INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Carina de Fátima Esteves Pinheiro

OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E A GEOMETRIA – um estudo no 6º ano de escolaridade do Ensino Básico num contexto das isometrias

Mestrado em
Didática da Matemática e das Ciências da Natureza
Trabalho efetuado sob a orientação científica da
Professora Doutora Isabel Vale

dezembro de 2012

AGRADECIMENTOS

Ao longo deste trabalho, tive momentos de envolvimento e entusiasmo, mas também de algum desânimo e exaustão em que o carinho, o apoio e a orientação que me foram dados por algumas pessoas, que me são muito queridas, foram muito importantes para a sua conclusão.

Agradeço, de forma especial, à Professora Doutora Maria Isabel Piteira do Vale pela sua dedicação e interesse na orientação deste estudo, através das suas sugestões, comentários e críticas.

Aos alunos da turma onde este trabalho foi implementado, pela sua colaboração e disponibilidade nas suas diferentes fases.

Aos professores que colaboraram na revisão das tarefas de trabalho propostas aos alunos.

Aos meus colegas de mestrado, em especial à Sandra Pinheiro, obrigada por tudo o que compartilhamos: conhecimento, pontos de vista, preocupações e momentos de alegria.

Ao meu marido e aos meus dois filhos por todo o amor, encorajamento e apoio, e alguma (im)paciência, pelas minhas ausências, durante este período.

Aos meus pais e sogros pela amizade, motivação e carinho.

RESUMO

Enquanto educadores procuramos perceber as formas como se aprende e se deve ensinar matemática, para que haja aprendizagem real, consolidada de forma significativa. Assim, o aluno é chamado a desempenhar um papel ativo na sua aprendizagem, explorando e descobrindo por si mesmo, apoiado pelo professor e em negociação com os seus colegas.

Nesta perspetiva, é geralmente aceite que as tarefas que o professor leva para a sua sala de aula, a sua riqueza e diversidade, e a forma como são implementadas, são fatores determinantes para a aprendizagem matemática. Estas tarefas, muitas vezes desenvolvidas com o apoio de diferentes tipos de materiais manipuláveis, promovem o envolvimento ativo dos alunos nas atividades da aula e permitem a concretização de conceitos, frequentemente, abstratos para alunos desta faixa etária.

Neste seguimento, desenvolveu-se um estudo numa turma do 6º ano de uma escola do 2º e 3º ciclos do ensino básico que visa compreender as implicações que a utilização de materiais manipuláveis podem ter para uma aprendizagem da matemática, na área da geometria, através de uma experiência didática no domínio das isometrias. Para ajudar a delinear e a estruturar esta investigação, formularam-se três questões orientadoras: i) Qual o contributo dos materiais manipuláveis para o conhecimento geométrico, ao nível das isometrias? ii) Como se caracteriza o trabalho dos alunos quando envolvidos em tarefas com materiais manipuláveis? iii) Que potencialidades e constrangimentos têm o uso de materiais manipuláveis na aprendizagem das isometrias?

Optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa com carácter interpretativo, segundo um design de estudo de caso. As principais técnicas e instrumentos de recolha de dados consistiram na observação, direta e participante, com registos pormenorizados, num bloco de notas, dos comentários, alguns diálogos, comportamentos e reações dos alunos. Como complemento destas observações, recorremos ainda a questionários e entrevistas, ao registo áudio e fotográfico, e a documentos escritos variados, entre eles, produções dos alunos baseadas na realização das tarefas dadas. A análise dos dados, descritiva e interpretativa, apoiada em transcrições, digitalizações e fotografias representativas, permite concluir que os materiais manipuláveis, quando acompanhados de tarefas desafiantes e com tempo suficiente para os alunos fazerem explorações, contribui para a compreensão das isometrias, para além de potenciar o desenvolvimento da comunicação, da argumentação e do raciocínio matemático.

O estudo aponta também que os materiais manipuláveis podem ser facilitadores para representar e descrever ideias matemáticas e que a sua manipulação e exploração dão oportunidade aos alunos de se apropriarem de um conjunto de características geométricas do objeto que lhes dá flexibilidade de raciocínio. Os resultados do estudo permitem concluir que a aprendizagem das isometrias foi facilitada e, nalguns casos, potenciada pelo uso dos materiais manipuláveis.

Palavras-chave: Materiais manipuláveis, tarefas, pensamento geométrico, isometrias

ABSTRACT

As educators we try to understand the way to learn and teach Mathematics, in order to foster a real significant learning. Thus, students are called to play an active role while learning, exploring and discovering by themselves, supported by the teacher and negotiating with their classmates. Following this point of view, it is commonly accepted that tasks used by the teacher to in the classroom, their greatness and diversity, as well as the way how they are developed, are decisive features to the learning of Mathematics. These tasks very often developed with the support of different manipulative, that promote an active students' engagement in class tasks and frequently contribute to make abstract concepts easier.

This study was developped in a class of 6th grade students where the basic idea was to investigate the opportunities to learn with manipulative materials, throughout a didactical experience concerning the isometries domain. To help shape and structure this research three guiding questions were formulated: i) What is the contribution of manipulative materials for geometrical knowledge at the level of isometries? ii) How can we characterize student's performance when involved in tasks with manipulative materials? iii) What are the main strengths and weaknesses of manipulative materials in learning isometries?

The study was conducted through a qualitative and interpretative methological approach, following a case study design. The empirical data was collected through interviews, observations and a wide variety of documents mainly written resolution of student's talks. As complementary techniques audio and photographical records were used. Data analysis enabled us to conclude that manipulative materials, when associated with challenging tasks, and giving enough time for students to go on exploring them, are not only a worthy contribute to the understanding of isometries but also potentiate the development of communication, argumentation and mathematical thinking. This study also points out that manipulative materials can easily show and describe mathematical ideas, and their exploration gives students the opportunity to put their hands on a set of geometrical features of an object, which gives them more thinking flexibility. The results of the study seem to reveal that the learning of isometries was achieved and, in some situations, was potentiated by the use of manipulative materials.

Keywords: manipulative materials, tasks, geometrical thinkings, isometries

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO I. INTRODUÇÃO

Neste capítulo fazemos o enquadramento teórico que nos permite nortear e contextualizar o estudo, as questões orientadoras e a forma como a dissertação está organizada.

1.1. Pertinência e orientação para o estudo

Em resultado da nossa prática ouvimos muitas vezes falar dos materiais manipuláveis como instrumentos que potenciam o envolvimento ativo dos alunos nas tarefas da aula e que se podem constituir numa mais-valia para a aprendizagem matemática.

A utilização dos materiais é frequentemente apontada como uma ferramenta que promove o empenho dos alunos na construção do seu próprio conhecimento pois, através de modelos concretos, a criança constrói, modifica, integra, interage com o mundo físico e com os seus pares, e aprende fazendo, ao mesmo tempo que vai desmistificando a conotação negativa que muitas vezes se atribui à matemática. No entanto, não é a simples utilização de materiais manipuláveis que mobiliza a aprendizagem. Caldeira (2009a) frisa que para haver construção do conhecimento, o aluno tem de refletir nas ações que está a desenvolver quando está envolvido em atividades significativas.

A mesma ideia é corroborada pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) quando frisa que não basta utilizar os materiais manipuláveis (estruturados ou não estruturados), sendo necessário registar o trabalho feito e refletir sobre ele. Desta forma, os materiais manipuláveis podem ser usados como ponto de partida ou de suporte a muitas tarefas, constituindo um meio e não um fim em si mesmo (ME, 2001).

Acresce ainda que no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) pode ler-se que os professores devem utilizar materiais manipuláveis sempre que estes facilitarem a compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas, devendo ser este um recurso a privilegiar em especial nas atividades de investigação e nas tarefas que apelem à comunicação matemática (Currículo Nacional do Ensino Básico, ME, 2001).

Nesta sequência, o desenvolvimento de conceitos pelas crianças é estimulado pelo uso extensivo de materiais concretos para representar e descrever ideias matemáticas (NCTM, 2007). Boavida, Cebola, Paiva, Pimentel, Vale (2008) sublinham também esta ideia quando referem que a "manipulação direta e adequada de objetos, sejam eles de uso corrente ou especialmente concebidos como material didático (…) contribuem para a construção de conceitos" (p.71).

Apesar destas evidências, continuamos a ouvir nas nossas escolas, nas reuniões de grupo, que os professores ainda revelam muitas resistências em utilizar estas ferramentas por considerarem que provocam confusão, que motiva a brincadeira e que desviam os alunos do verdadeiro trabalho da sala de aula.

Estas constatações levam-nos a querer saber de que modo os materiais manipuláveis podem contribuir para a aprendizagem mais significativa da matemática e se, em particular, se tornam ou não uma mais-valia na aprendizagem da geometria.

Quando pensamos em selecionar um tópico do programa para aplicar as tarefas para o nosso estudo, foi-nos relativamente fácil optar pelo conteúdo "Reflexões, rotações e translações". A nossa opção fundamenta-se no facto de este ser um tema novo no programa de matemática do 2ºciclo, que se enquadra na planificação da escola e da turma no *timing* em que pretendemos implementar o estudo e de, por isso, considerarmos pertinente a experimentação de tarefas que sejam interessantes para a abordagem e desenvolvimento desta unidade. Para além disso, este tema é propício à utilização de materiais manipuláveis, contudo, apesar de o ser e de ser amplamente referida a sua utilização no PMEB (ME, 2007) e nos manuais escolares, verificamos no nosso dia-a-dia nas escolas que o seu uso ainda não faz parte da prática letiva regular da maioria dos docentes. Acresce ainda que a investigação em ensino e aprendizagem da Geometria é muito escassa (Gomes, 2012).

A opção de estudarmos a relação entre a utilização dos materiais manipuláveis e a geometria prende-se também com o facto de verificarmos que no relatório das provas de aferição de Matemática do 2º ciclo (GAVE, 2011) os itens em que os alunos obtêm desempenho mais baixo são aqueles que estão relacionados com a resolução de problemas, das áreas temáticas de Geometria e de Números e Cálculo. No mesmo relatório sugere-se também que os conceitos geométricos de área e de perímetro, bem como as respetivas unidades de medida, sejam trabalhados de forma dinâmica, envolvendo os alunos na resolução e discussão de tarefas não rotineiras e de "serem criadas situações de aprendizagem favoráveis ao desenvolvimento de um conhecimento compreensivo destes conceitos" (p.16).

Pela nossa prática verificamos que os alunos revelam dificuldades na compreensão de conceitos geométricos e temos a convicção que a utilização dos materiais manipuláveis, utilizados com tempo para que as crianças possam mexer nos objetos, comunicarem a refletirem sobre os seus pensamentos e conjeturas, podem constituir uma mais-valia na aprendizagem (Vale, 2011).

Ressalve-se que o programa de matemática (ME, 2007) contempla orientações para que os materiais manipuláveis sejam utilizados na geometria, em especial no tópico das isometrias. É aí referido que no estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho — régua, esquadro, transferidor, compasso — bem como a utilização de materiais manipuláveis (p.37). Contudo, como referimos, verificamos pela nossa prática que a sua utilização continua a ser menosprezada e pouco utilizada pelos professores em contexto de sala de aula e no desenvolvimento das tarefas. O mesmo programa também sugere a utilização de programas de geometria dinâmica na abordagem e desenvolvimento desta temática, porém foi nossa opção não fazer esta abordagem metodológica pois é nosso interesse estudar a implicação que o uso de materiais manipuláveis possam ter na aprendizagem, em especial na compreensão de conceitos geométricos, em alunos do segundo ciclo, quando trabalham as isometrias. Para isso criamos um conjunto de tarefas que incluíssem a sua utilização e exploração.

Mediante a literatura revista, ressalta ainda o facto de não haver muita investigação recente sobre esta temática, havendo alguns investigadores que sugerem a realização de estudos sobre a utilização dos materiais manipuláveis, sobre a forma como os professores os utilizam na sala de aula, estudando ainda os eventuais impactos nos resultados da aprendizagem (e.g. Botas, 2008).

Consideramos, por isso, que há pertinência em revisitar o tema dos materiais manipuláveis como recurso a utilizar nas aulas de matemática, estudando as suas potencialidades ou constrangimentos na aprendizagem significativa de conceitos geométricos, ao nível do ensino básico, em particular.

1.2. Problema e questões de investigação

Tendo presente as ideias anteriormente referidas e reforçando que o Programa de Matemática (ME, 2007) apela ao uso de materiais concretos no ensino da matemática, em especial ao nível do ensino básico e na área da geometria, pretendemos desenvolver uma experiência de ensino, em ambiente natural de aprendizagem, que permita compreender de que modo é que os materiais manipuláveis podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, no contexto das isometrias, em alunos do segundo ciclo, mais especificamente no 6º ano de escolaridade. Em particular estamos interessados compreender se o uso de materiais manipuláveis são facilitadores da aquisição de conceitos geométricos e em que medida a sua utilização contribui para uma melhor apropriação dos conceitos em estudo - isometrias.

Assim, para a concretização deste estudo enunciaram-se algumas questões orientadoras:

> Questão 1: Qual o contributo dos materiais manipuláveis para o conhecimento geométrico, ao nível das isometrias?
>
> Questão 2: Como se caracteriza o trabalho dos alunos quando envolvidos em tarefas com materiais manipuláveis?
>
> Questão 3: Que potencialidades e constrangimentos têm o uso de materiais manipuláveis na aprendizagem das isometrias?

1.3. Organização geral

A estrutura do trabalho foi-se delineando ao longo do tempo, de acordo com a revisão da literatura, o problema e as questões de investigação. Organizamos esta dissertação em seis capítulos:

(i) O capítulo I é a introdução deste trabalho, que contempla as razões que motivaram o investigador a orientar o seu estudo para a temática dos materiais manipuláveis na aprendizagem das isometrias. Neste capítulo é também definido o problema que pretendemos estudar e as questões orientadoras da investigação. No final do mesmo fazemos uma síntese da forma como estruturamos esta dissertação.

(ii) No capítulo II começamos por fazer a fundamentação teórica onde se inscreve o nosso estudo. Neste sentido, começamos por falar no Currículo, no Ensino e na Aprendizagem Matemática, procurando descrever as teorias que explicam a forma como se aprende matemática pois, desta forma, também conseguimos tirar elações para a forma como se ensina matemática. De seguida, abordamos a utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática, procurando apresentar um conjunto de autores e investigadores que fundamentem o seu uso nas aulas. No final deste capítulo ainda nos debruçamos sobre estudos empíricos realizados sobre esta temática.

(iii) No capítulo III abordamos a metodologia que orientou o estudo, descrevendo a escola, os alunos e a investigadora/professora. Apresentamos um desenho da investigação: as várias etapas do estudo (calendarização), as tarefas aplicadas e os métodos e instrumentos de recolha e análise dos dados.

(iv) No capítulo IV descrevemos, em pormenor, a experiência didática procurando mostrar a forma como as tarefas foram implementadas e como foi realizada a recolha e a análise dos dados.

(v) No capítulo V descrevemos os casos, explanando a forma como as díades em estudo resolveram as tarefas, focando a utilização que cada par deu à utilização dos materiais manipuláveis nas conjeturas e nos raciocínios que efetuaram.

(vi) Por fim, no capítulo VI, sintetizamos os principais resultados obtidos e apresentamos as conclusões que retiramos do estudo que realizamos. No final deste capítulo ainda enunciamos algumas limitações ao estudo e elencamos um conjunto de temas, suscetíveis de orientarem novas investigações.

No final do trabalho apresentamos as referências bibliográficas e os anexos (anexo 1 – questionários, anexo 2 – guiões das entrevistas, anexo 3 – tarefas implementadas).

CAPÍTULO II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo do Capítulo II faremos a fundamentação teórica da temática onde se insere o nosso trabalho, através de estudos sobre o ensino e aprendizagem da matemática no ensino básico e sobre a utilização de materiais no processo de ensino e aprendizagem, bem como na prática letiva dos docentes.

Por fim, fazemos referência a estudos empíricos realizados em Portugal.

2.1. Ensino e aprendizagem matemática

O ensino, de uma forma geral, e em particular, o que se ensina está condicionado pelas orientações curriculares e pelos programas das diferentes disciplinas e, mais recentemente, no caso da matemática, pelo Programa de Matemática para o Ensino Básico [PMEB], (ME, 2007). Mas por muito bem elaboradas que estejam essas orientações é a forma como se ensina, as estratégias e as ferramentas que o professor utiliza na sala de aula que condicionam, de forma determinante, a aprendizagem dos nossos alunos.

Sabemos que o Currículo é nacional e contempla o conjunto de aprendizagens (cognitivas e sociais) que em determinada altura, o conjunto da população estudante deve adquirir (Roldão, 1999). A matemática faz por isso parte integrante do currículo nacional do ensino básico e encontra-se presente em todos os níveis de escolaridade.

O currículo está ainda formalizado nos programas e nos manuais escolares, mas a forma como é interpretado pela escola, de acordo com o seu contexto e os seus projetos pedagógicos, bem como a forma como é implementado pelo professor na sala de aula são condições cruciais e determinantes para a efetiva implementação do currículo e para a aprendizagem do aluno.

Nesta sequência, Ponte (2005) defende que a gestão curricular está relacionada essencialmente com o modo como o professor interpreta e (re)constrói o currículo, tendo em conta as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho.

NCTM (2007) preconiza que a ênfase da matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e de técnicas, mas sim na utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo. Este objetivo coloca as tarefas que o professor desenvolve na sala de aula como um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos (Ponte, 2005).

Neste domínio, a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor (ME, 2007) e assenta na atividade que os alunos levam a cabo na sala de aula (Ponte, 2003a).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) destaca também como fundamental a importância da prática compreensiva de procedimentos e que os alunos tenham oportunidade de viver experiências de aprendizagem diversificadas: a resolução de problemas, as atividades de investigação, a realização de projetos e os jogos. Também nesse documento se chama a atenção para a diversificação de tarefas, para exploração de conexões entre os diferentes tópicos do programa, para a realização de tarefas que vão de encontro à realidade dos alunos, bem como para a utilização de ferramentas como o uso das tecnologias e dos materiais manipuláveis. São as tarefas e a forma como são desenvolvidas e implementadas na sala de aula que possibilitam um ambiente de aprendizagem promotor do raciocínio, da resolução de problemas e da comunicação matemática pois vão potenciar momentos de discussão e de troca de argumentos que vão contribuir para a aprendizagem significativa.

Neste contexto, Stein e Smith (1998) definem uma tarefa como um segmento da atividade da aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular. Estas autoras defendem que todas as tarefas são importantes e que podem ser de diferentes níveis, atendendo ao grau de profundidade e complexidade. Podemos ter tarefas que tenham como objetivo a execução de um procedimento memorizado, realizado de uma forma rotineira ou tarefas de nível mais elevado que exigem que o aluno pense conceptualmente, onde tenha que realizar conexões e explorar relações. Estes momentos constituem-se em oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio e da compreensão matemática. Segundo Stein e Smith (1998) é o efeito cumulativo de diferentes tipos de tarefas que conduz à aprendizagem e às ideias implícitas que os alunos constroem sobre a natureza da matemática.

Nesta conformidade, Ponte (2003a) defende que uma tarefa tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução (Figura 1).

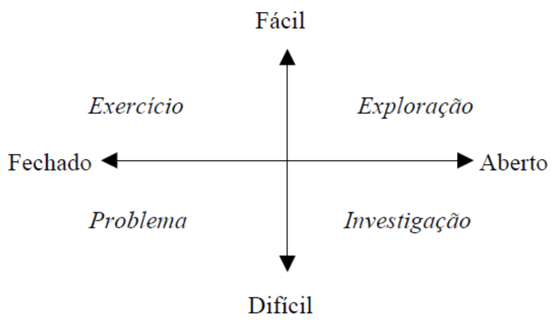


Figura 1. Dimensões da tarefa (Ponte, 2003a)

De acordo com esta estrutura, Ponte (2005) define diferentes tipos de tarefas: os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação. Segundo este autor estas tarefas são diferentes porque variam o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O desafio matemático está relacionado com a dificuldade que determinada tarefa pode ter e pode variar, entre reduzido e elevado. Uma tarefa pode ainda ser fechada ou aberta, quanto à sua estrutura. No primeiro caso é claramente dito o que é dado e o que é pedido, enquanto que nas tarefas mais abertas há um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas (Ponte, 2005).

