l434428234/.

Pittalis, M., Chiristou, C. & Papageourgiou, E. (2003). *Students' ability in solving proportional problems*. Acedido em 20 de agosto, 2011, de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Pittalis_cerme3.pdf.

Ponte, J.; Guerreiro, A.; Cunha, H.; Duarte, J.; Martinho, H.; Martins, C.; Menezes, L.; Menino, H.; Pinto, H.; Santos, L.; Varandas, J.; Veia, L. & Viseu, F.

(2007). *A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática*. Revista Portuguesa de Educação (pp.39-74). Braga: Universidade do Minho.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Sierpinska, A. (1998). Three Epistemologies, three views of classroom communication: constructivism, sociocultural approaches, interactinism: Em H. Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 30-62.

Silvestre, A. (2006). *Investigações e Novas Tecnologias no Ensino da Proporcionalidade Direta: Uma Experiência no 2.º Ciclo*. (Tese de mestrado: Universidade de Lisboa).

Sim-Sim, I., Silva, A. & Nunes, C. (2008). *Linguagem e Comunicação no jardim de infância – textos de apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: Ministério da Educação.

Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B. & Mamede, E. (2008). *Comunicação Matemática: contributos do PFCM na reflexão de práticas de professores*. Acedido em 23 de agosto, 2011, de http: //www.apm.pt/files /_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf.

Stacey, K. & Gooding, A., (1988). *Communication and Learning in Small-Group Discussion*: Em H. Steinbring, Maria Bartolini Bussi, Anna Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 191-206.

Steinbring, H., Bussi, M. & Sierpinska, A. (1998). *Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones*. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, I., Sousa, R. & Pimentel, T. (2007). *Matemática no 2.º ciclo. Propostas para a sala de aula*. Viana do Castelo: ESEIPVC – Programa m2.

Vale, I., Pimentel, T., Barbosa, A., Fonseca, L., Santos, L. & Canavarro, P. (2006). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Walle, J. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Boston: Pearson Education.

Anexos

Tarefas implementadas ao longo do estudo

Tarefa em pares (1) ____________________ & ___________________

Conjuntos

As tarefas que se seguem podem agrupar-se em dois conjuntos. Investiguem-nas com muita atenção e **agrupem-nas**, **justificando por palavras vossas** os motivos que vos levaram a agrupa-las nos respetivos grupos.

A – A Sra. Matilde comprou 2 caixas de maçãs, cada uma com 20 maçãs. A Sra. Maria comprou 10 caixas de maçãs iguais às da amiga. Quantas maçãs comprou a Sra. Maria?

B – A mãe da Rita colocou 3 toalhas no varal. Após 12 horas estavam secas. O seu vizinho vai colocar 6 toalhas iguais no varal, quanto tempo levarão a secar?

C - A Helena e o João estão a correr em volta de uma pista. Eles correm à mesma velocidade, mas a Helena começou um pouco depois.

Quando a Helena completou 5 voltas, o João já tinha dado 15 voltas. Quando a Helena completar 30 voltas quantas voltas completa o João?

D – O Pedro trabalha numa padaria. Para fazer 13 pães usa 10 kg de farinha. Quantos pães pode fazer se utilizar 23 kg de farinha?

E – A Ana com um mês de idade pesava 3,750 kg, com dois meses de idade 4,780 kg e com três meses 5,820 kg. Qual será o peso da Ana ao quinto mês?

F – Hoje a Ana faz 2 anos de idade e a Rosa 6 anos. Quando a Ana fizer 12 anos, quantos anos faz a Rosa?

G – Um grupo de 5 músicos tocam uma música em 10 minutos. Outro grupo de 35 músicos vai tocar a mesma peça. Quanto tempo vai levar o grupo a tocar a música?

H – Ontem, um navio chegou ao Porto de Aveiro com 326 carros “Nissan Patrol”. O peso total destes carros era de 521 mil toneladas. Amanhã, um novo barco vai chegar trazendo 732 carros “Nissan Patrol”. Qual será o peso total desses carros?

Grupo 1	Grupo 2

Porque fizeste os conjuntos desta forma? (podes referir o que tiveste em conta, o que têm em comum, …)

Achar que poderiam fazer os grupos de outra forma? Justifiquem a vossa resposta.

Tarefa em pares (2) _______________________ &_______________________

A receita correta

A mãe do Rui deu a receita de bolo de chocolate, para 4 pessoas, às mães do Pedro e do Tiago, e ambas quiseram fazer a receita para 8 pessoas. Uma das receitas não está correta, identifica-a e diz onde estão os erros.

Bolo de chocolate – 4 pessoas (mãe Rui)
Ingredientes • 125 g de manteiga • ½ tablete de chocolate amargo • 250 g de açúcar • 100 g de farinha • 1 colher (chá) de fermento em pó • 6 ovos • 1 colher (sopa) de manteiga

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Pedro)
Ingredientes • 250 g de manteiga • 1 tablete de chocolate amargo • 500 g de açúcar • 200 g de farinha • 2 colher (chá) de fermento em pó • 12 ovos • 2 colher (sopa) de manteiga

Bolo de chocolate – 8 pessoas (mãe Tiago)
Ingredientes • 250 g de manteiga • ¼ tablete de chocolate amargo • 500 g de açúcar • 150 g de farinha • 2 colher (chá) de fermento em pó • 18 ovos • 2 colher (sopa) de manteiga

Tarefa em pares (3) ______________________ & ______________________

Verdade ou mentira?

Responde às seguintes afirmações assinalando se são verdadeiras ou falsas. Em cada situação justifica a tua resposta.