Nesta sequência, segundo este autor, as tarefas mais desafiantes são os problemas e as investigações, sendo que as investigações são de estrutura aberta e os problemas de âmbito mais fechado. Os exercícios são apresentados como tarefas menos desafiantes e fechadas, pois implicam a mecanização de um procedimento conhecido, enquanto que as explorações variam no grau de dificuldade e são de natureza mais aberta.

Segundo Ponte (2005) a seleção das tarefas a propor aos alunos é o aspeto central no processo de ensino e aprendizagem pois elas têm reflexos no ambiente e nos modos de trabalho nas aulas. Ao selecionar as tarefas o professor deve ter em linha de conta três aspetos fundamentais: o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem (NCTM, 2007).

No PMEB (ME, 2007) preconiza-se a passagem de um ensino direto, transmissivo, para um ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005) e neste tipo de ensino o professor deve utilizar uma variedade de tarefas: investigações, explorações, problemas, exercícios, projetos que ponham os alunos a fazer matemática e a descobrir estratégias para resolver as tarefas propostas, onde o professor é um mediador que pede aos alunos para explicarem e justificarem os seus raciocínios (Ponte & Serrazina, 2009).

Nesta linha de pensamento, Caldeira (2009b) refere que é importante que o professor proporcione aos seus alunos experiências diversificadas, em diferentes contextos e com múltiplos materiais que ofereçam ambientes propícios à aprendizagem e à experimentação. Stein e Smith (1998) apresentam três fases pelas quais passa uma tarefa conducente à aprendizagem dos alunos: (1) a forma como surge nos materiais de ensino : currículo, manuais escolares, materiais auxiliares; (2) a forma como é apresentada pelo professor na sala de aula e (3) a forma como é implementada e desenvolvida pelos alunos (Figura 2).

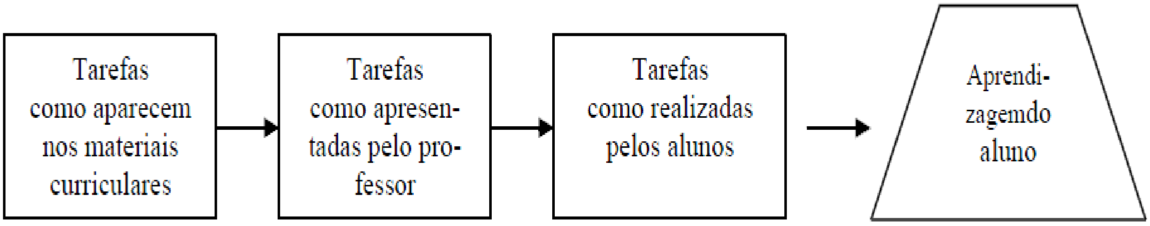


Figura 2. Fases da tarefa (Stein e Smith, 1998)

As tarefas devem assim incorporar uma riqueza e diversidade que, pela sua exploração, permita aos alunos explorarem conceitos e ideias matemáticas de maneira significativa. Segundo estas autoras é esta última fase, as tarefas realizadas pelos alunos, que influencia a forma como os alunos aprendem. Muitas vezes as tarefas são selecionadas e construídas pelo professor como de nível elevado pois, pela sua complexidade, o professor pretende desenvolver nos alunos o pensamento matemático e o raciocínio. Contudo, Stein e Smith (1998) sublinham que quando elas são trabalhadas pelos alunos podem mudar radicalmente de natureza, pois muitas vezes a tarefa apresentada é rica, no entanto se durante a apresentação e desenvolvimento da mesma o professor for dando demasiadas orientações para a sua resolução, pode reduzir os aspetos desafiantes e lógicos da tarefa, castrando assim as oportunidades de desenvolvimento do raciocínio e do pensamento matemático, podendo tornar uma tarefa de elevado nível numa mera aplicação de um procedimento conhecido de antemão pelos alunos.

Neste plano, estas autoras alertam para o facto de que as atitudes que o professor tem na introdução e desenvolvimento da tarefa são fundamentais na forma como os alunos vão aprender matemática. O professor deverá assim encorajar os alunos a pensar matematicamente, mas não deve ceder à tentação de orientar (formatar) demasiado os seus raciocínios, pois se for dando indicações, passo a passo, do que os alunos devem fazer vai eliminado as hipóteses de apresentação de estratégias de resolução alternativas, condicionando o seu raciocínio e pensamento. Os alunos deixam de raciocinar matematicamente a passam a aplicar um procedimento.

O tempo dado à realização das tarefas também é um fator essencial para a aprendizagem matemática porque se for pouco, os alunos podem não conseguir explorar convenientemente todos os aspetos da tarefa e se for muito pode fazer com que os alunos se distraiam (Almiro, 2004). A tarefa é também comprometida quando é inadequada para os alunos em questão e pode sê-lo por dois fatores: porque estes não têm o conhecimento prévio necessário ou porque as expectativas da tarefa não são suficientemente claras. Para que os alunos se envolvam no trabalho da aula é ainda fundamental que eles sejam responsabilizados pelas suas conclusões, fazendo-os explicar, claramente, a forma como pensaram (Stein & Smith, 1998).

Nesta continuidade, o modo como as tarefas são implementadas e o tempo dado podem potenciar ou não o pensamento matemático de ordem mais elevado. Para que o professor possa antecipar estes processos tem, necessariamente, de conhecer muito bem a tarefa que vai propor na aula (Canavarro, 2011).

Stein e Smith (1998) sugerem que o professor resolva a tarefa antes da sua aplicação na sala de aula para compreender o grau de dificuldade da mesma e antever possíveis dificuldades que os alunos possam ter na sua resolução. Canavarro (2011) explica que ao resolver a tarefa, de diferentes modos, o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa e tem mais possibilidades de estruturar uma aula e em gerir as discussões dos alunos potenciando as aprendizagens matemáticas. Stein e Smith (1998) aconselham também que os professores assistam às aulas uns dos outros e que reflitam sobre as tarefas que vão aplicar, discutindo, entre pares, as potencialidades das tarefas e os procedimentos (atitudes) que o professor deve ter no decorrer da aula para promover aprendizagens mais significativas nos alunos.

Nesta sequência, Ponte (2005) também alerta para a atenção que o professor tem de dar ao modo como essas tarefas são propostas e conduzidas ao longo da aula. Segundo este autor é fundamental que na sua planificação o professor conjugue diferentes tipos de tarefas e promova momentos de exploração, de reflexão e de discussão orientada, pois estas são as condicionantes essenciais para gerar verdadeiros ambientes de aprendizagem. Frisa que todas as tarefas são importantes e a sua utilização depende do objetivo que o professor tem para a aula. O fundamental é que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos essenciais, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática. Para isso o professor tem de fazer escolhas, estabelecendo um percurso alicerçado em tarefas que permitam trabalhar de modo consistente os diversos aspetos dos conteúdos (Ponte, 2005). Os professores devem por isso diversificar as tarefas a dar aos alunos porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos (NCTM, 2007).

Nesta sequência, Stein e Smith (1998) salientam que para que as tarefas se mantenham num nível elevado o professor deve apoiar o pensamento e o raciocínio matemático, estimulando as justificações e explicações através de questões, comentários e feedback.

Neste plano, as tarefas são muitos importantes no processo de ensino e aprendizagem, mas o fundamental é a reflexão que o aluno faz sobre a atividade desenvolvida. Neste sentido, a utilização de materiais proporciona algo "concreto" que pode motivar uma discussão matemática eficaz para a aprendizagem. Contudo, para se tirar o máximo benefício do uso dos materiais concretos é necessária uma reflexão permanente sobre os significados dos vários ações com esses materiais e o professor deve ter sempre presente a pergunta: "O que é que eu quero que meus alunos entendam a partir da manipulação destes objetos?” (Thompson, 1994.p.9). Pelo facto de se usarem materiais manipuláveis, as aulas não se desenvolvem automaticamente de forma a suportar o pensamento, o raciocínio e a construção de conceitos matemáticos (Stein & Bovalino, 2001).

No entanto, de acordo com Vale (2011), a realização de tarefas que sejam desafiadoras e que tenham por base a utilização de materiais manipuláveis diversificados são fatores fundamentais para que os alunos aprendam melhor e de um modo concreto vários conceitos matemáticos. Para esta autora, os materiais concretos, utilizados com o suporte às aulas, permitem contextualizar os conceitos matemáticos mais abstratos, facilitando a sua compreensão. Neste sentido, os alunos são convidados a envolver-se nas tarefas da sala de aula, a fazer conexões matemáticas, de forma que se tornem bons resolvedores de problemas, desenvolvendo o raciocínio e a capacidade de comunicar matematicamente. Um contexto que apele à utilização de materiais manipuláveis é favorável ao envolvimento ativo dos alunos e à compreensão, com significado, dos conceitos matemáticos que estão a ser tratados (Vale, 2011). Este aspeto está concordante com Stein e Smith (1998), quando afirmam que se os alunos tiverem a oportunidade de trabalhar em tarefas desafiantes, em ambientes de sala de aula motivadores e que incentivem à discussão matemática obterão ganhos substanciais na aprendizagem.

Outro fator referido por Fernandes (1997) que contribui para uma aprendizagem matemática mais eficaz é o trabalho colaborativo. Esta autora sublinha que a matemática, por ser uma atividade que implica falar, explicar, discutir, deve ser feita em pares pois desta forma os alunos sentem-se mais à vontade para exporem os seus raciocínios, ganhando confiança nas suas capacidades. Para além disso, "trabalhando colaborativamente os alunos lidam com problemas que podem estar para além das capacidades de cada um trabalhando individualmente" (p.564). Também Vygotsky (1989, citado em Damiani, 2008) sublinha esta ideia quando defende que as atividades realizadas em grupo comportam mais oportunidades de aprendizagem do que aquelas realizadas individualmente. Este autor explica que a constituição dos sujeitos, assim como a sua aprendizagem e os seus processos de pensamento (intrapsicológicos), ocorrem mediados pela relação com outras pessoas (processos interpsicológicos). Elas produzem modelos referenciais que servem de base para os nossos comportamentos e raciocínios, assim como para os significados que damos às coisas e às pessoas.

2.2. Os materiais manipuláveis e a aprendizagem na aula de Matemática

A matemática, ao longo dos tempos, tem sido abordada de forma muito abstrata, com poucas demonstrações concretas e recorrendo pouco às conexões com a realidade (Silveira, Novello & Laurino, 2011). Estes autores apontam este facto como uma dificuldade na compreensão matemática dos alunos e no gosto que desenvolvem pela disciplina. Neste sentido, salientam que os materiais manipuláveis devem ser utilizados no currículo pois são objetos que "criam uma ligação entre a teoria e a prática, minimizando as ruturas de articulação entre o quotidiano e o saber escolar" (p.20).

Importa então saber o que se entende por material manipulável. Este termo é muitas vezes usado como sinónimo de material didático, no entanto esta designação engloba um conceito muito mais abrangente: materiais didáticos são todos os recursos que utilizamos para promover o ensino-aprendizagem da matemática (Vale, 2002). Chamorro (2003, citado em Alves & Morais, 2006) define materiais didáticos como os meios que o professor utiliza para ensinar dentro e fora da sala de aula, que o auxilia nas suas explicações, mas principalmente são todos os meios que vão facilitar ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos em estudo.

Nesta sequência nem todos os materiais didáticos são materiais manipuláveis. Quando nos restringimos ao” material manipulável, falamos de todo o material concreto, educacional ou do dia-a-dia, que represente uma ideia matemática, que durante uma situação de aprendizagem, apele aos sentidos (sentir, tocar, mexer, moldar, reorganizar) e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos” (Vale, 2011, p. 4). Os materiais concretos são ainda apontados como objetos a três dimensões que permitem representar uma ideia matemática (Vale, 2002). Esta autora defende especialmente os materiais mais simples, de uso comum e aqueles construídos pelos próprios alunos. O motivo prende-se com a perceção de que durante a construção do material há uma aprendizagem mais eficaz, há a criação de laços afetivos com o material, para além de ser acessível e económico.

Nesta conformidade, há vários autores que defendem a utilização de materiais manipuláveis por considerarem que através da experimentação com diferentes materiais as crianças têm oportunidade de verificar intuitivamente “como é que as coisas funcionam”, o que lhes dá fluência e flexibilidade no raciocínio (Kelly, 2006).

Reys (1982, citado em Vale, 2002) identifica alguns aspetos a partir da comparação de várias teorias de aprendizagem que fundamentam o uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Matemática: (1) a formação de conceitos é a essência da aprendizagem em Matemática; (2) a aprendizagem baseia-se na experiência; (3) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência e é o cerne da aprendizagem; (4) a aprendizagem caracteriza-se por estádios distintos de desenvolvimento; (5) a aprendizagem melhora com a motivação; (6) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstrato; (7) a aprendizagem requer participação/envolvimento ativa(o) do aluno; (8) a formação de abstrações matemáticas é um processo longo.

Neste sentido, Lorenzato (2006) defende que a utilização de materiais é fundamental na aprendizagem da matemática porque se houver uma utilização adequada, os alunos ampliam a sua “conceção sobre o que é, como e para quê aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos” (p.43) relacionados com esta disciplina. O objetivo dos materiais concretos é, por isso, ajudar os alunos a percorrer um caminho para chegarem ao mundo das ideias matemáticas, a saltarem do concreto para o abstrato (Vale, 2011).

Neste paradigma e numa perspetiva construtivista do conhecimento, os materiais manipuláveis são promotores do envolvimento dos alunos nas tarefas da aula tornando-os agentes ativos na construção do próprio conhecimento. Por isso, os materiais manipuláveis, as tecnologias e os manuais escolares são os recursos que devem ser privilegiados como suporte às tarefas realizadas na aula. Estes devem conter uma riqueza e diversidade capazes de permitirem uma abordagem mais clara de determinados conteúdos matemáticos, permitindo um trabalho mais dinâmico e motivante nas aulas, pois os materiais manipuláveis sejam estruturados e não ”permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos” (e.g.Martins &Santos, 2010; ME, 2007; Scolaro, 2008; Vale, 2002).

Contudo, vários autores alertam para o facto de que a simples utilização de materiais manipuláveis não constitui nenhuma garantia de que haja aprendizagem. Ideia esta reforçada por Januário (2008) que refere que a utilização destes materiais pode não ser sinónimo de sucesso e de aprendizagem. A utilização de materiais manipuláveis constitui um meio e não um fim em si mesmo (e.g. ME, 2001; ME, 2007; Vale, 2002). Eles são apenas mediadores no processo de ensino e aprendizagem e subjacente a cada material, deve existir uma proposta pedagógica que o justifica (Caldeira, 2009a). Para além disso, para que a aprendizagem seja significativa, o aluno tem de se envolver nas tarefas da aula. Não é suficiente que os alunos observem o professor a utilizar determinado material concreto, os alunos têm de ser ativos e reflexivos; têm de querer manipular o objeto, explorá-lo e descobrir e experimentar padrões e relações, pois são estas ações o foco da aprendizagem matemática (Vale, 1999). Apesar de na maior parte das vezes a matemática começar com uma ação sobre os objetos, estes não contém nem produzem matemática, "apenas cada pessoa pode fazê-lo com a sua mente" (Vale, 2011, p. 15). O fundamental é a experiência de aprendizagem que pode ser promovida pelo uso destes materiais, levando os alunos a descobrir ou a comprovar, no concreto, conceitos que são abstratos. A construção conceitual por parte do aluno não se faz pelo simples uso do material, tudo depende da forma como estes recursos são utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos através deles (Fiorentini& Miorim, 1990; Nacarato,2005). A mesma ideia é defendida por Clements (1999) quando chama a atenção para a necessidade de haver uma reflexão sobre a atividade desenvolvida com os materiais e que, em muitos casos, os alunos precisam de ser ajudados pelo professor a perceber os conceitos matemáticos que estão relacionados com a tarefa realizada.

Alves e Morais (2006), na mesma linha de pensamento, concluem que "as noções matemáticas são construídas pelas crianças e não estão no material", no entanto estes autores também defendem que o material manipulável favorece a aprendizagem "desde que seja bem utilizado" (p.339).

Neste paradigma, os materiais manipuláveis proporcionam uma forma concreta de os alunos interligarem informação nova, muitas vezes abstrata, às estruturas de conhecimento já solidificadas, com significados pessoais permitindo absorverem informação nova e dando-lhe significado, no entanto também frisam que não carregam, magicamente, a compreensão matemática (Stein & Bovalino, 2001).

Caldeira (2009a) fortalece a importância da utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática e na criação de dinâmicas potenciadoras de uma aprendizagem real e significativa, quando lembra que os materiais por serem recursos que permitem a estratégia tentativa e o erro (importante para uma aprendizagem significativa), facilitam a comunicação e a interação entre alunos e com os educadores, proporcionando ao professor a observação das diferenças individuais, do modo como os alunos entendem uma situação e pensam numa solução (p. 3314).

Por tudo isto, o professor deve permitir e incitar o aluno a explorar o material e a discutir descobertas e conjeturas realizadas durante a realização das tarefas, incentivando-o a comunicar a sua forma de pensar com os colegas e com o professor.

Nesta sequência, uma aula com recurso a materiais manipuláveis deve ser pensada e planeada com muito pormenor e o professor deve ter tido formações direcionadas para a exploração deste tipo de estratégias de trabalho (Stein & Bovalino, 2001).

Lorenzato (2006) frisa alguns cuidados que o professor deve ter em consideração quando planeia aulas com recurso a materiais manipuláveis: i) dar tempo para que os alunos conheçam o material (exploração livre); ii) incentivar a comunicação e troca de ideias, discutindo com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidas; iii) mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das tarefas por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registo individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas; iv) realizar uma escolha responsável e criteriosa do material; v) planear com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, de forma a potenciar uma exploração mais eficiente; vi) estimular a participação do aluno e de outros professores na construção do material.

Os materiais manipuláveis podem assim constituir-se num bom recurso a utilizar para uma aprendizagem significativa da matemática, desde que o professor tenha um bom conhecimento das suas potencialidades e fragilidades e dê tempo ao aluno para que, de uma forma orientada e planeada, explore o material, descubra e verifique no concreto, conceitos matemáticos, por vezes com algum grau de abstração, fomentando o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento.

Lorenzato (2006) defende que o material manipulável deve ser utilizado independentemente da idade das pessoas porque a interiorização do conceito será potenciado pela visualização e manipulação do objeto. Este autor refere ainda que a utilização de materiais permite respeitar o ritmo de aprendizagem de cada aluno, uma vez que é o aluno, através da exploração, que vai descobrindo as propriedades e os conceitos, mediado pelo professor. Lorenzato (2006) critica ainda quem entende que esta metodologia de trabalho dificulta o cumprimento dos programas, devido ao tempo gasto com a manipulação. Este autor sublinha que face à compreensão dos conceitos, obtida pelo uso de materiais, o ritmo do aluno aumentará e que o tempo gasto no início será recompensado em quantidade, mas especialmente em qualidade, nas tarefas seguintes.

A implicação dos materiais manipuláveis na aprendizagem depende ainda da forma como estes são apresentados aos alunos e com que objetivo são usados. Apesar de crianças mais novas necessitarem de mais tempo e mais atividades com materiais concretos, todos os alunos podem beneficiar com a sua utilização desde que os mesmos sejam usados no momento certo (Vale, 1999, 2012). Os alunos têm de encarar os manipuláveis como ferramentas que os ajudam a aprender matemática e não como brinquedos. Para que assim seja, Kelly (2006) é de opinião que os materiais manipuláveis devem seu utilizados regularmente, o professor deve apresenta-los e manipulá-los perante a turma evidenciando as suas potencialidades na construção de conceitos matemáticos. Se assim for, os alunos desenvolvem a crença de que os abjetos concretos ajudam a perceber os conceitos matemáticos mais abstratos e a partir deles podem desenvolver vários raciocínios matemáticos. Contudo, esta autora defende que os professores devem fornecer algumas indicações ou introduções no âmbito de conceitos matemáticos que vão ser abordados porque se assim não for, muitas vezes, os alunos não conseguem progredir de forma sistemática no desenvolvimento e compreensão dos conhecimentos matemáticos. Conforme é referido em Stein e Bovalino (2001), sem a ajuda do professor, os alunos podem passar a maior parte da aula a explorar em redor dos conceitos, sem nunca chegar ao seu âmago. Se não forem cuidadosamente pensados, a utilização de manipuláveis pode-se tornar numa fachada, agradáveis de ver e brincar, mas supérfluos para a aprendizagem em geral e o pensamento dos estudantes pode transformar-se em procedimentos de imitação, sem conexão com os significados ou em exploração não-produtiva. Concordante com as ideias referidas está a Veloso (2012) quando afirma que é necessário ter alguns cuidados para que a experiência dos alunos não se limite a "brincadeiras" com os objetos, mas que implique realmente atividade intelectual. Para isso o professor deve-se certificar que há raciocínios matemáticos envolvidos nessa experiência com materiais manipuláveis.

Kelly (2006) refere dez passos que o professor deve ter em conta quando utiliza estas ferramentas: (1) definir com clareza os comportamentos a ter com os materiais manipuláveis: os alunos devem ser orientados para entenderem o propósito do uso dos materiais e, desta forma, estes ganharão relevância na tarefa matemática que estão a desenvolver; (2) definir o objetivo da manipulação na sala de aula: os alunos têm de ver o material como ferramenta auxiliar na aprendizagem matemática e não como “um brinquedo”; (3) os materiais facilitam o trabalho colaborativo e promovem a comunicação matemática pois a manipulação incentiva a interação não só com o objeto, mas também entre os alunos, o que faz com que os pares verbalizam os seus raciocínios e conjeturas e tenham a oportunidade de comunicar e explorar as estratégias de ambos, observando diferentes pontos de vista; (4) permitir um período exploratório livre: a manipulação de materiais permitem fazer explorações e incentiva os alunos menos ativos a tornarem-se mais participativos e a desenvolverem confiança no uso da manipulação, o que conduz que o aluno construa o seu próprio significado, ajudando-o a solidificar e a melhorar a sua compreensão matemática; (5) utilização de materiais diversificados no estudo do mesmo conceito; (6) usar o mesmo material para trabalhar diferentes conceitos; (7) apoiar e incentivar a utilização de materiais manipuláveis em todos os estudantes. Se o professor introduzir os materiais manipuláveis e lhes der relevância para a aprendizagem matemática, os alunos tendem a utilizá-los desta forma. Pelo contrário, se o professor exprimir sentimentos menos positivos em relação ao uso de manipuláveis, os alunos serão menos propensos a utilizá-los e haverá menos probabilidades de adquirirem conhecimentos matemáticos com a sua manipulação; (8) os materiais devem estar acessíveis e existirem em número suficiente; (9) os materiais promovem a exploração, a formulação de conjeturas pois são meios que facilitam a criatividade na procura de respostas aos problemas matemáticos; (10) avaliar os conhecimentos dos alunos com base na utilização dos materiais manipuláveis. O professor deve ser um bom observador da aula e avaliar os raciocínios que cada aluno vai fazendo ao longo de todo o processo e não só as conclusões finais.

Para esta autora o papel do professor é fundamental porque as expetativas que ele tem da aprendizagem matemática através do uso de materiais manipuláveis é assimilada pelos alunos. Se o professor transmitir ao grupo/ turma que os materiais podem ser um meio para uma melhor aprendizagem matemática, eles vão utilizá-los nesse sentido; se o professor tiver poucas expectativas com esta metodologia e se referir que deve ser usado apenas pelos alunos com maiores dificuldades, os alunos vão ser relutantes em utilizá-los. Por outro lado, o uso de materiais manipuláveis pode elevar os índices de motivação e de confiança dos alunos e, se estes fizerem parte integrante das aulas de matemática podem contribuir para uma aprendizagem mais eficaz, levando os alunos a continuar os seus estudos nesta área disciplinar.

Vale (2002) reforça esta ideia quando admite que até pode haver crianças que raramente ou nunca tenham utilizado este tipo de recursos, mas que os mesmos teriam desenvolvido conceitos matemáticos mais sólidos e uma melhor compreensão desses conceitos e das situações problemáticas que os envolvem se os tivessem utilizado, uma vez que os materiais manipuláveis, na perspetiva desta autora, se constituem num "contributo precioso na construção do conhecimento" (Vale, 1999, p. 15).

A matemática torna-se mais significativa quando existe a compreensão dos conceitos e os materiais ao concretizarem e proporcionarem situações, próximas da realidade, contribuem para esta finalidade e para o desenvolvimento de destrezas e capacidades matemáticas (Caldeira, 2009b). Contudo, a aprendizagem não se apresenta como uma consequência da utilização de materiais manipuláveis, mas resulta essencialmente de dois fatores principais: a tarefa que os alunos realizam e a reflexão que sobre ela efetuam (Ponte, 2005).

Todavia os alunos quando trabalham com materiais manipuláveis tendem a adquirir uma visão mais positiva da matemática e tornam-se mais atentos e conscientes das suas próprias capacidades e conhecimentos (Vale, 2012).

2.3. A geometria – Transformações geométricas

O estudo da geometria é amplamente reconhecido por contribuir para a capacidade de visualização, para o desenvolvimento do pensamento crítico, para a intuição e para a capacidade de resolução de problemas (Gomes, 2012). Sobre o papel da representação visual e da sua importância na aprendizagem da geometria, Vale e Barbosa (2009) frisam que "ver" é uma componente importante da generalização e deve ser explorada, nos alunos desde muito cedo. Neste domínio torna-se também fundamental desenvolver o "olho geométrico" de alunos e professores pois esta capacidade é fundamental para a compreensão de noções geométricas e para o desenvolvimento do raciocínio matemático, sendo que devemos usar a geometria para facilitar a visualização e a melhor compreensão de outros conceitos matemáticos (Vale & Fonseca, 2010).

Neste seguimento, Veloso (2007) defende uma abordagem da geometria que envolva a compreensão de conceitos em desfavor da memorização de definições e termos pois sustenta que nos primeiros anos de escolaridade os alunos vão construindo os conceitos de geometria de uma forma natural, sem haver uma apresentação formal de definições por parte do professor. Para este autor, "os novos termos, e serão muitos, aparecerão naturalmente durante as múltiplas explorações de materiais manipuláveis de diversos tipos" e naturalmente o aluno, apesar de não conhecer o termo que "não lhe foi explicado de antemão, emprega esses termos de forma correta — diz vértice em vez de "bico" ou ângulo em vez de "cantinho"". Para este autor a apropriação dos conceitos geométricos deve fazer-se de forma gradual, sempre sustentada por uma compreensão dos conceitos que vão sendo abordados.

Este mesmo autor refere que as transformações geométricas são uma forma importante de resolver problemas de geometria pois é" sempre frutuoso imaginar a solução ou construção final de uma figura, e tirar daí relações entre os objetos que sugiram como pode realmente ser obtida a construção pedida" (Veloso, 2012, p.14).

Veloso (2008) realça a importância do ensino da geometria na escolaridade básica obrigatória, mas relembra que a relevância que lhe tem sido dada tem sido menor existindo uma "tradição persistente que tem limitado as experiências dos jovens, durante muitos anos — porventura todo o ensino básico e portanto toda a vida para quase todos — a meia dúzia de figuras planas e a meia dúzia dos chamados sólidos geométricos." O mesmo autor frisa que o recente programa de matemática pode-se constituir numa "lufada de ar fresco" e trazer para as salas de aula outras temáticas e mais vivências matemáticas dentro da área da geometria.

Nesta continuidade, Veloso (2012) defende que foi uma iniciativa "muito positiva" a inclusão no programa de matemática de 2007 do conceito de simetria, em associação com um maior cuidado dado às transformações geométricas. Esta opção" poderá tornar-se no âmbito da experiência matemática para os alunos do ensino básico, um fator relevante para o seu desenvolvimento matemático e cultural" (p.41).

Efetivamente, o PMEB (ME, 2007) salienta que "o raciocínio geométrico e a visualização espacial são capacidades a aprofundar " (p.36) ao nível do 2º ciclo, sendo que o estudo das isometrias e das simetrias se constituem numa área que tem como principal propósito a aquisição deste objetivo.

As isometrias são uma temática que passou a ser abordada no 2º ciclo com o PMEB (2007). Neste documento pode ler-se que "o estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas. As tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial neste ciclo, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão (ME, 2007,p.36).

Nesta conformidade, as isometrias começam a ser abordadas no 1.º Ciclo, sendo exploradas no estudo dos frisos. Neste nível de ensino, "construir frisos e identificar simetrias" (ME, 2007,p. 23), são objetivos a atingir, sugerindo-se para isso "a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)" (ME, 2007,p. 23).

As isometrias são depois aprofundadas no 2.º Ciclo, onde o seu estudo recai essencialmente sobre a reflexão e a rotação. Para este nível de ensino, o PMEB (2007) frisa ainda a importância das isometrias para o desenvolvimento do conceito de congruência uma vez que duas figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes, permitindo este tipo de transformações "a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas" (ME, 2007,p.37).

A simetria é outro conceito a explorar nos 1º e 2º ciclos, pois o programa defende que este é um conceito chave e através do estudo das simetrias os alunos podem "caracterizar objetos geométricos, simplificar argumentos e, com o seu recurso, é possível elaborar estratégias de resolução de problemas em muitos casos de maior eficácia" (ME, 2007,p.37). Deste modo, os materiais manipuláveis surgem como um tema de interesse, na medida em que podem ser uma mais valia para a aprendizagem significativa da matemática.

Nesta linha de pensamento, diversos autores, Veloso, Bastos, Figueirinhas (2009) frisam que os alunos devem ter experiências diversificadas que impliquem aprendizagens sobre a Geometria e sobre a natureza da própria Geometria e que as situações vividas sejam acompanhadas de atividade matemática de ordem superior, defendendo ainda que na aprendizagem da geometria "é preciso proporcionar também algumas experiências com materiais manipuláveis" para além de recurso às ferramentas tecnológicas, nomeadamente programas de geometria dinâmica e applets.

Neste contexto, a utilização dos materiais manipuláveis é focada por alguns investigadores, especialmente no ensino e aprendizagem da geometria. O Programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) particulariza que no ensino desta temática, no primeiro ciclo, se deve "privilegiar a exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objetos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial" (p.20), salientando que no estudo deste tema, é fundamental o recurso a instrumentos de medida e de desenho (…) bem como a utilização de materiais manipuláveis" (p.37). No mesmo sentido, na publicação do Ministério de Educación y Ciencia (2004) pode ler-se que a utilização de materiais didáticos contribui para uma visão mais ampla e coerente dos conceitos geométricos e que a sua pouca utilização faz com que as crianças tenham uma fraca conceção da geometria tanto a nível cognitivo como representativo. Van Hiele (1999 citado em Vale, 2011) também defende que a manipulação de materiais é importante para a compreensão das propriedades geométricas e das suas relações. Esta autora sublinha ainda que “numa perspetiva construtivista e intuitiva da geometria um desenho é insuficiente para uma compreensão de um conceito geométrico”, havendo, por isso, a necessidade de se recorrer ao concreto.

Veloso (2012) sugere também a importância de se recorrer ao uso de materiais manipuláveis no estudo das simetrias quando aponta, no estudo dos frisos, a modelação com espelhos como uma boa metodologia para a compreensão deste conceito.

2.4. Estudos empíricos

Os estudos empíricos realizados sobre a temática dos materiais manipuláveis em Portugal são reduzidos, especialmente se procurarmos encontrar estudos que façam o cruzamento da aprendizagem das isometrias com a utilização dos materiais manipuláveis, uma vez que este é um tema que foi introduzido recentemente no PMEB. Os estudos que descobrimos reportam-se mais à perspetiva dos professores e de outros pedagogos sobre o conhecimento e utilização dos materiais manipuláveis e menos a estudos com aplicação destes recursos dentro da sala de aula.

Neste seguimento, Vale (2002) cita diferentes estudos, na área da psicologia e da matemática, que corroboram a ideia de que a criação de ambiente de aprendizagem que recorram à utilização de materiais concretos permitem experiências matemáticas mais eficazes e que estes recursos são facilitadores pois ajudam os alunos na compreensão de ideias abstratas a partir de situações concretas e problemáticas (e.g.Bruner, 1962; Dienes, 1975; Fennema, 1982; Reys ,1982; Pimm, 1996; Piaget, 1977; Post ,1988).

A mesma autora, menciona que na década de 90 foram realizados alguns estudos em Portugal sobre a temática dos materiais manipuláveis, na perspetiva do trabalho dos professores, procurando saber qual é a importância que estes dão à utilização deste tipo de recursos nas suas aulas, aferindo da necessidade de formação específica nesta área (Loureiro & Serrazina, 1994; Serrazina, 1993; Rodrigues, 1993; Costa, 1985; Fernandes, 1985; Ribeiro, 1995). Dos estudos citados por Vale (2002), apenas dois estudos foram realizados com alunos (Fernandes, 1990; Pires, 1994). Apesar destes estudos já terem vários anos, analisemos alguns deles. O estudo realizado por Fernandes (1985) sobre o conhecimento e a utilização que os professores fazem dos materiais manipuláveis na sala de aula, constatando que geralmente os educadores utilizam-nos pouco nas suas aulas e desconhecem as suas potencialidades. Costa (1985) também realizou uma investigação deste domínio e concluiu que os professores não utilizavam os materiais manipuláveis porque as suas escolas não estavam equipadas com materiais educativos e os poucos que estavam disponíveis não eram muito usados.

Neste plano, Fernandes (1990) realizou um estudo com alunos do 5º ano de escolaridade, onde procurou avaliar a eficácia de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional. Num desses métodos usou materiais manipuláveis, noutro, materiais e computador e o terceiro era o método tradicional. Destes estudos concluiu que, no final da unidade didática, não foram encontradas diferenças significativas entre os métodos utilizados, sobretudo nos dois primeiros.

Contudo, há a referir um estudo realizado por Serrazina (1993) com professores do 1º ciclo, onde a investigadora detetou que a maioria dos professores concorda com a utilização dos materiais no processo ensino e aprendizagem.

Em contraponto há a referir um estudo realizado por Ribeiro (1995) relativo às conceções de professores do 1º ciclo têm sobre o ensino e aprendizagem da matemática. Neste trabalho, o investigador desenvolveu um programa de formação com o objetivo de promover a utilização de materiais manipuláveis pelos professores. Acompanhou dois professores e detetou que a utilização dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem é quase nula. Estes docentes consideraram os materiais interessantes como meio de motivação, mas não os veem como relevantes para a aprendizagem pois, para eles, os materiais não estimulam o desenvolvimento de conceitos por parte dos alunos. O quadro, para aqueles professores, é o material adequado e suficiente para as suas aulas.

Na mesma linha, Rodrigues (1993) num estudo que efetuou sobre as perspetivas dos professores, do 3º ciclo e secundário, sobre o ensino da matemática, constatou que os materiais manipuláveis eram muito pouco utilizados por aqueles professores, os quais privilegiavam o uso do quadro e o giz, seguido do livro de texto, cadernos de exercícios e fichas de trabalho.

Neste domínio, Loureiro e Serrazina (1994) participaram num estudo de natureza qualitativa entre 1991 e 1995, no âmbito de um projeto intitulado "Utilização de Materiais na Resolução de Problemas" cujo objetivo foi produzir materiais que pudessem contribuir para o desenvolvimento da resolução de problemas e da utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática para o 1º ciclo. Com base em dois estudos de caso as autoras concluem que dois dos professores de uma escola do 1º ciclo são entusiastas da utilização dos materiais manipuláveis no ensino aprendizagem da matemática e consideram inconcebível a aprendizagem da matemática sem o suporte de materiais.

Na mesma altura, Pires (1994) realizou um estudo que teve como objetivo saber como os alunos veem a utilização de materiais na sua aprendizagem matemática, procurando investigar as conceções e os processos de resolução de problemas relacionados com os conceitos de área e de perímetro em alunos do 6º ano de escolaridade. Os materiais utilizados foram a régua e esquadro, geoplano, puzzles, modelos em cartolina, materiais de uso corrente e calculadoras. Este estudo concluiu que quando são utilizados modelos concretos os alunos apresentam melhores desempenhos.

Estes estudos estão em contraponto com um trabalho desenvolvido pela APM (1998) com professores de matemática do ensino básico e secundário com o objetivo de elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. A publicação dos resultados destes estudos ficou conhecida como Relatório de Matemática 2001. Ressalta deste estudo que os recursos que a maioria dos professores usa sempre nas suas aulas são o manual escolar adotado e fichas de trabalho. Relativamente aos materiais há um número significativo de professores que menciona a calculadora, aumentando a frequência de utilização de ciclo para ciclo até ao ensino secundário, sendo que no 2º ciclo cerca de um quarto dos professores não utiliza a calculadora nas suas aulas. A maioria dos professores inquiridos (cerca de 90 % em cada ciclo) declaram que poucas vezes ou nunca usam os materiais manipuláveis nas suas aulas e a sua utilização decresce à medida que se progride na escolaridade. As razões apontadas pelos professores para a sua não utilização prendem-se essencialmente com o número insuficiente de materiais na escola. Abrantes (2001) recomenda que a prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente os materiais manipuláveis.

Mais recentemente, foram realizados algumas investigações sobre as implicações dos materiais manipuláveis nas tarefas de sala de aula. Há a referir alguns desses estudos empíricos identificados: uns foram realizados com alunos: (Almiro, 2004; Velosa,2008; Caldeira, 2009a; Oliveira, 2010; Pinto, 2011); e três estudos foram realizados com professores: (Botas, 2008; Vale & Fonseca, 2010; Gomes, 2012).

Almiro (2004) realizou um estudo qualitativo com alunos do 8º ano, no tópico de Geometria – "Semelhança de triângulos", com o objetivo de compreender até que ponto é que a utilização de materiais manipuláveis e a tecnologia influenciam o contexto de aprendizagem e que constrangimentos trazem ao professor na condução de aulas que envolvem a sua utilização. A recolha de dados incidiu em entrevistas e questionários e na observação de aulas realizadas por si, enquanto investigador participante e por dois colegas que observavam as aulas e com os quais eram realizadas reflexões relacionadas com os sucessos e dificuldades evidenciados pelos alunos na realização das tarefas. Como conclusões, Almiro (2004), aponta um grande envolvimento e entusiasmo dos alunos na aprendizagem da Matemática, e refere os materiais manipuláveis como fomentadores de um contexto motivador para os alunos que pode ter contribuído positivamente para o modo como se envolveram nestas atividades: explorando situações, testando hipóteses e construindo argumentos que sustentassem o seu pensamento matemático. Contudo, o investigador denota falta de autonomia, persistência e método de trabalho por parte dos alunos. O investigador assume dificuldades na condução das aulas organizadas em pequenos grupos, como por exemplo em prestar um apoio eficaz e oportuno a todos os grupos, em escolher as melhores ajudas a prestar aos aluno ou em como conseguir apoiar os alunos mais calados. Outra dificuldade prendeu-se com a escolha das tarefas (tentando aferir se são ou não desafiantes), com a gestão do tempo necessário para a resolução das tarefas, com a constituição dos grupos de trabalho e com o barulho realizado pelos alunos. O investigador aconselha e frisa a importância da necessidade da realização de um maior número deste tipo de aulas.

Velosa (2008) realizou um estudo de natureza qualitativa, intitulado "A aprendizagem da geometria com recurso aos materiais manipuláveis no 7º ano de escolaridade". Neste trabalho a investigadora propunha-se compreender como é que os alunos aprendem os conceitos da Geometria do sétimo ano de escolaridade quando usam materiais manipuláveis no ensino-aprendizagem da Matemática. Aplicou o estudo na área da Geometria na unidade temática " Do Espaço ao Plano: Sólidos, Triângulos e Quadriláteros", em dois meses no terceiro período do ano letivo de 2005/2006. As tarefas propostas aos alunos nesta investigação, foram em número de dez e inserem-se no tema da Geometria, utilizando tarefas que recorrem a diferentes tipos de materiais manipuláveis: geoplano circular e quadrangular, régua, transferidor, compasso, esquadro, palhinhas de refresco, arroz, polidron, modelos de sólidos geométricos em madeira e em acrílico e espelhos. A investigadora concluiu que os alunos começam as tarefas pela manipulação dos materiais e à medida que os alunos formulam conjeturas e tentam explicar a sua validade recorrem aos materiais, ao mesmo tempo utilizam alguns processos de raciocínio. Segundo a investigadora o material manipulável utilizado em cada tarefa revelou-se fundamental na validação de algumas afirmações por parte dos alunos.