1.Uma garrafa de 1,5 litros de água “Aquafina” custa trinta cêntimos (0,30€). Cinco garrafas de 1,5 litros de água “Aquafina” custam um euro e cinquenta cêntimos (1,50€).

Assinalámos que esta afirmação é __________________ porque

____

2.O preço das bananas “Madeira” é 1,20€/Kg. Comprei um quarto de quilo de bananas “Madeira” e paguei 50 cêntimos (0,50€).

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Assinalámos que esta afirmação é __________________ porque

____

3. Para fazer 12 bolinhos de limão, a mãe da Rosália gastou 60 gramas de manteiga. Para fazer 6 bolinhos de limão, mantendo as mesmas características e paladar, gastou 30 gramas de manteiga.

☐ Verdadeiro

☐ Falso

Assinalámos que esta afirmação é __________________ porque

____

Tarefa em pares (4) ______________________ & ______________________

O concentrado

Para acompanhar os bolos que as suas mães fizeram, o Pedro e o Tiago fizeram concentrado de laranja para acompanhar.

Pedro:	**Tiago:**
2 copos de concentrado	3 copos de concentrado
3 copos de água	5 copos de água

Qual dos sumos sabe mais a laranja?
Expliquem como pensaram para chegar à vossa conclusão.

Tarefa em pares (5) ______________________ & ____________________

Identificar situações de proporcionalidade direta

1.Em duas padarias, o pão da avó é vendido conforme as tabelas seguintes:

Padaria da Maria			
Nº de pães	2	4	8
Preço (euros)	0,35	0,70	1,30

Padaria do Zé			
Nº de pães	2	4	8
Preço (euros)	0,40	0,80	1,6

1.1.Em qual dos casos existe proporcionalidade direta entre o número de pães e o preço, em euros? Expliquem por palavras como chegaram à resposta.

1.2.Qual é, nesse caso a constante de proporcionalidade?

____

1.3.O que significa nesse caso a constante de proporcionalidade?

____

Tarefa em pares (6) ______________________ & ______________________

A proporcionalidade na vida real

A Inês quando ia no autocarro, para a escola, pôs-se a pensar no que a Rita lhe disse acerca da Matemática estar presente em muita coisa do dia-a-dia. E pensou:

Nos autocarros existe proporcionalidade direta entre o número de passageiros que transporta e o número de lugares sentados?

Olhou através da janela do autocarro e viu um sinal de trânsito com a forma de um triângulo.

Existirá proporcionalidade entre o perímetro de um triângulo equilátero e o comprimento do seu lado?

Ajudem a Inês a responder às suas questões. Expliquem, por palavras, como pensaram.

Agora é a vossa vez…

Deem dois exemplos da vossa rotina diária em que esteja presente a proporcionalidade.

Tarefa em pares (7) ________________________ & ____________________

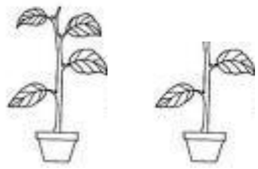
As vendas …

O Sr. Virgolino, como sabe que vende mais galinhas que perus, levou para o mercado galinhas e perus na razão de 4 para 3, respetivamente. Calcula o número de perus, sabendo que levou 32 galinhas.

Tarefa em pares (8) ________________________ & ____________________

Quem cresceu mais?

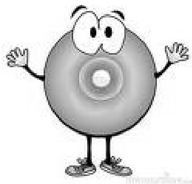
Há um mês a planta A tinha 12 cm e a planta B tinha 15 cm de altura. Agora a planta A tem 18 cm e a planta B 21 cm. Qual foi a planta que cresceu mais?



Tarefa em pares (9) _______________________ & _____________________

A melhor compra

Na época de saldos o Armazém poupadinho vende 3 CD's por €27 e o Armazém Baratão vende 4 CD's por €34. Qual será a melhor compra?



Tarefa em pares (10) ________________________ & ________________________

Voltas e mais voltas

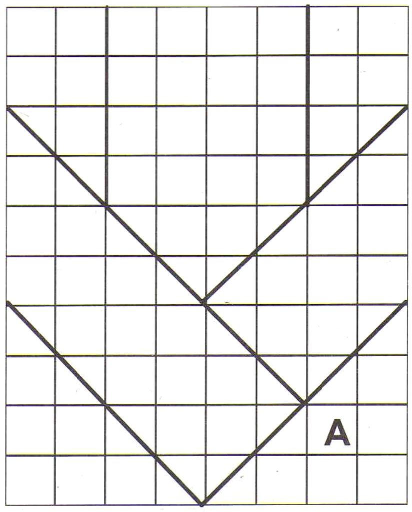
Nos carrosséis das festas de S. João, a Maria verificou que em 2 minutos davam 6 voltas. Sabendo que a velocidade se mantém constante, averiguem, por análise da tabela que a Maria construiu, quanto tempo levariam os carrosséis a dar 45 voltas.

Tempo (minutos)	2	4	1	5	1,5	….	?
Nº de voltas	6	12	3	15	4,5	….	45

Tarefa em pares (11) _______________________ & ______________________

Tangran Pitagórico

Material: Papel quadriculado; lápis; régua; tesoura



Desenvolvimento:

Considera o seguinte puzzle, construído com base num retângulo.

O triângulo A é retângulo e isósceles e o seu cateto (lado) tem 4 unidades de comprimento.

1. Recorta as peças, que te são dadas em anexo e constrói o retângulo. Cola-o no espaço em branco.

2.Constrói agora outro tangram em que a medida 4 passe para 6.

Depois de obteres as sete peças tenta construir o novo retângulo.