Caldeira (2009a) realizou um estudo no ensino pré-escolar intitulado "A importância dos materiais manipuláveis para uma aprendizagem significativa da matemática". Este trabalho de natureza qualitativa foi realizado por 14 alunos da formação inicial (professores e educadores) do ensino básico e infantil que tiveram preparação para a observação das aulas que eram dadas pelas educadoras das crianças. Estes alunos foram distribuídos por seis grupos de 2 ou 3 alunos que acompanharam turmas de seis escolas diferentes na área de Lisboa. As crianças pertenciam a pertenciam às salas dos 5 anos. As aulas foram observadas e filmadas pelos estudantes e foram realizadas entrevistas às educadoras. Como conclusão do seu estudo, Caldeira (2009) defende que os "materiais funcionam como mediadores, levando as crianças a construir mentalmente as representações abstratas dos conceitos que concretizam, num ambiente facilitador, em que as experiências e possibilidades permitem o seu desenvolvimento" (p.586), alertando contudo que a simples utilização destes materiais não produz aprendizagem. Segundo a autora os materiais ao fomentarem uma estratégia tentativa-erro, permitem ainda uma aprendizagem mais significativa da matemática pois facilitam a comunicação e a interação entre os alunos e os educadores e permitem ao professor atender às diferenças individuais de cada criança pois possibilitam a oportunidade deste observar o modo como os alunos entendem e pensam numa situação matemática. Como dificuldades, Caldeira (2009) aponta a gestão do tempo necessário para a criança levantar hipóteses, testá-las, errar e pensar sobre o erro; refere ainda e a insuficiente formação por parte dos educadores para compreender todas as potencialidades destes recursos, o que os leva a não os usar convenientemente na sua prática. Por isso a investigadora alerta para a importância de que na formação inicial e na formação contínua de professores haja uma mudança de paradigma que leve os professores e conhecer e a compreender a importância dos materiais manipuláveis como ferramenta que tem como finalidade "contribuir para a construção do conhecimento por parte do sujeito – a criança" (p.588).

Botas (2008) realizou uma investigação qualitativa num agrupamento de Queluz, procurando responder ao seguinte problema: "Num agrupamento de escolas do 1º ciclo, qual a utilização dos materiais didáticos em Matemática?". Esta investigação desenvolveu-se em duas escolas do 1º ciclo. A autora aplicou um questionário aos 53 professores dessas escolas com o objetivo de: (1) Conhecer a forma como os professores integram os materiais didáticos na planificação das suas aulas de

Matemática; (2) Analisar quais os materiais usados pelos professores na sua aula de Matemática; (3) Verificar de que forma os materiais são utilizados pelos docentes nas suas aulas de Matemática e qual o material mais utilizado pelos professores na aula de Matemática? e (4) Saber o que pensam os professores da utilização dos materiais didáticos na aula de Matemática e se está essa ideia relacionada com o que pensam sobre a Matemática? Da leitura e tratamento dos questionários realizados a investigadora concluiu que a maioria dos professores sabia da existência do material considerando, contudo, a sua quantidade era insuficiente e que o material existente é pouco usado, já que os professores recorrem com maior frequência aos seguintes materiais: lápis, papéis, caixas, mesas...próprio corpo; réguas, manual escolar. Os professores apresentam uma ideia de material didático associada à manipulação individual e que para além de auxiliar o aluno na aprendizagem age como elemento motivador. Os professores apresentam uma ideia da Matemática construtivista, que contribui para a formação geral do aluno e atribuem uma grande importância aos materiais didáticos pois consideram que melhoram a compreensão dos conteúdos, de forma lúdica e possibilitam ao aluno a construção do seu conhecimento.

Oliveira (2010) fez um estudo recente com alunos de 7º ano onde procurou conhecer, analisar e compreender as causas do insucesso na disciplina de Matemática na perspetiva da professora e dos alunos e, por outro, de que modo a utilização de recursos didáticos diversificados pode contribuir para a melhoria dos resultados dos alunos dessa turma, nesta disciplina. A investigadora concluiu que atividades realizadas com recurso a materiais manipuláveis tornaram as aulas mais entusiasmantes e motivadoras e a sua implementação teve reflexos relevantes para a aprendizagem dos alunos pois promove a comunicação matemática e é de extrema importância no suporte de muitas tarefas e atividades de investigação.

Gomes (2012) realizou um estudo sobre o conhecimento que futuros professores têm sobre as isomerias, com alunas de uma turma do 3.º ano da Licenciatura em Educação Básica, procurando identificar e descrever as dificuldades/erros que os futuros professores têm/fazem em relação às transformações geométricas, particularmente em relação às isometrias: rotação, reflexão e translação. Parece-nos pertinente colocar aqui as conclusões deste estudo, porque apesar de a investigadora não ter utilizado materiais manipuláveis, aborda a mesma temática deste trabalho e obteve resultados que são ao "mesmo tempo surpreendentes e preocupantes" (Gomes, 2012, p.241). Para a recolha de dados foi elaborado um teste com questões retiradas de manuais escolares do 4.º ano de escolaridade, ao qual responderam 64 alunas. A investigadora concluiu que estes futuros professores têm muitas dificuldades em todas as isometrias estudadas, o que indicia não estarem preparados para ensinar transformações geométricas.

Em contraponto com esta investigação, Vale e Fonseca (2010) realizaram igualmente um estudo exploratório com futuros professores. Nesta proposta analisaram uma sequência didática para a aprendizagem das transformações geométricas onde os padrões foram utilizados para ajudar a compreender ideias geométricas relacionadas com as transformações geométricas. Como conclusões, estas autoras referem que estes futuros professores demonstraram boas capacidades de observar e perceber padrões e em formular e testar conjeturas. Os participantes neste estudo revelaram conhecimento do tópico matemático e da didática sobre transformações geométricas e interesse em explorar transformações geométricas num contexto de padrões de papel de parede e frisos construídos por eles próprios. Contudo, também mostraram dificuldades na visualização, na justificação e na construção de provas das suas próprias conjeturas.

Um estudo realizado por Pinto (2011) numa turma de 6º ano de escolaridade pretendeu estudar o desenvolvimento do pensamento geométrico através da implementação de um ambiente de ensino para as isometrias baseado nas fases de aprendizagem de van Hiele. A investigadora verificou que, antes da implementação do estudo, a maioria dos alunos situavam-se no nível 1 de van Hiele e que, no final da implementação da experiência didática, havia um predomínio do nível 2. Registando-se, pontualmente, evidências de um pensamento de nível 3. Neste trabalho a investigadora aponta também o uso de materiais e de *software* de geometria dinâmica como recursos úteis e adequados ao estudo das isometrias.

Em síntese, verificamos que pela revisão de literatura que fizemos e pelos estudos empíricos que lemos, que os vários investigadores apontam para que os materiais manipuláveis sejam facilitadores na aprendizagem da matemática. Contudo, há várias questões à volta da importância e das implicações dos materiais manipuláveis na prática letiva dos docentes e na aprendizagem matemática que, por vezes, são contraditórias, e dependem de diferentes fatores como (1) a forma como os professores os apresentam e promovem aos alunos no desenvolvimento das atividades; (2) o conhecimento que os professores têm da utilização destas ferramentas e como podem potenciar a aprendizagem matemática pela utilização destes objetos; e (3) a forma como os materiais são utilizados pelos alunos na exploração das tarefas, no seu envolvimento na aula e na aprendizagem matemática que daí pode advir.

CAPÍTULO III. METODOLOGIA

Neste capítulo iremos centrar-nos na metodologia adotada na realização deste estudo bem como na descrição de todos os procedimentos a que recorremos para a sua implementação e para a recolha e análise dos dados.

3.1. Opções metodológicas

A metodologia utilizada num trabalho de investigação depende muito do problema e das questões da investigação, bem como da forma como o investigador se relaciona com o campo onde se desenrolam os acontecimentos.

A nossa investigação tem como objetivo refletir sobre a pertinência da utilização dos materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem das isometrias, procurando compreender se estes materiais contribuem para uma apropriação mais significativa dos conceitos geométricos em estudo, por parte dos alunos.

Escolhemos assim fazer uma investigação interpretativa com abordagem qualitativa porque pretendemos descrever, analisar e compreender como é que um conjunto de alunos reage e interage com os materiais manipuláveis neste tópico da geometria. Neste sentido, os processos de observar, registar, analisar, refletir, dialogar e repensar são partes essenciais desta investigação que pensamos ser a mais adequada, uma vez que o objetivo deste trabalho é "resolver" o problema, procurando descobrir conhecimentos que conduzam à sua compreensão ou explicação (vale, 2004). Nesta continuidade, o *design* da nossa investigação será um estudo de caso, que se constitui na abordagem mais utilizada em Educação Matemática para investigar questões de aprendizagem dos alunos, bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores (Ponte, 2006). Este autor sublinha que este tipo de investigação visa compreender, de forma particular e em profundidade, o "como" e os "porquês" de uma situação específica que se supõe ser única ou especial. O investigador, ao procurar descobrir as particularidades e especificidades da situação em estudo contribui para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse.

De acordo Ponte (2006), um estudo de caso pode seguir uma de duas perspetivas essenciais: (a) uma perspetiva interpretativa que, do ponto de vista dos participantes, procura compreender como é o mundo e (b) uma perspetiva pragmática, que do ponto de vista do investigador, pretende proporcionar uma perspetiva global do objeto de estudo.

Neste seguimento, um estudo de caso desenrola-se em contexto real e baseia-se fortemente no trabalho de campo ou na análise documental de dados que o investigador recolhe de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos (Yin, 1984 citado em Ponte, 2006).

Como forma de orientar a investigação, quer na fase de recolha de dados, quer na fase de análise é importante procurar responder a algumas questões: Que coisas observar? Que dados colher? Que perguntas fazer? Que categorias construir? (Ponte, 2006) Estas questões vão orientando o trabalho de campo e mostrando ao investigador como deve agir, o que deve procurar, organizando o trabalho e definindo uma linha de ação.

Os dados recolhidos devem, depois, ser organizados, podendo ser dados a conhecer de diversas maneiras, incluindo textos escritos, comunicações orais ou registos em vídeo. Ponte (2006) frisa que a recolha dos dados, a sua apresentação e análise têm sempre um forte cunho descritivo que se pretende factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa, do objeto em estudo. Contudo, paralelamente o investigador deve procurar um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. A redação do trabalho, regra geral, assume a forma de uma narrativa que pretende contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja, tanto quanto possível, interessante e elucidativa (Stake, 1988 citado em Ponte, 2006). Nesta narrativa é importante salvaguardar para além da apresentação dos dados, a descrição metodológica, sem os quais não se pode falar de relatos de trabalhos científicos (Ponte, 2006).

No que concerne à validade deste tipo de investigação, Miles e Huberman (1994) frisam que quando efetuamos uma investigação, há necessidade de questionar a qualidade do estudo e indagar da sua validade. A validade de uma investigação deve demonstrar o seu verdadeiro valor, proporcionar as bases para aplicá-la, e permitir que possam ser feitos julgamentos externos sobre a consistência dos seus procedimentos e a neutralidade dos seus resultados ou decisões.

Neste sentido, Ponte (2006) assegura que uma das condições mais importantes para se poder formular um juízo acerca da credibilidade de um estudo é a possibilidade de verificação da evidência obtida pelos investigadores.

Miles e Huberman (1994) descrevem algumas estratégias que permitem assegurar a validade de um estudo: (1) envolvimento prolongado — o investigador deve estar no terreno tempo suficiente para que sejam minimizados ou dissipados condicionantes que podem distorcer o estudo: o seu impacto na ação, as suas ideias preconcebidas ou o efeito de acontecimentos raros; (2) observação persistente — em paralelo com um processo de análise constante vai permitir interpretações de diferentes modos; (3) materiais adequados — uma vez que todos os dados devem ser interpretados em termos do seu contexto, é extremamente importante que sejam reunidos para dar uma visão holística do contexto; (4) revisão pelos pares —é importante que o investigador saia do contexto e se aconselhe com outros profissionais capacitados de forma a rever as suas perceções e análise; (5) confirmação pelos participantes — confrontar os participantes com o que fizeram ou disseram é um mecanismo a ter em conta pois desta forma serão clarificados aspetos que tenham sido mal compreendidos ou estejam confusos no entender do investigador; (6) jornal reflexivo; e (7) triangulação — forma combinada de múltiplos métodos de recolha de dados, muitas vezes recorrendo a dados de natureza quantitativa.

Contudo, muitas vezes o estudo de caso é alvo de críticas por ser uma metodologia que não permite a generalização, contudo Vale (2004) explica que esta análise não tem fundamento pois o objetivo deste tipo de investigação é a de procurar produzir conhecimento sobre o que há de único no objeto em estudo e não fazer generalizações.

Neste seguimento, o nosso trabalho constitui-se num estudo de caso que é uma investigação que se realiza em contexto natural, pois: i) o investigador é a principal fonte de recolha dos dados; ii) os dados são recolhidos de forma descritiva e os resultados serão apresentados da mesma forma; iii) a observação centra-se mais nos processos do que nos produtos; iv) a análise dos dados vai realizar-se de forma indutiva; V) o investigador não se limita a observar comportamentos pois preocupa-se principalmente com os significados que os sujeitos dão às suas ações e às dos outros (Bogdan & Biklen, 1994).

Como o propósito dos estudos de caso é a "compreensão" (Ponte, 2006) de uma determinada realidade e como o nosso objetivo é compreender como é que num contexto em particular, duas díades utilizam os materiais num tópico da geometria, parece-nos uma escolha concertada optar por esta metodologia para a realização desta investigação.

3.2. Os participantes no estudo

3.2.1. Caracterização da escola

A escola onde o estudo se realiza fica situada numa zona rural, pertencente ao distrito do Porto. É uma escola, sede de agrupamento, que tem alunos do segundo e terceiro ciclos, Cursos de Educação e Formação e Profissionais, num total de 1129 alunos. No segundo ciclo, distribuídos por cinco turmas no quinto ano e seis turmas no sexto, estão inscritos 390 alunos.

No segundo ciclo, na área da matemática, o corpo docente é estável, sendo constituído por seis professores de matemática e ciências. Três professores são do quadro de escola (incluindo a investigadora), uma professora é do quadro de zona (e leciona na escola há seis anos) e os outros dois professores são contratados, com renovações consecutivas nos últimos três anos letivos.

A escola tem desenvolvido nos últimos anos vários projetos que visam melhorar a qualidade das aprendizagens dos alunos, tendo como focos de intervenção as disciplinas de matemática e língua portuguesa. É, por isso, uma escola dinâmica que investe no trabalho colaborativo, e desenvolve várias ações de formação no sentido de promover a reflexão entre pares sobre as dinâmicas de sala de aula, procurando capacitar todos os docentes de ferramentas e metodologias diversificadas.

Em relação às condições físicas da escola, é de referir que possui um conjunto muito completo de materiais manipuláveis, que se encontram numa sala própria – matemateca.

3.2.2. A professora

A professora que também é a investigadora, é licenciada no segundo ciclo no Ensino da Matemática e das Ciências da Natureza e leciona neste nível de escolaridade há dezassete anos. Tem 39 anos e percorreu várias escolas do país, desde o Algarve ao Norte. Nos últimos anos tem lecionado só a disciplina de matemática no 5º e 6ºanos, tendo no presente ano três turmas – duas do sexto ano e uma do quinto. É professora do quadro de agrupamento e leciona nesta escola há seis anos onde tem exercido cargos de coordenação de Projetos que visam a melhoria das aprendizagens dos alunos. Foi também coordenadora do Plano de apoio à Matemática (durante dois anos) e coordenadora do Novo Programa de Matemática no segundo ciclo.

Leciona a disciplina de Matemática à turma onde o estudo vai ser implementado desde o início do ano letivo.

3.2.3. A turma

A turma é constituída por vinte e dois alunos com idades compreendidas entre os 11-12 anos de idade (15 rapazes e 7 raparigas). Os alunos conhecem-se bem pois a turma tem esta formação desde o quinto ano, mas são oriundos de diferentes escolas do 1º ciclo do agrupamento. É uma turma reduzida porque tinha um aluno do ensino especial que entretanto foi transferido. À exceção de três alunos que têm algumas dificuldades, especialmente a matemática, a turma revela aproveitamento muito satisfatório nesta área disciplinar. Os alunos têm um bom relacionamento entre si e na sala de aula também revelam bom comportamento, pois na sua maioria são interessados, empenhados e participativos nas tarefas apresentadas pelo professor, revelando autonomia, organização e responsabilidade.

Escolhemos esta turma para implementar o estudo porque as outras duas turmas da investigadora integram um projeto da escola – projeto fénix - que prevê a separação temporária/ mobilidade dos alunos para trabalhar com outro professor, noutra sala de aula, de acordo com o seu ritmo de trabalho (dificuldades ou potencialidades). Este facto poderia vir a impedir-nos a recolha de dados. Por isso escolhemos a única turma da investigadora que não pertencia ao citado projeto.

3.2.4. Os casos

Dentro da turma escolhemos quatro díades. Os critérios para a seleção dos alunos foram essencialmente a sua boa capacidade de comunicação (oral e escrita) pois, desta forma, podem contribuir, de uma maneira mais eficaz, para melhor dar a conhecer a sua forma de pensar e aprender matemática. Procuramos também abranger raparigas e rapazes, com diferentes ritmos de trabalho e com capacidades diferenciadas nesta área disciplinar. Fizemos a recolha de dados em quatro díades, contudo, para análise, acabamos por focar o estudo apenas em duas díades que se revelaram melhores informantes da temática em estudo. Acresce ainda que seria demasiado extenso e moroso fazer a análise do trabalho desenvolvido por todos os alunos. Mais à frente, no capítulo 5, caracterizaremos estas díades e a sua dinâmica de trabalho, bem como a sua atitude com os materiais manipuláveis e o contributo destes no seu desempenho nas tarefas matemáticas.

Assim, os dois casos neste estudo foram os casos AB constituído pela díade formada por dois alunos e o caso CD constituído pela díade formada por duas alunas.

3.3. Procedimentos do estudo

Este estudo decorreu entre 14 de Março e 10 de Maio de 2012 com uma turma de 6º ano de escolaridade, durante a lecionação da unidade didática referente ao tema "Reflexões, rotações e translações".

Os alunos participantes neste estudo integram uma turma da investigadora e a recolha de dados realizou-se durante as suas aulas pois, como já referimos, esta investigação decorre em ambiente natural. A preparação e desenvolvimento do estudo desenrolou-se segundo algumas etapas: (1) definição do problema e das questões de investigação pois este foi sempre o fio condutor que orientou toda o trabalho; (2) definição do tópico do programa onde iríamos implementar o estudo; (3) construção de um conjunto de tarefas para trabalhar as transformações geométricas; (4) seleção dos materiais manipuláveis a utilizar.

O estudo decorreu durante todo o tema Reflexões, rotações e translações. O modo como decorreu a experiência didática está descrito no capítulo seguinte. De modo geral utilizou-se um procedimento idêntico para cada uma das transformações estudadas, que foram acompanhadas pela realização de questionários e entrevistas.

Para a recolha de dados fizemo-nos acompanhar de um bloco de notas onde fomos fazendo o registo pormenorizado (quanto possível) dos comentários e intervenções dos alunos durante as aulas. Realizamos cinco questionários (anexo 1): um antes do início do estudo (Questionário 1- Q_1) para caracterizar os alunos e a sua relação com a matemática e mais quatro questionários no final de cada isometria dada: no final da reflexão (Questionário 2- Q_2), no final das tarefas da rotação (Questionário 3- Q_3), depois da translação (Questionário 4- Q_4) e no final, depois da simetria, (Questionário 5- Q_5).

Depois dos questionários Q_2, Q_3, Q_4, e Q_5 realizamos sempre uma entrevista que incidiam sobre a utilização e utilidade dos materiais manipuláveis na realização de cada tarefa (guiões das entrevistas – anexo 2). Na Tabela 1 apresentamos uma calendarização das várias fases do estudo e das ações desenvolvidas ao longo do trabalho.

Tabela 1. Calendarização do estudo

Fases do estudo	**Ações**	**Calendarização**
Preparação	Definição do objetivo do estudo Recolha bibliográfica Seleção das tarefas e dos materiais Planificação da unidade Pedido de autorização aos encarregados de educação e à direção da escola para implementação do estudo	outubro a fevereiro de 2012
Implementação da proposta pedagógica	Questionário Q_1 Desenvolvimento das tarefas: Reflexão T_1, T_2, T_3, T_4 Questionário Q_2 Entrevista E_1 Rotação T_5, T_6 Questionário Q_3 Entrevista E_2 Translação T_7, T_8, T_9 Questionário Q_4 Entrevista E_3 Reflexão deslizante T_{10}, T_{11} Tarefas de consolidação T_{12}, T_{13}, T_{14} Composição de isometrias T_{15} Jogo T_{16} Simetria T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24} Questionário Q_5 Entrevista E_4 Gravação áudio das sessões Visualização das gravações Análise de documentos	março a maio de 2012
Redação do relatório	Revisão final de literatura Análise e tratamento dos dados Narrativa	junho a dezembro de 2012

As aulas e as entrevistas foram áudio gravadas. Durante as aulas colocamos um gravador em cima da mesa de cada díade em estudo. Para além disso, a investigadora ía-se deslocando pela sala com um gravador que ligava sempre que se dirigia às díades em estudo, com o intuito de ir registando ocorrências mais significativas para posterior análise.

Contudo nem sempre foi fácil coordenar os papéis de professora e investigadora. Quando não conseguíamos fazer o registo das observações realizadas durante as aulas, fazíamo-lo no final da mesma enquanto ainda tínhamos em memória como os acontecimentos se tinham desenrolado.

No términus das aulas ouvíamos e transcrevíamos as gravações e fazíamos uma análise preliminar das tarefas digitalizando as construções geométricas realizadas pelos alunos em estudo.

Frisamos ainda a grande disponibilidade e vontade de colaboração dos alunos neste trabalho. Como sabiam que todas as terças-feiras a professora se encontrava na biblioteca da escola, por sua iniciativa ou a pedido da professora, encontravam-se nesses momentos para clarificar pormenores relacionadas com o trabalho realizado (vinham sempre em díades).

Ao longo das aulas todos os alunos da turma resolviam cada uma das tarefas com o seu colega, discutindo os procedimentos que consideram necessários. Cada aluno tem uma ficha com a tarefa. Em algumas tarefas (por exemplo na T_3,T_5, T_9) cada aluno tem de construir uma figura que pode ser diferente e realizar determinada transformação geométrica sobre ela (que é a mesma do seu colega). Isto faz com que o trabalho da díade seja parcialmente diferente, no entanto, no final, as conclusões são sempre discutidas e é registada a opinião do par.

As tarefas foram implementadas ao longo de treze sessões de noventa minutos. Optámos por construir e adaptar um conjunto de tarefas sobre o tópico “Reflexões, rotações e translações” que permitissem trabalhar esta unidade de forma consistente, com o recurso a diversos materiais manipuláveis: folha de acetato, papel vegetal, papel quadriculado, papel ponteado, mira, geoplano, espelho.

De forma a sintetizar as tarefas realizadas em cada subtópico do capítulo das isometrias e simetrias bem como os materiais utilizados em cada uma delas apresentamos a seguinte Tabela 2.

Tabela 2. Calendarização das tarefas

Tarefa		Data	Materiais	Tópico
T_0	O mira	14 de março	Mira	
T_1	A transformação da flor	19 de março	Acetato	
T_2	Figuras no geoplano	21 de março 22 de março	Geoplano	Reflexão
T_3	A reflexão dos polígonos	11 de abril	Papel quadriculado Polígonos em cartolina	
T_4	Triângulos ao espelho		Espelho	
T_5	À roda com as figuras	12 de abril 16 de Abril	Papel vegetal	Rotação
T_6	À roda com os polígonos		Papel quadriculado Polígonos em cartolina	
T_7	Retas e mais retas	18 de abril		
T_8	O deslize do trapézio	18 de abril	Papel vegetal ou acetato	
T_9	Polígonos em movimento definido	18 de abril	Papel quadriculado Papel quadriculado Polígonos em cartolina	Translação
T_{10}	O voo da borboleta	19 de abril	Acetato	
T_{11}	Duas isometrias numa só?	19 de abril	Papel quadriculado	Reflexão deslizante
T_{12}	As voltas do passarinho	23 de abril	Acetato	Tarefas de consolidação de todas as isometrias
T_{13}	O trapézio	23 de abril	Acetato	
T_{14}	Transformações no geoplano	26 de abril	Geoplano	
T_{15}	Composição de isometrias	30 de abril	Papel quadriculado	Composição de isometrias
T_{16}	Jogo: rodar, refletir ou deslizar?	2 de maio -Estudo Acompanhado	Blocos padrão, cartões	Todas as isometrias
T_{17}	O mata borrão	2 de maio	Papel, guache	
T_{18}	À descoberta das simetrias	2 de maio	Mira	
T_{19}	Simetrias de reflexão de um polígono regular	3 de maio		Simetrias
T_{20}	Simetrias de rotação de um polígono regular	3 de Maio	Acetato Mira	
T_{21}	Simetrias de um triângulo	7 de Maio		
T_{22}	E tu? Tens simetria?	7 de maio	Computador	
T_{23}	Dobragens	9 de maio	Dobragens	
T_{24}	À roda com as rosáceas	9/10 de maio	Papel vegetal e papel quadriculado	

Começamos a parte prática do estudo no final do segundo período com aplicação das tarefas relativas à reflexão porque estava de acordo com a planificação de ano.

Para o nosso estudo, consideramos que foi pertinente porque a pausa escolar correspondente à Páscoa permitiu-nos refletir sobre a forma como o trabalho está a ser implementado e como os dados estão a ser recolhidos. Bogdan e Biklen (1994) apoiam esta ideia quando mencionam que apesar de a recolha de dados ser uma fase diferente da que diz respeito à sua análise, aconselham a que concomitantemente se faça alguma análise dos dados que vão sendo recolhidos, porque esta ação permite orientar a investigação e evitar o risco de haver dados que não estejam suficientemente completos.

No capítulo IV, relataremos esta experiência didática e faremos uma apresentação das diferentes tarefas, da forma como foram implementadas e das expectativas que o investigador tem sobre as aprendizagens que os alunos poderão realizar.

3.4. A recolha de dados

Este estudo enquadra-se, como já foi referido, num paradigma qualitativo e interpretativo. Por isso os dados são eminentemente descritivos relativamente ao desempenho que os alunos revelam na realização das tarefas, mas também no que concerne à relação que manifestam ter com o material manipulável e em que medida este se constitui um elemento a considerar no ensino e aprendizagem da matemática.

Neste sentido, os dados são os materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar e são estes os elementos que formam a base da análise (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149).

A principal tarefa do investigador é a de procurar explicar como as pessoas nos seus meios naturais e em situações do dia-a-dia compreendem, explicam e agem. Neste sentido, a recolha de dados é uma fase fundamental de qualquer investigação e há técnicas e instrumentos que contribuem para essa recolha (Vale, 2004).

Nesta investigação as fontes para recolha de dados foram obtidos em contexto natural de sala de aula, através de observações, entrevistas, questionários, gravações áudio, registo de fotografias e documentos (registos dos alunos e resoluções de fichas de trabalho).

A nossa principal fonte de recolha de dados são as nossas observações durante a realização das tarefas com materiais manipuláveis. As produções realizadas pelos alunos nas fichas com as tarefas também serão um importante instrumento de recolha de dados. Utilizamos ainda questionários e entrevistas. Um questionário antes da implementação do estudo para conhecermos melhor os alunos e a sua visão da matemática e depois fizemos um questionário no final de cada subtópico dado (reflexões, rotações, translações e simetrias) o que perfez um total de 5 questionários (em anexo). Como o nível etário dos alunos é baixo (onze anos) tivemos necessidade de realizar várias entrevistas. Assim, no final de cada conjunto de tarefas relativas a cada um dos subtópicos, depois de preenchido o questionário anteriormente referido, realizávamos uma entrevista coletiva (4 no total – em anexo): depois de realizadas as tarefas da reflexão (Entrevista 1 - E_1), da rotação (Entrevista 2 – E_2), da translação (Entrevista 3 – E_3) e depois da simetria (Entrevista 4 – E_4) que visavam compreender como é que os materiais manipuláveis tinham sido usados durante a tarefa e se a sua utilização tinha ajudado ou dificultado o trabalho (ou se tinham sido menosprezados pelos alunos), esclarecendo ainda pormenores relacionados com as respostas dadas nos questionários.

Observação

A observação é a melhor técnica de recolha de dados qualitativos (Bogdan e Biklen, 1994) porque o investigador é um bom conhecedor da realidade em estudo. A observação direta dos comportamentos e atitudes dos alunos permite-lhe comparar em primeira mão aquilo que os alunos dizem, com o que não dizem, com aquilo que fazem (Vale, 2004).

Sublinhamos que o investigador é o professor da turma, logo é um observador participante que enquanto dá a aula vai observando e registando os dados num bloco de notas. Tivemos o cuidado de reproduzir de forma pormenorizada e descritiva as intervenções, observações e interjeições dos alunos com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade, unicidade e, como já referimos, em contexto natural. Bogdan e Biklen (1994) também recomendam a utilização do bloco de notas referindo que este se constitui num dos dados mais importantes da pesquisa qualitativa, onde o investigador deverá fazer o registo das ocorrências: intervenções, comentários, hesitações, comportamentos que aconteçam na presença do investigador/ professor e que possam ser significativas para a interpretação da realidade em estudo. Bogdan e Biklen (1994) reforçam que as notas de campo devem contemplar objetivamente as observações do que ocorreu no campo, não devendo assentar em suposições que o investigador faz acerca do meio.

Ao mesmo tempo que fazíamos a descrição das ocorrências da aula fomos fazendo uma análise meditativa dos dados recolhidos, conforme sugerem Bogdan e Biklen (1994). Estes autores apontam que a recolha de dados se deve desenvolver em duas fases paralelas: uma parte mais descritiva e outra mais reflexiva. A parte mais descritiva é um registo pormenorizado do que ocorreu durante a observação e deve incluir: i)a descrição dos participantes; ii) a reconstrução dos diálogos, com indicação das próprias palavras dos participantes, de gestos, de entoações, das indecisões: iii) a descrição dos locais; iV) a descrição de algum acontecimento especial que tenha ocorrido, com indicação dos intervenientes; v) a descrição das atividades, com indicação dos comportamentos dos participantes que estão a ser observados e da sequência em que ocorrem: vi) os comportamentos do observador, já que sendo o principal instrumento de recolha de dados, deve indicar as suas atitudes e as suas conversas com os participantes. A parte reflexiva deve incluir as observações pessoais do investigador, ocorridas durante a recolha de dados, as suas especulações, sentimentos, ideias, problemas e dúvidas que possam surgir, surpresas e deceções (Bogdan e Biklen, 1994).

Ao longo da implementação das tarefas procuramos fazer um registo das observações que fosse objetivo e não tivesse interferências das expectativas que o professor tem do desempenho dos alunos. Procuramos ainda agir de forma que as nossas intervenções e orientações não interferissem na realidade em estudo. Bogdan e Biklen (1994) também alertam para o que denominam de" efeito do investigador", frisando que o investigador deve agir de forma que “ as atividades que ocorrem na sua presença não difiram significativamente daquilo que se passa na sua ausência” (p.68).

Assim, a nossa observação focou-se na forma como duas díades realizaram as tarefas propostas e na maneira como os materiais manipuláveis foram utilizados ao longo das sessões. Procuramos fazer uma observação pormenorizada das dinâmicas instaladas entre as díadas, dos seus diálogos e da maneira como interagem com o material, procurando registar detalhadamente todas as ocorrências.

Questionários

Os questionários são um método de recolha de dados que proporcionam respostas diretas e a recolha de informações, quer factuais, quer de atitudes, permitindo ainda classificar as respostas com facilidade (Vale, 2004).

Os questionários surgem, assim, como alternativa e como suporte à informação que, a seguir procuramos recolher nas entrevistas semi-estruturadas.

O nosso objetivo com a realização dos questionários foi o de recolher informação sobre a opinião dos participantes relativamente à utilização dos materiais manipuláveis nas diferentes isometrias, procurando saber se tinham gostado de trabalhar com o material concreto, se o consideravam um apoio, ou não, na realização das tarefas e na descoberta do conhecimento matemático. Estas noções são, a seguir clarificadas, sob o ponto de vista dos participantes, quando realizamos as entrevistas.

Realizamos dois tipos de questionário. O Questionário 1 - Q_1, realizado antes do estudo, permitiu-nos conhecer quais são as conceções dos alunos acerca das formas como se deve ensinar e aprender matemática e qual era o seu conhecimento da utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática. Depois realizamos mais quatro questionários: questionário2 – Q_2, questionário3 - Q_3, questionário 4 - Q_4 e questionário 5 - Q_5. Esta forma de recolha de dados foi realizada no final de cada ronda de tarefas relacionadas com cada um dos subtópicos: depois da reflexão Q_2, depois da rotação Q_3, depois da translação Q_4 e depois da simetria Q_5 (anexo 1). Estes questionários tiveram como objetivos conhecer quais foram os materiais manipuláveis com que os alunos mais gostaram de trabalhar e qual consideravam mais útil e importante (ou menos) na apropriação do conhecimento em causa.

Entrevistas

A finalidade das entrevistas é a de obter informação ou opinião do participante, procurando ver, numa situação “cara-a-cara”, qual é a perspetiva do entrevistado sobre determinado assunto e colher informações que não se podem observar diretamente, como sejam sentimentos, pensamentos, intenções e factos passados (Vale, 2004).

A entrevista é um instrumento que tem muita importância num estudo de caso pois através dela conseguimos perceber ”o porquê das coisas”, a forma como os alunos interpretam as suas ações e vivências ao longo das aulas com materiais manipuláveis, uma vez que a “entrevista é utilizada para recolher dados qualitativos na linguagem própria do sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo” (Bogdan e Biklen, 1994).

Esta técnica de recolha de dados permite-nos clarificar e ajudar a interpretar o sentido das opiniões dos entrevistados, bem como as suas atitudes e conceções. A escolha cuidadosa das questões é a decisão mais importante que o investigador tem de tomar durante as entrevistas pois será através delas que vai obter as respostas. De forma a facilitar a comunicação, o investigador deve adotar uma linguagem de proximidade e manter-se natural e informal. Deve ainda começar a entrevista por questões gerais e paulatinamente introduzir questões mais específicas (Vale,2004). Contudo, esta autora lembra que o sucesso da entrevista depende muito da perspicácia do entrevistador, não havendo nenhum método eficaz para ensinar alguém a fazer uma entrevista.

Assim, no nosso estudo, no final da aplicação das tarefas respeitantes a cada um destes subtópicos – reflexão, rotação, translação, e simetria e depois de preenchido um questionário realizamos sempre uma entrevista coletiva semiestruturada, 4 entrevistas no total (anexo 2), no sentido de compreender: (i) quais as dificuldades que os alunos sentiram na utilização do material, (ii) se este tinha contribuído para a realização da tarefa, (iii) e com que material mais tinham gostado de trabalhar. A metodologia de utilizarmos a entrevista depois de cada questionário permitiu-nos clarificar as ideias e opiniões dos entrevistados, para além de, como refere Vale (2004) quando utilizadas em conjugação, as entrevistas e os questionários, permitem a validação das respostas e contribuem para a sua melhor interpretação, assim como dão a possibilidade ao investigador de clarificar determinados aspetos ligados com os participantes.

Na realização das entrevistas tivemos sempre presentes os objetivos da investigação. Optamos por realizar uma entrevista menos estruturada porque nos permite obter uma compreensão geral das perspetivas que os alunos têm sobre o tópico em estudo, tivemos ainda o cuidado de evitar que dessem respostas curtas, procurando que desenvolvessem os seus pontos de vista e explicassem o seu modo de pensar e agir com os materiais manipuláveis durante a exploração das tarefas. Bogdan e Biklen (1994) corroboram com esta perspetiva defendendo que "as entrevistas, devem evitar perguntas que possam ser respondidas "sim" e "não", uma vez que os pormenores e detalhes são revelados a partir de perguntas que exigem exploração" (p. 136).

Estas entrevistas (cinco no total) foram sempre áudio-gravadas e transcritas. Voltamos a referir que para além de realizarmos estas entrevistas no final de cada subtópico, todas as terças feiras, à tarde, alguns alunos (voluntariamente ou convidados pela professora) encontravam-se com a investigadora na biblioteca da escola e, de uma forma informal, esclarecíamos alguns pormenores relacionados com o seu desempenho na realização das tarefas e de que forma os materiais manipuláveis utilizados tinham contribuído para a construção do conhecimento matemático e para o próprio ambiente de sala de aula. Biggs (1986 citado em Bogdan e Biklen, 1994) apoia esta abordagem aquando da entrevista uma vez que defende que os indivíduos deverem estar à vontade e falarem livremente dos seus pontos de vista.

Gravações áudio e registos fotográficos

As gravações dos vários momentos da aula são importantes porque são uma forma de complementar as observações realizadas. Ao ouvirmos as gravações e fazermos as suas transcrições registamos os diálogos e os comentários dos alunos e professor, mas também as interjeições e pausas que os alunos fazem. É a interpretação reflexiva destes momentos (verbalizados, mas também dos silêncios) que nos ajudam a descobrir "os quês e os porquês" das respostas dos alunos (Bogdan e Biklen, 1994). Para gravarmos a aula colocamos um gravador na mesa de cada díade. Nas primeiras aulas este instrumento pode ter condicionado algumas atitudes dos alunos, no entanto este efeito foi-se atenuando, pois a presença do gravador foi-se tornando familiar e foi sendo menosprezado, sendo que na segunda aula os alunos já apresentavam um comportamento absolutamente normalizado. Bogdan e Biklen (1994) corroboram que as pessoas tendem a acostumar-se e a ficar indiferentes à presença das máquinas. Paralelamente a investigadora muniu-se de outro gravador. A professora ia-se deslocando pela sala e sempre que lhe parecia mais pertinente abordava uma das díades em estudo e questionava-os sobre a forma como tinham resolvido a tarefa, as dúvidas que estavam a sentir, as conclusões a que tinham chegado e se o material manipulável que estavam a usar estava a ser importante.

No final da aula a professora transcrevia as gravações focando-se nos episódios que lhe pareciam mais pertinentes para responder ao problema em estudo.

Também foram realizados registos fotográficos que contribuíram para mostrar como os diferentes materiais manipuláveis foram usados pelos alunos durante a realização das tarefas.

Documentos

Os documentos são também uma fonte de evidência num estudo qualitativo e abarcam tudo o que existe antes e durante a investigação, incluindo relatórios, trabalhos de arte, fotografias, "memos", registos, transcrições, jornais, brochuras, agendas, notas, gravações em vídeo ou audio, notas dos alunos, discursos, etc (Vale, 2004).

Para o nosso estudo os documentos foram uma fonte muito importante de recolha de dados. É de salientar que todas as tarefas foram realizadas numa ficha de trabalho que o investigador recolheu no final da aula. Nestas tarefas estava sempre presente uma pergunta que pedia aos alunos para explicarem o procedimento realizado e/ou retirarem as conclusões matemáticas resultantes de cada tarefa. Estes registos permitiram-nos reunir um conjunto de dados que nos ajudaram a complementar e a enriquecer as evidências deste trabalho. De realçar que os alunos são muito participativos e gostam de fundamentar as suas opções: procuram completar as respostas dadas, descrevem todos os passos que vão realizando e explicam como chegaram aos resultados e quais as estratégias usadas. Deste modo, as tarefas (anexo 3), constituem o meio principal de recolha de dados, que serão analisadas, em pormenor, no Capítulo IV. Estas resultam da recolha, adaptação ou construção de tarefas no âmbito das isometrias, tendo todas sido validades por um conjunto de especialistas.

Para além das tarefas, outros documentos considerados foram os registos biográficos dos alunos que ajudaram à sua caracterização. Outro elemento de recolha, para além das notas observacionais, foi todo o tipo de registos escritos, efetuados durante o estudo de natureza organizacional e metodológica.

Em conclusão, neste estudo, utilizamos várias técnicas de recolha de dados que sintetizamos na Tabela 3.

Tabela 3. Descrição dos métodos/instrumentos de recolha de dados

Métodos de recolha dos dados	Descrição
Observação	A professora investigadora desempenhou um papel de observador participante. Com recurso a um bloco de notas durante e imediatamente após as sessões registou todas as ocorrências que íam de encontro ao problema em estudo.
Questionário	Efetuamos 5 questionários que nos permitiram perceber qual é a relação que os alunos estabeleceram com a manipulação dos materiais e em que medida os consideraram relevantes na realização da tarefa e na descoberta do conhecimento matemático em causa.
Entrevista	Ao longo do trabalho realizamos quatro entrevistas semiestruturadas coletivas, no final de cada subtópico para percebermos e esclarecermos “olhos nos olhos” qual o raciocínio realizado pelos alunos e em que medida os materiais tinham sido utilizados. Paralelamente, sempre que era necessário, entrevistamos as díades separadamente.
Gravação áudio e registos fotográficos	As gravações (das sessões e das entrevistas) foram importantes para complementar aspetos relacionados com as observações das aulas.
Documentos	As tarefas, propostas nas fichas de trabalho como tinham sempre questões para explicarem o processo realizado e as conclusões retiradas foram uma importante fonte de recolha de dados, bem como os registos biográficos e registos escritos variados.

3.5. A análise dos dados

Bogdan e Biklen (1994) definem a análise de dados como um “processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou” (p.205). Analisar é assim um processo de estabelecer ordem, estrutura e significado na grande massa de dados recolhidos, o que vai para além da pura descrição. A análise deve processar-se de modo cuidadoso e sistemático, para identificar fatores chave e relações entre eles, procurando perceber como as coisas funcionam. Quando estamos a realizar a análise dos dados há questões processuais de significados e contextos que estão sempre presentes: “Qual é o significado de tudo isto?” O que se vai fazer com isto tudo?” (Vale, 2004).

Neste seguimento, Wolcott (1994, citado em Vale, 2004) põe em evidência três momentos fundamentais durante a fase de análise de dados: descrição, análise e interpretação. A descrição corresponde à redação dos dados iniciais registados pelo investigador. A análise é o processo de organização de dados, que tem por objetivo salientar os aspetos essenciais e reconhecer os fatores chave. Por último, a interpretação é a fase que diz respeito ao processo de obtenção de significados e ilações a partir dos dados obtidos.

Na mesma linha de ação, Miles e Huberman (1994) propõem um modelo de análise na investigação qualitativa que assenta em três episódios: a redução dos dados, a apresentação dos dados e as conclusões e verificação. A redução dos dados é a fase inicial que contempla o processo de seleção, simplificação e organização de todos os dados obtidos durante a investigação. A apresentação dos dados refere-se ao momento em que a informação é organizada para que o investigador possa ver de forma rápida e eficaz o que se passa no estudo. O terceiro e último momento diz respeito à elaboração das conclusões resultantes de toda a informação recolhida, organizada e compactada. Miles e Huberman (1994) sublinham que o trabalho de investigação está dependente da quantidade de notas tiradas, dos métodos usados e, principalmente, da experiência do investigador.

Como o nosso objetivo é compreender a implicação dos materiais manipuláveis na aprendizagem, optamos por organizar todos os dados tendo como critério principal o material manipulável utilizado. Neste sentido, tendo sempre presente as questões orientadoras do estudo e depois das leituras várias dos materiais recolhidos, optamos por organizar os dados de forma a descrevermos, para cada uma das díades em estudo, o seu desempenho com determinado material, durante a realização das tarefas. Tivemos o cuidado de ler várias vezes todos os documentos obtidos, nomeadamente as notas de campo e fazer a transcrição de todos os registos, para ter assim uma visão completa e abrangente sobre o assunto.

Os dados, respeitantes a cada díade, foram todos triangulados através dos diferentes métodos que utilizamos pois o nosso propósito era o de construir uma cadeia de evidências que nos permitam ir delineando as respostas às nossas questões de investigação.

Lincoln e Guba (1985, citado em Vale, 2000) fundamentam esta opção quando referem que as respostas tendem a agrupar-se e que para se chegar às categorias, temas ou construtores, o investigador tem de procurar regularidades. Nesta sequência, as categorias, temas e padrões surgem a partir dos dados pois emergem a partir das notas de campo, documentos, questionários e entrevistas. É o investigador que ao agrupar os dados, procura categorias de forma a interpretá-los (Vale, 2004).

Em continuidade, Miles e Huberman (1994) frisam que na análise de dados é preciso ver se as coisas fazem sentido e se encaixam, procurando descobrir pistas para fazer agrupamentos, contrastes e comparações; procurar pôr em evidência relações entre as variáveis que falem diretamente do fenómeno em questão. Por fim, descobrir coerência conceptual e teórica através da comparação com a literatura.

Depois de termos realizado esta análise para cada díade, optamos por fazer uma análise comparativa entre as díades procurando descobrir regularidades e diferenças entre as dinâmicas de trabalho observadas.

Para isso usamos a seguinte estratégia: fomos assinalando com a mesma cor acontecimentos, atitudes com os materiais manipuláveis ou raciocínios matemáticos que se revelassem similares nas duas díades; com uma cor diferente sublinhamos os procedimentos e conclusões que tivessem sido singulares, procurando criar categorias preliminares de codificação. Este procedimento é concordante com Miles e Huberman (1994) que assinalam a importância de o investigador reunir a informação de um modo organizado, imediato, acessível e compacto para que possa ver rapidamente e comodamente o que está a acontecer e também tirar conclusões fundamentadas.

Ao longo deste capítulo apresentamos um desenho do estudo que implementamos e da metodologia utilizada: contextualizamos o ambiente onde se desenrolou a ação – descrevendo a escola, a professora, a turma e os casos. Elaboramos um calendário da implementação das ações desenvolvidas ao longo da investigação pondo em evidência as várias fases do estudo: a sua preparação, a implementação da proposta pedagógica e a redação do relatório, focando os momentos para realização de questionários e entrevistas. Descrevemos ainda a forma como se realizou a recolha e a análise dos dados. Procuramos relatar todos os acontecimentos com clareza e objetividade pois é nossa intenção construir, ao longo desta dissertação, uma narrativa do trabalho desenvolvido, que seja compreensível e esclarecedora para o leitor, acautelando os critérios de validade para um trabalho desta natureza.

CAPÍTULO IV. EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo descrevemos a experiência matemática realizada com recurso ao uso de materiais manipuláveis, procurando relatar o ambiente e as dinâmicas de sala de aula e por em evidência a forma como as tarefas foram implementadas pelo professor, e como é que foram exploradas e resolvidas pelos alunos, ao longo das sessões de trabalho.

4.1. Descrição da experiência didática realizada

Começamos esta experiencia didática pela planificação da unidade. A investigadora é também professora da turma e, como tal, tem de lecionar os conteúdos. Optamos por seguir o manual escolar dos alunos que começa pelas isometrias e introduz o conceito de simetria no final do capítulo. Esta escolha permitiu-nos seguir a planificação da escola e realizar os mesmos momentos de avaliação, com as mesmas fichas de avaliação, pois é prática da escola fazer testes comuns, conforme vinha a acontecer desde o início do ano letivo.

A nossa primeira etapa foi definir quais seriam as tarefas que íamos aplicar, pois sabíamos que a sua escolha seria fulcral para conseguirmos responder ao problema e às questões de investigação.

Foi nossa opção criar tarefas que permitissem trabalhar toda a unidade de forma consistente e articulada (Ponte, 2005), com recurso aos materiais manipuláveis diversificados e que apelassem a um ensino e aprendizagem exploratório. Para isso fizemos uma seleção de um conjunto de tarefas em vários manuais escolares, livros e artigos pedagógicos e documentos de apoio ao Programa de Matemática elaborados pela Direção-Geral da Educação. Seguidamente, selecionamos algumas dessas tarefas, adaptamos outras e algumas fomos nós que elaboramos, de maneira que pudéssemos trabalhar toda a unidade pois no período de implementação do estudo não utilizamos o manual escolar. Todo o trabalho foi organizado e desenvolvido através de um conjunto de tarefas, que se encontram em anexo (anexo 3). Tivemos o cuidado de compilar um leque de tarefas que fossem ricas e apelativas, que permitissem uma aprendizagem por descoberta e mais exploratória e que, obviamente, recorressem ao uso de materiais manipuláveis diversos. Desde o início do estudo que sabíamos que o foco de análise se iria centrar apenas em algumas tarefas, o facto de serem neste número (24) deveu-se a termos de trabalhar a unidade pois frisamos que o investigador também é o professor da turma. Tivemos ainda o cuidado que houvesse um acrescento no nível de complexidade e de desafio cognitivo das tarefas (Stein & Smith, 2001), ao longo da nossa experiência didática pois consideramos que deve haver um fio condutor a orientar a escolha das tarefas e que estas devem começar por ser mais simples e diretas e progressivamente contemplarem atividades mais complexas, com maior grau de abstração e que envolvam mais raciocínio matemático. Criamos assim, um conjunto de tarefas, abertas e mais fechadas, com diferentes graus de complexidade e que contemplassem o uso variado de materiais manipuláveis.

Quando tínhamos as tarefas elaboradas, enviamo-las para um painel de quatro docentes (dois do 2º ciclo e dois do ensino superior) para as validarem de acordo com os objetivos a que se propunham: trabalhar as isometrias, com materiais diversos através de um ensino de cariz mais exploratório. Pretendíamos que através da manipulação dos materiais e do trabalho de pares os alunos se envolvessem nas dinâmicas da aula, chegando ao conhecimento matemático que tínhamos por objetivo atingir.

Os materiais manipuláveis que decidimos usar foram o espelho e o mira, o geoplano e o papel (quadriculado, ponteado, vegetal, dobragens e recortes), pois são os mais adequados e recomendados para o estudo das isometrias, para além dos materiais de desenho: régua, esquadro, compasso. (e.g. NCTM, 2007; Veloso, 2012).

Na gestão da nossa aula tivemos o cuidado de criar regras/ procedimentos na distribuição e recolha dos materiais para que isso não se tornasse um foco de perturbação da aula. Desta forma, cada dia, uma díade ficava responsável por esta tarefa.

Durante a experiência didática a ação dos professores durante o desenvolvimento das tarefas, desenvolvidas numa lógica de ensino exploratório, era o de orientar o trabalho dos alunos, orquestrar as discussões, proporcionando a sistematização de ideias principais decorrentes do trabalho desenvolvido (e.g. Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Neste contexto, a nossa sessão de trabalho iniciava-se sempre com um revisitar da aula anterior: o professor pedia aos alunos para relembrarem e descreverem as tarefas realizadas na última aula e desta forma, fazendo um balanço das tarefas realizadas e dos conhecimentos matemáticos apreendidos, tínhamos a oportunidade de clarificar conceitos e avaliar formativamente os alunos. Após este preambulo, que consideramos muito importante para contextualizar a aula, fazíamos ”a ponte” para as atividades a desenvolver, estabelecendo conexões.

Dando continuidade à nossa planificação, a díade selecionada distribuía o material manipulável a utilizar na primeira tarefa. Como frisa a literatura, se o material fosse usado pela primeira vez, dávamos algum tempo para a sua exploração livre e lúdica. Este momento é fundamental para que os alunos interajam com o material da maneira que entenderem, o explorem das mais variadas formas para que quando o professor distribuir a tarefa, os alunos utilizem o material como uma ferramenta de trabalho e não o vejam como um brinquedo ou objeto distrator (e.g.Kelly, 2006).

Seguidamente distribuíamos as tarefas que eram resolvidas em pares, contudo, como já referimos, cada aluno tinha uma ficha que fazia em parceria com o colega. Há tarefas em que cada aluno da díade faz a mesma isometria, mas relativamente a um polígono diferente (por exemplo nas tarefas T_3, T_6 e T_9). Consideramos que isso não foi um constrangimento nem dificultou o trabalho da díade. Ao invés, enriqueceu o trabalho de equipa porque ajudavam-se mutuamente e tinham mais do que um exemplo para poderem conjeturar acerca das propriedades dessa isometria e ambos estavam verdadeiramente a trabalhar. No final, as conclusões eram sempre feitas em conjunto.

Frisamos que a dinâmica de trabalho de pares já estava apropriada pelos alunos sendo esta a forma habitual de trabalho na sala de aula de matemática. Para além disso, a professora considera fundamental para a aprendizagem matemática que os alunos expliquem e comuniquem com os colegas a sua abordagem às tarefas explanando o seu raciocínio e o seu poder argumentativo. Nesta conformidade, desde que se começou a trabalhar com a turma (em Setembro), solicitava-lhes permanentemente que apresentassem e justificassem os seus procedimentos, umas vezes oralmente e quase sempre por escrito. O raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação matemática eram capacidades que estavam permanentemente a ser trabalhadas. Por isso a nossa metodologia de trabalho ao longo do estudo revelou-se numa continuação da nossa prática letiva, mas com o recurso aos materiais manipuláveis.

A nossa metodologia de ensino centrou-se assim no modelo de Stein e Smith (1998). Antes da aula resolvíamos sempre as tarefas e, desta forma, podíamos prever (antecipar) dificuldades que os alunos podiam revelar (com a interpretação das questões, com as imagens e/ou com a manipulação dos materiais), identificávamos conhecimentos matemáticos que os alunos poderiam alcançar e conexões matemáticas que se poderiam fazer. Outra preocupação que tivemos sempre presente foi o tempo a dar ao desenvolvimento de cada tarefa. Estava previsto na planificação, no entanto, se durante a lição nos apercebíamos que estava a ser demasiado ou escasso, fazíamos essa alteração no momento, reajustando-o às dinâmicas da aula. Uma vez que é nosso objetivo que os alunos se envolvam na aula, que comuniquem e troquem impressões com os colegas, que manipulem os materiais em prol da descoberta dos conceitos e ideias matemáticas de maneira mais significativa, o tempo dado torna-se num elemento importante que, como referem Stein e Smith (1998) não pode ser demasiado por senão os alunos dispersam-se da atividade, nem pode ser de menos porque os alunos podem não ter o tempo necessário para a exploração completa das tarefas e dos materiais.

Procuramos para esta experiência didática criar tarefas ricas e promotoras de um ensino por descoberta. Stein e Smith (1998) corroboram que as tarefas são importantes, no entanto alertam para o papel do professor durante a aula, porque as suas intervenções e respostas a perguntas podem orientar demasiado os alunos para um caminho, reduzindo as oportunidades de raciocínios matemáticos e de resoluções divergentes. Por isso durante a implementação das tarefas procuramos não dar demasiadas orientações pois receávamos reduzir os aspetos desafiantes que a tarefas e a manipulação dos materiais têm. Nunca líamos a tarefa e sempre que os alunos faziam alguma pergunta, tentávamos desafia-los com outra questão que os pusesse a pensar e a encetar uma estratégia de resolução, sem nunca lhes dizermos como se faz ou qual é a solução.

Todas as tarefas terminavam com uma questão que pede aos alunos para explicarem o raciocínio realizado, argumentando acerca dos procedimentos efetuados. Este ponto da tarefa revelou-se fulcral pois é a reflexão que o aluno faz sobre a atividade desenvolvida que produz o conhecimento e motiva a comunicação matemática entre os pares, fomentando o poder argumentativo, criando assim, reais oportunidades de aprendizagens mais significativas e duradoiras e desenvolvendo o gosto pela matemática (Vale, 2011).

4.2. As tarefas

Diversos autores salientam que as tarefas são a peça central de todo o processo de ensino e aprendizagem numa aula de matemática), condicionando de forma decisiva e que o aluno aprende (Ponte, 2005; Vale, 2011).

Ponte (2003a) cita uma investigação realizada por Fonseca (2000) referindo que esta investigadora Identifica diversos fatores que podem influenciar os processos matemáticos dos alunos: a natureza da tarefa, o material utilizado, a interação com os colegas, a interação com o professor e o conhecimento e experiência prévia.

Nesta conformidade procuramos construir uma cadeia de tarefas desafiantes e diversificadas, e dificuldade e formalismo crescente, que permitissem a criação de um percurso de aprendizagem coerente.

Construímos vinte e quatro tarefas (Anexo). Com estas tarefas pretendemos trabalhar toda a unidade das isometrias e simetrias com recurso a materiais manipuláveis variados. Planificamos toda a unidade porque o investigador é o professor da turma e por isso tem de lecionar todos os conteúdos seguindo a planificação da escola. A nossa intenção, desde o início do estudo é selecionar as tarefas que tiverem resoluções mais ricas e cuja recolha de dados complementar (entrevistas, questionários e observações) mostrem evidências mais claras do que nos propomos estudar. Assim, todas as tarefas foram realizadas com o recurso explícito aos materiais manipuláveis e procuramos que em todas as transformações geométricas fossem utilizados o geoplano, o papel quadriculado (ou ponteado) e o papel vegetal (ou acetato). Para trabalharmos a reflexão, para além destes materiais, utilizamos também o mira e o espelho.

Nesta sequência, construímos tarefas que abrangessem diferentes graus de complexidade e abertura (Figura 3) e procuramos iniciar cada tópico com tarefas mais fechadas e com menor dificuldade para depois desenvolvermos tarefas mais abertas e exploratórias, com maior grau de complexidade. Canavarro (2011) defende esta ideia quando frisa que um critério adequado para a sequenciação das tarefas e das apresentações é o caminhar do mais informal para o mais formal no que diz respeito às representações matemáticas utilizadas.

Neste seguimento, iniciamos o nosso estudo pela reflexão por ser esta a ordem da planificação da escola e da turma, mas também porque no capítulo das isometrias, o conceito de reflexão é aquele que os alunos já têm algumas noções: dadas ao nível do primeiro ciclo e também nas disciplinas de Educação Visual e Tecnológica e por consideramos que é pertinente e importante para a aprendizagem matemática partir sempre do conhecimento prévio do aluno.

Construímos o esquema da Figura 3 para nos ajudar a apresentar um cronograma com as tarefas desenvolvidas: a sua sequência e o número de tarefas trabalhadas em cada subtópico.

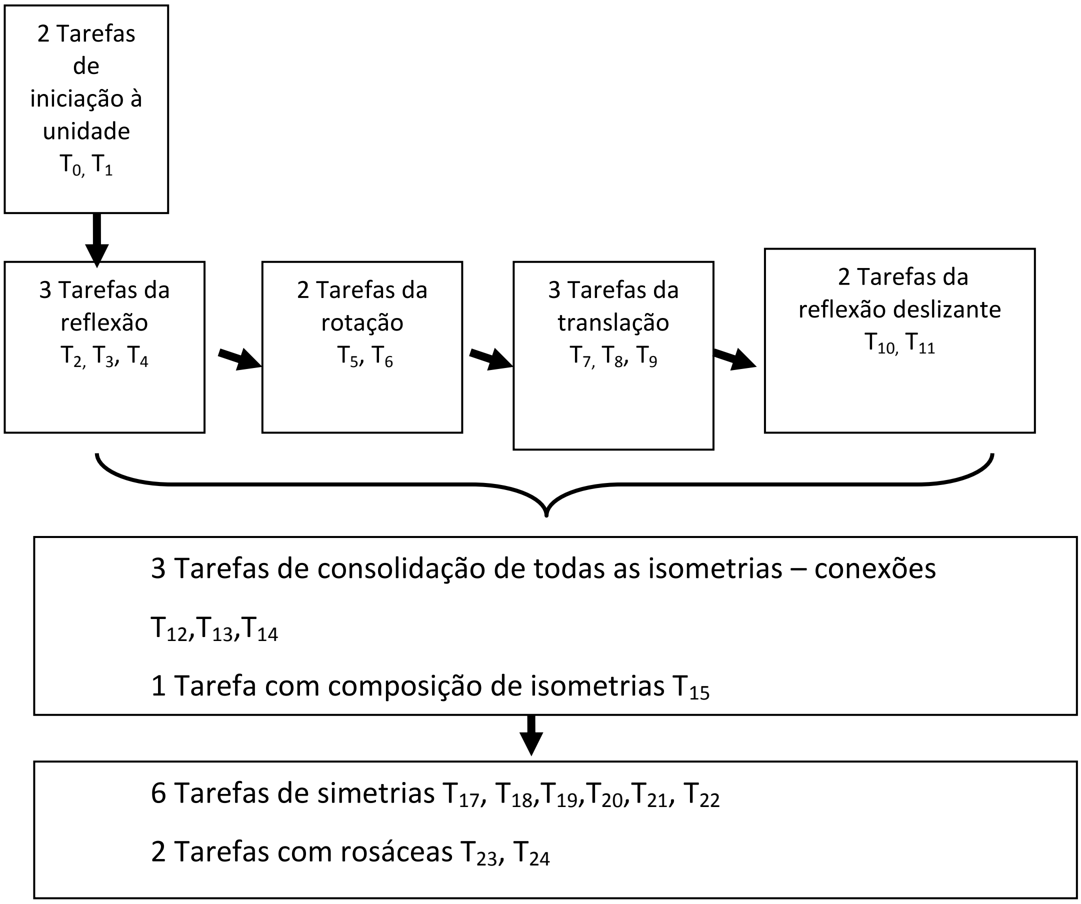


Figura 3. Cronograma das tarefas desenvolvidas

Neste sentido, para introduzirmos esta metodologia de trabalho com materiais manipuláveis, começamos por aplicar uma tarefa lúdica - T_0 - construção da reflexão, de eixo vertical, de um boneco, que teve como objetivo que os alunos tomassem contacto com o mira, percebessem como se utiliza e quais são as suas potencialidades.

Frisamos que na nossa prática docente, consideramos importante partir sempre do conhecimento prévio dos alunos, por isso Iniciamos o tópico das isometrias com a tarefa T_1, onde através da utilização do acetato, os alunos tinham de inferir quais os movimentos que realizam quando fazem determinada transformação geométrica (reflexão - virar, rotação - rodar e translação - deslizar). Estas duas tarefas tiveram o intuito de introduzir a nossa temática, quer ao nível dos conteúdos, quer em relação à metodologia de trabalho que iríamos adotar.

Depois desta primeira abordagem, começamos efetivamente a trabalhar as diferentes isometrias, iniciando pela reflexão, com as tarefas T_2 e T_3. Nestas tarefas os alunos vão construir figuras e a sua reflexão no geoplano e no papel quadriculado, respetivamente. Mediante a utilização dos materiais, pretendemos que os alunos descubram que na reflexão: (1º) a figura inicial e a sua imagem mantêm os mesmos comprimentos dos segmentos e as mesmas amplitudes dos ângulos; (2º) a reflexão inverte a orientação da figura; (3º) o segmento de reta que une cada vértice ao seu transformado é perpendicular ao eixo de reflexão; (4º) a distância de cada vértice ao eixo de reflexão é a mesma que a distância que vai do eixo até ao ponto que é a imagem correspondente.

Nesta sequência, na T_4 é pedido aos alunos que realizem a reflexão de quatro triângulos (Figura.4), com o apoio do espelho, mas sem o suporte do papel quadriculado ou ponteado. As nossas expetativas é que os alunos sentissem algumas dificuldades nas construções C e D, no primeiro caso por o "espelho físico" cortar o triângulo o que não acontece com o "espelho matemático "e na figura D o "espelho físico" é curto, relativamente ao objeto, o que não acontece com o "espelho matemático" que não tem tamanho.

Foi nossa opção ir delineando tarefas em que a dependência da utilização do material manipulável fosse sendo progressivamente menor, de forma a percebermos se os alunos conseguem fazer a transição entre o concreto e o abstrato e qual é a apropriação que fazem dos conhecimentos matemáticos em estudo.

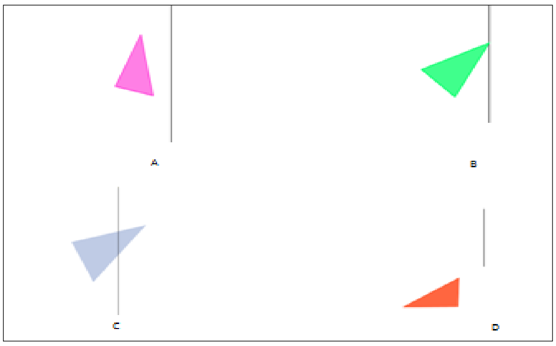


Figura 4. Tarefa 4 - reflexão

Sintetizando, descrevemos na tabela seguinte – Tabela 4, de forma pormenorizada, as tarefas e os materiais que usamos para a reflexão.

Tabela 4. Tarefas sobre a reflexão

T	Objetivos da tarefa	Material	Descrição das tarefas
T_2	Construir a imagem de uma figura por reflexão. Compreender as propriedades da reflexão.	Geoplano Papel ponteado	Os alunos vão começar por construir no geoplano as figuras que estão na ficha de trabalho e de seguida fazem a sua reflexão (a primeira, segundo um eixo vertical, a segunda, em relação a um eixo horizontal e a última, relativamente a um eixo de reflexão oblíquo). Copiam as figuras e os seus transformados, por reflexão, para o papel ponteado e tiram as conclusões.
T_3	Construir a imagem de uma figura por reflexão.	Papel quadriculado Polígonos em cartolina, Mira	Cada aluno da díade retira um polígono, cola-o no papel quadriculado (fazendo coincidir os vértices do polígono com os vértices do quadriculado), traça um eixo de reflexão com a orientação e a posição que quiser (colado ou não à figura) e, de seguida fazem a sua reflexão.
T_4	Compreender as propriedades da reflexão.	Espelho	Nesta tarefa os alunos realizam a reflexão de quatro triângulos. Não têm o apoio do papel quadriculado ou ponteado, mas podem usar o espelho.

Dando seguimento à nossa planificação, o próximo passo da nossa experiência didática são as tarefas relativas à rotação. Para trabalharmos este tópico construímos duas tarefas (T_5 e T_6): na primeira usamos o papel vegetal e na segunda, o papel quadriculado. Através destas tarefas os alunos irão realizar rotações com um crescente grau de dificuldade, com o objetivo de descobrirem as propriedades desta isometria. Por exemplo, na T_5 os alunos realizam três rotações de 90° de figuras distintas: a primeira é a rotação de uma bandeira realizada com o apoio do papel vegetal (o ponto de rotação é um vértice da figura). A segunda, rotação é de um retângulo semelhante à anterior, mas os alunos não usam o papel vegetal. Para realizarem esta rotação devem guiar-se apenas pelo papel quadriculado e na terceira, o material de suporte é também o papel quadriculado, mas o ponto de rotação está fora da figura (Tabela 5).

Tabela 5. Tarefas sobre a rotação

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_5	Construir o transformado de uma figura por rotação.	Papel vegetal papel quadriculado	Ao longo da atividade os alunos têm de realizar três rotações de 90 ° : de uma bandeira, de um retângulo e de um triângulo, fazendo variar o ponto de rotação e o sentido.
T_6	Descrever uma rotação. Compreender as propriedades da rotação.	Papel quadriculado, polígonos em cartolina	Nesta tarefa os alunos terão de realizar uma rotação de um polígono (construído em cartolina), de acordo com as indicações presentes no mesmo (sentido, centro da rotação e amplitude). Cada aluno da díade retira um polígono, cola-o no papel quadriculado e realizam a rotação pedida. As conclusões são elaboradas em conjunto pela díade.

Nesta sequência e dando continuidade ao planeamento desta experiência didática, passaremos a trabalhar a translação e para isso construímos mais três tarefas. Os materiais manipuláveis que usamos na translação foram o papel vegetal e o papel quadriculado (T_8 e T_9) que descrevemos na Tabela 6.

Tabela 6. Tarefas sobre a translação

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_8	Construir a imagem de uma figura por translação.	Papel vegetal Papel quadriculado	É dada uma figura e o seu transformado por translação. Com o apoio do papel vegetal e do quadriculado os alunos descrevem como ocorreu a transformação. De seguida, têm de realizar uma translação de acordo com indicações dadas, concluindo acerca das propriedades desta isometria.
T_9	Descrever uma translação. Compreender as propriedades da translação.	Papel quadriculado, polígonos em cartolina	Esta tarefa é semelhante às realizadas com as reflexões e rotações (T_3 e T_6). Cada aluno da díade retira de um saco um polígono feito em cartolina, cola-o no papel quadriculado e realiza a translação, de acordo com as indicações presentes na figura sorteada.

Frisamos que as tarefas T_3,T_6 e T_9 são todas semelhantes porque são atividades em que os alunos têm de selecionar um polígono dentro de um saco e depois realizar a isometria pedida, respetivamente, a reflexão, a rotação e a translação.

Seguidamente, optamos por trabalhar a reflexão deslizante com as tarefas T_{10} e T_{11} (Tabela 7).

Tabela 7. Tarefas sobre a reflexão deslizante

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_{10}	Identificar, predizer e descrever as isometrias em causa, dada a figura inicial e o transformado.	Papel vegetal	É dado aos alunos duas imagens (de duas borboletas) onde se verifica uma reflexão deslizante. Eles ainda não conhecem esta isometria, mas como sabemos, já conhecem a reflexão, a translação e a rotação. Pela utilização do papel vegetal, os alunos vão descobrir e argumentar quais são as isometrias que permitem transformar uma borboleta na outra.
T_{11}	Construir o transformado da figura através de uma reflexão deslizante	Papel quadriculado	Depois da tarefa anterior, os alunos vão consolidar as propriedades da reflexão deslizante realizando esta transformação em papel quadriculado, de acordo com as orientações dadas.

Como, neste momento, os alunos já têm noção das quatro isometrias, elaboramos um conjunto de três tarefas mais abertas que colocassem os alunos a explorar as isometrias já estudadas: T_{12}, $T_{13,}$ T_{14}, com o objetivo de trabalhar todas as transformações em simultâneo, desenvolvendo conexões e uma melhor apropriação do conceito de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante. Assim, nas tarefas T_{12} e T_{13} são dadas as figuras e o seu transformado e mediante o uso do papel vegetal, os alunos vão verificar qual foi a transformação realizada. Na tarefa T_{14} usamos o geoplano e são os alunos que constroem as figuras e a respetiva imagem (por reflexão, rotação ou translação). Esta tarefa tem um grau de abertura maior e permite explorar a criatividade dos alunos – Tabela 8.

Tabela 8. Tarefas que envolvem todas as isometrias

T	Objetivo	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_{12}	Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.	Papel vegetal	Os alunos têm de descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado, justificando os seus raciocínios e conclusões.
T_{13}		Papel vegetal	Esta tarefa tem o mesmo objetivo da anterior. Pretendemos que pela deslocação da folha de papel vegetal, os alunos descubram e expliquem as isometrias que se encontram numa figura dada.
T_{14}	Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos. de diversas formas.	Geoplano e papel ponteado	Cada aluno da díade, à vez, constrói uma figura no geoplano e o seu colega tem de fazer reflexão (escolhem as figuras e a posição do eixo de reflexão). Depois copiam as figuras para o papel ponteado. Repetem o mesmo procedimento para a rotação e a translação.

Ancoramos esta experiência didática no ensino por descoberta e neste sentido, ao longo da realização das tarefas, adotamos sempre uma postura que desafiasse os alunos na procura do conhecimento, levando-os a desencadear um conjunto de raciocínios matemáticos, sustentados pela concretização que os materiais manipuláveis permitam. O mesmo aconteceu na tarefa - T_{15}, descrita na Tabela 9. Depois de realizarem duas reflexões de eixos paralelos e duas reflexões de eixos perpendiculares pretendíamos que os alunos argumentassem a concluíssem que: (1) se realizarmos uma composição de duas reflexões de eixos paralelos equivale a fazer uma translação: (2) se realizarmos duas reflexões de eixos perpendiculares, equivale a fazer uma rotação de 180°.

Tabela 9. Tarefas sobre a composição de isometrias

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_{15}	Construir o transformado de uma figura a partir de uma composição de isometrias.	Papel quadriculado	Inicialmente os alunos vão realizar duas reflexões de eixos paralelos e depois, relativamente a outra figura, vão realizar duas reflexões de eixos perpendiculares, concluindo acerca destas composições de isometrias.

Sublinhamos que pretendemos que através do trabalho de pares e do uso dos materiais manipuláveis os alunos comuniquem entre si, verbalizem o porquê de terem realizado determinada transformação, e o porquê de o terem feito de determinada forma e expliquem e justifiquem as suas ideias e os processos matemáticos utilizados nas transformações geométricas pedidas.

Neste paradigma elaboramos um jogo em que utilizamos os blocos padrão - T_{14} – Tabela 10.

Tabela 10. O Jogo

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas
T_{16}	Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado. Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos. de diversas formas.	Blocos padrão Folha de registo	Os alunos têm de construir figuras com os blocos padrão e depois, seguindo as regras do jogo, têm de fazer determinada isometria. As figuras e o seu transformado são sempre copiados para a sua folha de registo.

O jogo será desenvolvido numa aula de Estudo Acompanhado, por duas razões: a primeira prende-se com a dificuldade (de tempo) em cumprir a planificação e a segunda com o apoio que a colega desta área curricular (docente de matemática) poderá dar à realização do jogo e na exploração/ discussão das figuras construídas pelos alunos e dos seus transformados, de acordo com as indicações do jogo. Desta forma, outro professor pode ajudar na gestão do trabalho da sala de aula e na recolha de dados pois podemos prever que, dada a abertura da tarefa, os alunos vão construir diferentes figuras e mais complexas e poderão haver momentos de maior confusão na construção das imagens pedidas e, principalmente, na decisão da correção desse procedimento.

Nesta sequência e seguindo a planificação que elaboramos, o último tópico que abordamos foi o das simetrias. Foi lecionado no final da unidade porque, como já expusemos, decidimos seguir o manual escolar e a planificação da escola.

Consideramos que a compreensão do conceito de simetria é confusa para alunos desta faixa etária pois os alunos associam simetria exclusivamente à simetria de reflexão, confundindo-a com a reflexão de uma figura. Por isso começamos por introduzir o conceito de simetria através de uma tarefa mais lúdica: a T_{17}. Nesta tarefa os alunos vão colocar algumas gotas de guache no interior de uma folha branca e vão dobrá-la, como eles entenderem. O resultado será que a dobra será sempre um eixo de reflexão, mas que nalguns casos, é também eixo de simetria. Outra tarefa que também teve uma componente lúdica, e teve como objetivo reforçar a noção de simetria foi a tarefa T_{22}. Tiramos uma fotografia a alguns alunos de frente para a objetiva e enviamo-las para o computador. De seguida, usando o projetor multimédia, pedimos que um aluno que (1º) fizesse duas cópias da fotografia, ficando, desta forma, com três fotografias iguais; (2º) que dividisse (no computador) duas fotografias (digitais) pelo que considerava ser o eixo de simetria: uma fotografia ficou intacta, na segunda eliminamos o lado direito e na terceira eliminamos o lado esquerdo. Por indicação do professor, o aluno faz uma cópia de cada uma das metades e, reflete-a, colando-a à sua reflexão, ficando assim com uma fotografia intacta (a primeira), uma fotografia com duas metades da parte direita da face (a segunda) e outra fotografia com duas metades com a parte esquerda da face (a terceira). Todo o processo e conclusões foram realizados por toda a turma, através da moderação do professor.

Para além destas tarefas realizamos outras para identificação dos eixos de simetria (axial e rotacional) em diversas figuras (T_{18}), para identificar e generalizar acerca dos eixos de simetria de reflexão e rotação em polígonos regulares ($T_{19,}$ T_{20} e T_{23}), para a classificação de triângulos, de acordo com os eixos de simetria (T_{22}) e finalmente para trabalhar as rosáceas (T_{24}). Estas tarefas encontram-se descritas na Tabela 11.

Tabela 11. Tarefas sobre as simetrias

T	Objetivos	Material	Descrição das tarefas/ expectativas do investigador
T_{18}	Identificar as simetrias de uma figura	Mira Papel vegetal	São dadas diferentes imagens numa ficha de trabalho. Através da utilização do mira (para identificar simetrias de reflexão) e do papel vegetal (para identificar simetrias de rotação) os alunos vão descobrir e argumentar acerca das simetrias que encontram (ou não) nas diferentes figuras.
T_{19}	Determinar o número de eixos de simetria de reflexão num polígono regular.	Mira	Na tarefa estão representados vários polígonos regulares. Através do mira os alunos identificam os seus eixos de simetria axial. Pretendemos que os alunos generalizem acerca das simetrias em polígonos regulares.
T_{20}	Identificar num polígono simetrias de rotação. Identificar a ordem da simetria de rotação de uma figura.	Papel vegetal, polígonos regulares transferidor	São dados a cada díade um quadrado, um triângulo, um pentágono e um hexágono regulares (construídos em cartolina, onde está identificado o centro). Pela utilização do papel vegetal os alunos vão descobrir e generalizar as simetrias de rotação destes polígonos.
T_{21}	Classificar os triângulos de acordo com o número de simetrias de reflexão.	Mira	Com esta tarefa pretendemos que os alunos identifiquem o número de eixos de simetria em diferentes triângulos e que retirem conclusões acerca do número de eixos de simetria que têm os triângulos equilátero, isósceles e escaleno.
T_{23}	Identificar simetrias de reflexão e de rotação.	Papel e tesoura	Cada aluno dobra um quadrado em papel, e faz determinados recortes, de acordo com indicações dadas. Depois de desdobrarem a folha pede-se aos alunos que identifiquem as simetrias da figura.
T_{24}	Identificar simetrias em rosáceas. Construir rosáceas.	Papel vegetal e quadriculado	Os alunos vão construir duas rosáceas , fazendo rodar sucessivamente um motivo . No primeiro caso rotação de 90˚ e na segunda rosácea , rotação de 45˚.

Este estudo foi implementado ao longo de dois meses, usando a metodologia de trabalho de pares e o recurso a materiais manipuláveis. Trabalhar, na aula de matemática, em pares, já era habitual para estes alunos, sendo que as duplas já estavam formadas desde o início do ano letivo e o ensino/ aprendizagem exploratório também era utilizado regularmente pela docente, que gostava de provocar os alunos com questões que os levassem a argumentar e a raciocinar em torno dos conceitos abordados. Como refere Navarro (2011) o ensino exploratório da Matemática e, em especial, a orquestração das discussões matemáticas na aula, constituem um desafio-chave na aprendizagem da matemática.

Neste sentido, para a turma, a maior alteração nas dinâmicas da sala de aula foi a utilização dos materiais manipuláveis de forma permanente (todos os alunos manipulam os materiais). A professora já tinha levado materiais manipuláveis para a sala de aula; citamos, como exemplo, os sectores circulares e o material multibásico, mas usava-os sempre como demonstração e para facilitar a sua explicação da matéria. Algumas vezes usava-os para que os alunos chegassem por si próprios ao conhecimento matemático, mas nunca os alunos os tinham manipulado. A professora ía fazendo várias experiências com os materiais para toda a turma e os alunos participavam do seu lugar. É importante referir que a professora/investigadora sempre foi adepta da utilização de materiais manipuláveis e a escola onde leciona possui vários materiais em quantidades suficientes, mas esta considerava que a sua utilização provocava na aula muito barulho e confusão, com algumas perdas de tempo e por isso limitava-se sempre a recorrer aos materiais apenas por demonstração.

Nesta experiência didática a metodologia de trabalho passava essencialmente por esta alteração: os materiais manipuláveis eram colocados em cima das mesas dos alunos e eram eles que iriam mexer, remexer, construir, reconstruir, explorar os materiais, tirar elações e conclusões matemáticas pelo seu uso ao longo da realização das tarefas.

Foi neste paradigma que iniciamos a nossa experiência didática. Quando os alunos viram a caixa com os miras (primeiro material a ser utilizado) ficaram entusiasmadíssimos. A professora selecionou uma díade para distribuir um mira por cada aluno (antes de darmos a ficha de trabalho). Foi uma animação! Todos os alunos mexiam e olhavam pelo mira como se fosse um brinquedo! Deixamos que o fizessem durante algum tempo, como refere a literatura.

Passado esse tempo, que ainda foi longo, distribuímos a ficha de trabalho. Verificamos que o barulho inicial acalmou e que os alunos fizeram a reflexão, usando o mira corretamente como era nosso objetivo. E a aula terminou!

Nas aulas seguintes, sempre que era introduzido outro material diferente, o procedimento foi sempre o mesmo: dar tempo para a sua exploração livre! Com o geoplano foi a mesma coisa! Nessa aula quando distribuímos o geoplano e os elásticos, observamos que os alunos começaram imediatamente a fazer construções…de casinhas e carrinhos que mostravam muito entusiasmados uns aos outros…demos-lhes esse tempo e esse tempo não foi perdido, foi ganho! A seguir, quando distribuímos a ficha de trabalho vimos os alunos a usar o geoplano em função da tarefa e não como um brinquedo.

Tabela 12. Momentos da aula durante a experiência didática

Momentos da aula
Revisitar a tarefa dada na última aula
Distribuição dos materiais manipuláveis
Exploração livre dos materiais
Distribuição da tarefa
Resolução e exploração da tarefa através do uso dos materiais (trabalho de pares)
Reflexão, em plenário, sobre a tarefa desenvolvida, a implicação que os materiais tiveram na realização da tarefa e os conhecimentos matemáticos adquiridos

Neste capítulo descrevemos esta experiência didática, retratando a forma como orientamos a aula, os recursos que usamos, as metodologias que aplicamos, e explicando os motivos das nossas escolhas.

Seguidamente, no capítulo V, faremos uma descrição dos dois casos que sustentam este trabalho durante a experiência didática com materiais manipuláveis focando-nos na sua reação e desempenho nas tarefas com recurso à utilização dos materiais manipuláveis.

CAPITULO V – OS CASOS

Neste capítulo fazemos uma descrição da turma onde foi implementado o estudo bem como do seu empenho global nas tarefas com matérias manipuláveis. De forma mais pormenorizada descreveremos o desempenho de dois casos em estudo, formado por duas díades, nas tarefas propostas onde se utilizaram materiais (geoplano, mira/espelho e papel), focando o contributo que estes tiveram na realização das tarefas e na aprendizagem, bem como a reação destes alunos à utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática.

5.1. A turma

A turma é constituída por vinte e dois alunos (15 rapazes e 7 raparigas). Os alunos, no seu global, são interessados e empenhados na realização das tarefas, revelando um bom rendimento escolar.

Relativamente ao comportamento são também alunos que têm uma atitude assertiva e promotora de um bom clima de aula. São participativos, mas organizados, respeitando muito a figura do professor na sala de aula.

Desde o início do ano que os alunos trabalham em pares. Esta metodologia de trabalho foi proposta pelo professor e tem-se revelado muito positiva com estes alunos pois, de uma forma natural, instalou-se neste grupo uma dinâmica de trabalho colaborativa e argumentativa o que os leva a partilhar ideias, expor o raciocínio aos colegas e formas de resolução das tarefas.

Salientamos que os alunos revelaram-se bons comunicadores desta experiência didática pois estiveram sempre disponíveis para a realização das entrevistas e para o preenchimento dos questionários, procurando explicar e fundamentar sempre as suas respostas, escolhas e opções, o que permitiu contribuírem para uma melhor compreensão do problema em estudo.

5.1.1. Relação da turma com a matemática e o seu ensino e aprendizagem

Como temos vindo a referir esta turma revela uma boa dinâmica nas aulas de matemática. São alunos que participam ativamente na aula, que cooperam com a professora nas atividades propostas, mostrando interesse, curiosidade e gosto pela aprendizagem.

A relação da turma com a matemática ía de encontro às nossas expectativas, uma vez que a maioria dos alunos (68 %), gosta de matemática. Contudo, contrariando a opinião da professora, no universo da turma, 46 % dos alunos reconhece que sente algumas dificuldades nesta área disciplina.

Esta turma tem alunos muito autónomos e que gostam de emitir a sua opinião relativamente ao funcionamento das aulas e às melhores formas que, na sua opinião, contribuem para a aprendizagem. Na generalidade, todos os alunos referem que para aprender matemática é "preciso praticar muito e resolver muitos exercícios e problemas diversificados". Contudo, muitos alunos também salientam a importância da atitude do aluno face à aprendizagem, focando "o empenho, a concentração e o trabalho nas aulas" como fatores determinantes para se aprender. De salientar a opinião de um aluno que frisa que é importante "encarar a disciplina como algo que é útil e que não se decora ", reforçando a ideia da importância da compreensão dos procedimentos aplicados.

Em relação às características de um bom professor, descrevem-no como compreensivo, simpático, divertido, mas rigoroso e exigente, que deve explicar bem a matéria e fazê-lo de "forma simplificada e recorrendo a várias técnicas de ensino". Realçam ainda que um bom professor deve realizar muitos exercícios e estar atento às dúvidas dos alunos. Há uma criança que sublinha esta ideia quando refere que "um bom professor é aquele que é organizado no que diz e se preocupa com a nossa aprendizagem". Estas opiniões, retiradas do questionário 1 apontam que estes alunos reconhecem que o professor, no processo de ensino e aprendizagem, deve utilizar tarefas diversificadas e dinâmicas de trabalho que envolvam os alunos nas atividades da aula.

Quanto ao modo preferencial de trabalhar na aula de matemática, constatamos que a maioria dos alunos prefere trabalhar em pares (82%). Todos os alunos referem que gostam menos de trabalhar em grupo. De entre as razões apontadas para os benefícios do trabalho de pares salientam-se a troca de ideias e o trabalho colaborativo que permite a interajuda. Os alunos que preferem trabalhar individualmente (4 alunos – 18 %) dizem que sozinhos raciocinam melhor e que permanecem mais concentrados. Em relação ao trabalho de grupo os alunos são unânimes em frisar que se torna confuso; realçando que podem ter opiniões divergentes e por serem muitos, torna-se difícil chegar a uma conclusão/ consenso.

Estes alunos gostam de realizar, durante a aula, tarefas diversificadas, contudo as tarefas mais abertas e de maior complexidade, como os problemas e as tarefas de investigação, são as que reúnem menos preferências.

Neste seguimento, as tarefas preferidas (Tabela 13) são os jogos porque " *é uma maneira diferente de aprendermos, que é divertida e educativa e desta forma também aprendemos coisas novas*". Mencionam que a prática de exercícios é importante, mas há quem afirma que é um trabalho enfadonho e repetitivo. Os alunos que gostam de resolver problemas consideram que "*os problemas são importantes porque gosto de puxar pela cabeça e é interessante tentar descobrir a solução do enigma*". As tarefas de investigação só são preferidas por dois alunos (9%). Eles frisam que gostam deste tipo de atividades porque *"é muito interessante procurarmos a informação para sabermos mais".*

Tabela 13. Tipo de tarefas preferidas pelos alunos

Tipo de tarefas	Percentagem (%)
Exercícios	32
Problemas	23
Tarefas de investigação	9
Jogos matemáticos	36

Sobre a conceção prévia que os alunos têm da utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática, constatamos que a maioria dos alunos não respondeu a esta questão, o que nos leva a pensar que não conheciam o termo "materiais manipuláveis", pois como já referimos, a professora já os tinha levado para a aula, para exemplificar o seu uso em determinada tarefa específica. Os alunos que conseguiram identificar alguns materiais manipuláveis citaram a calculadora, a régua, o compasso, os sólidos geométricos, o tangran e o geoplano. Relativamente à sua utilização nas aulas de matemática só dois alunos responderam. Uma aluna disse que "*ajudava a perceber melhor a matéria"* e outro aluno fez o seguinte registo "*…quando não entendemos uma coisa sobre um objeto, só quando pegamos nele e o observamos é que conseguimos perceber."*Esta observação remete-nos para a importância que os materiais possam ter, na visão de alguns alunos, para apoio na compreensão de alguns procedimentos matemáticos.

5.1.2. A reação dos alunos aos materiais manipuláveis

De modo geral, os alunos envolveram-se nas tarefas e usaram os materiais manipuláveis com entusiasmo. A grande maioria, após a exploração livre, usou os materiais em função da realização da tarefa e na ajuda que lhes proporcionam para aprender os conceitos matemáticos em jogo.

Variamos os materiais manipuláveis utilizados na abordagem e desenvolvimento das diferentes isometrias e as preferências dos alunos por um ou outro material, dependeram da transformação geométrica que estavam a realizar. Assim, enquanto na reflexão e na simetria gostaram mais de trabalhar com o mira, na rotação foi com o papel vegetal e na translação o material considerado mais útil foi o papel quadriculado. Realçamos que de uma forma natural, o acetato usado na tarefa 1 (T_1) foi sempre substituído pelo papel vegetal. Começamos por utilizar o acetato na tarefa T_1 e os alunos utilizaram-no, com empenho, ao longo da atividade em que tinham de realizar experiências (movimentações) com o acetato para descobrirem, intuitivamente, os movimentos que são necessários realizar na reflexão, rotação e translação. Na tarefa T_5 usamos o papel vegetal, porque assim estava planificado na tarefa. Verificamos que todos os alunos consideraram que o papel vegetal era mais prático porque podiam apagar facilmente o que se escrevia. O acetato era menos maleável, o que foi considerado um ponto negativo, para além de ser mais caro e mais difícil de apagar os registos efetuados. De acordo com um aluno o papel vegetal *"dava para apagar com a borracha e dobrar o papel pelo eixo de reflexão" (E_2).* Assim, a partir da T_5 os alunos optavam por utilizar um destes materiais. Verificamos que a turma, massivamente, optou por utilizar o papel vegetal.

Nesta experiência didática para além dos materiais manipuláveis estruturados como o mira, o geoplano e o espelho utilizamos diferentes tipos de papel: vegetal, acetato, quadriculado, ponteado, bem como dobragens e recortes. A utilização do papel, apesar de não ter o impacto (mais lúdico) que o mira ou o geoplano comportam, confere ao estudo das isometrias um suporte muito eficaz e didático, pois verificamos que os alunos o utilizam como apoio às construções e realizam, através deles, importantes argumentos e conclusões relacionadas com as diferentes transformações geométricas estudadas.

Neste sentido, por exemplo, para realizar a translação e a rotação o papel, quadriculado e vegetal, respetivamente, é considerado o material manipulável que mais ajuda nestas construções, enquanto que para a reflexão e a simetria de reflexão, é o mira.

Tabela 14. Materiais manipuláveis preferidos pelos alunos nas diferentes isometrias

	Transformação em que foi mais importante			
Material manipulável	Reflexão	Rotação	Translação	Simetria*[1]
Mira	82 %	----	----	50 %
Espelho	----	----	----	----
Geoplano	16 %	18 %	9 %	----
Papel vegetal	----	77 %	27 %	5 %
Papel quadriculado	-----	5 %	64 %	9 %
Pinturas com guaches/ dobragens	----	----	----	36 %

*[1] 18 % dos alunos consideraram que todos os materiais usados foram úteis na simetria.

Pela análise da Tabela 14 verificamos que o material considerado, pela maioria dos alunos, mais importante para a realização da reflexão é o mira. Este material também foi considerado muito importante como apoio à realização e identificação das simetrias de reflexão. Para apoio à realização da rotação, o material que ajudou a maioria dos alunos foi o papel vegetal e para a translação foi o papel quadriculado.

Desta leitura, é de salientar que não houve nenhum aluno a referir o espelho como o material preferido para apoio na construção ou identificação de qualquer isometria ou simetria. Este fato é reforçado pela análise da Tabela 15, pois o espelho aparece como material que os alunos, na sua grande maioria (90%), apontam como menos importante para realizar a reflexão.

Tabela 15. Materiais manipuláveis menos apreciados pelos alunos

	Transformação em que foi menos importante			
Material manipulável	Reflexão	Rotação	Translação *[2]	Simetria
Mira	5 %	----	----	----
Espelho	90 %	----	----	----
Geoplano	----	50 %	14 %	----
Papel vegetal	----	9 %	45 %	64 %
Papel quadriculado	5 %	41 %	9 %	----
Pinturas com guaches/ dobragens	----	----	----	9 %

*[2] 32 % dos alunos referem que os materiais usados na translação foram todos úteis, não selecionando nenhum como menos importante.

Pela análise das Tabelas 14 e 15, verificamos que, no estudo da simetria, houve 5% dos alunos que consideraram o papel vegetal importante como auxiliar nesta aprendizagem, mas que 64 % dos alunos referem que o papel vegetal não é importante. Estes dados pareceram-nos contraditórios com a nossa observação, uma vez que tínhamos verificado que para a simetria de reflexão, os alunos preferiam o mira, mas que para a identificação da simetria de rotação e especialmente para a determinação da ordem de rotação, os alunos usavam, quase sempre, o papel vegetal. Na aula seguinte, questionamos os alunos sobre este facto e verificamos que associaram a simetria apenas a simetria de reflexão e por isso consideraram o mira muito útil porque lhes permitia identificar os eixos e o papel vegetal menos útil porque não permitia uma identificação tão fácil desses mesmos eixos. Quando os questionamos acerca das simetrias de rotação a maioria dos alunos disse não se ter lembrado pois nesse caso já considerariam o papel vegetal muito importante.

Em síntese, podemos concluir que a turma foi muito recetiva à utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática considerando que as aulas são *"divertidas, engraçadas, curiosas e interessantes"(E_5)* . Frisam também que *aprendem* com novas técnicas através da experimentação com os materiais *e de forma mais "fácil porque vemos as coisas a acontecer" (E_5).* Ressalta nesta análise o comentário de uma aluna que menciona que *"assim aprendemos melhor porque não é a professora que diz a matéria, somos nós que descobrimos e isso fica na nossa memória"* (E_5), o que reforça a nossa opção para o ensino exploratório.

5.2. O Caso AB

5.2.1. Caracterização da díade

A díade AB é constituída por dois rapazes que são bons alunos, empenhados e trabalhadores que revelam um bom raciocínio matemático. Gostam de resolver problemas e tarefas mais abertas pois consideram que *"a matemática é importante para o nosso futuro e para percebermos as coisas do dia-a-dia"* (Aluno A - Q_1), reforçam ainda que sempre gostaram desta disciplina. O aluno B tem alguma dificuldade de organização do trabalho escrito, no entanto apresenta sempre resoluções ricas e diferentes dos restantes colegas. É um aluno que gosta muito de ser desafiado a resolver problemas e tarefas mais abertas, referindo que *"a resolução de exercícios sempre iguais cansa e é chato"* (Q_1).

Esta díade está muito bem entrosada e têm um trabalho muito coeso. Gostam de partilhar ideias entre ambos e de exprimir o seu raciocínio. Perante a tarefa cada aluno começa a ler o enunciado e começam imediatamente a dialogar resolvendo-a em conjunto, mesmo que estejam a realizar transformações de figuras diferentes. Ajudam-se mutuamente e as conclusões são sempre realizadas, em conjunto, pelos dois. Revelam ser bons comunicadores do trabalho que realizam e da forma como o fazem pois explicam, com todos os passos, (oralmente e por escrito) os vários raciocínios e procedimentos efetuados.

5.2.2. Desempenho da díade AB na realização das tarefas com os materiais manipuláveis

As tarefas com o geoplano

Desempenho dos alunos na realização das tarefas com o geoplano

Esta díade utilizou o geoplano com facilidade e desenvoltura. Nunca o tinham utilizado, mas facilmente perceberam como se colocavam os elásticos e depois de algumas experiências em que exploraram livremente o material, fazendo construções criativas, começaram a usá-lo como apoio à tarefa, na construção das isometrias pedidas.

Verificamos, por exemplo, na tarefa T_{14}, quando os alunos tinham de realizar a translação e precisavam de movimentar a figura de acordo com as indicações dadas, o faziam deslocando os dedos pelos pregos do geoplano, contando assim as distâncias e identificando o sítio (prego) para onde se deslocava cada ponto. Na mesma tarefa, para realizarem a rotação observamos que os alunos íam colocando outro elástico de cor diferente a unir o vértice da figura inicial, ao ponto de rotação, ao vértice do transformado correspondente. Quando lhes perguntamos porque é que estavam a fazer isso responderam que era para comprovar se a rotação fazia o ângulo pretendido. Ainda nesta tarefa, depois de fazerem a reflexão, estes alunos deslocavam uma régua pelos pregos do geoplano para confirmarem se cada ponto e o seu transformado se mantinham perpendiculares e equidistantes ao eixo de reflexão.

Contudo, quando os alunos copiavam a sua figura o transformado correspondente para o papel ponteado, tinham tendência a ignorar o geoplano e passavam a desenvolver todos os raciocínios a partir das imagens reproduzidas no papel. Foi o que aconteceu na tarefa T_2, representada na Figura 5.

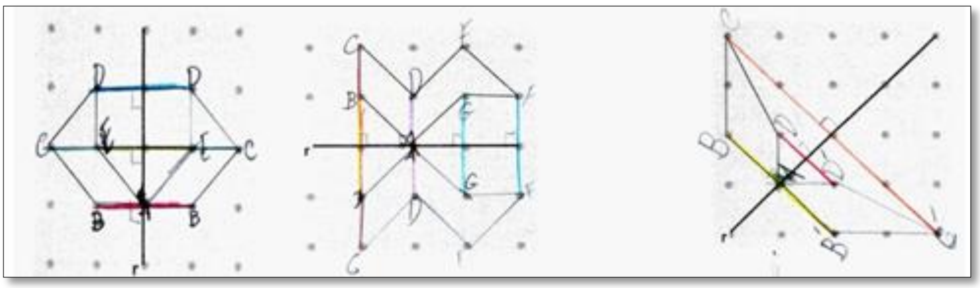


Figura 5. Reflexão -T_2 – Figuras no geoplano (díade AB)

Estes alunos passaram a figura e o transformado para o papel ponteado e foram rigorosos ao traçar com a régua cada polígono identificando os pontos na figura inicial e os respetivos pontos na imagem. Por sua iniciativa traçaram com cores diferentes cada segmento de reta que une cada ponto ao seu correspondente na imagem. Assinalaram com um quadradinho o ângulo reto que se forma no cruzamento do eixo de reflexão com as linhas auxiliares que unem cada ponto ao seu transformado.

Verificamos que a maioria dos seus raciocínios e argumentos se focaram no papel ponteado. No final da tarefa concluíram que, numa reflexão, *"o segmento de reta que une o vértice ao seu correspondente é sempre perpendicular ao eixo e temos de ter uma linha a medir a distância dos vértices até ao eixo, depois fazer essa distância para construir os vértices da outra figura e uni-los para obter a figura que queremos"* (T_2).

Os alunos revelam algum à vontade para realizar a reflexão e utilizar o geoplano nesta isometria. Observamos que na tarefa T_{14} os alunos tinham de desenhar uma figura (à sua escolha), traçar o eixo de reflexão, como entendessem, e depois construir a imagem. Observamos que os alunos escolheram fazer um eixo inclinado e afastado da figura, mostrando confiança e facilidade em realizar a isometria.

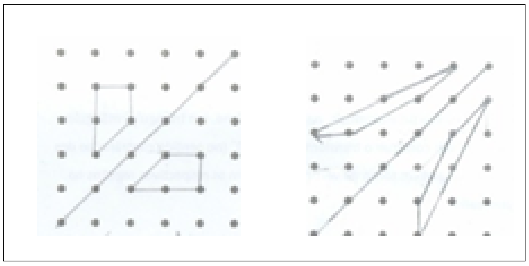


Figura 6. Reflexão – T_{14} – Transformações no geoplano (díade AB)

Para a rotação esta díade utilizou o geoplano de forma mais permanente. Pois construíram a figura e a sua rotação no geoplano. Passaram-na para o papel ponteado, mas apoiaram-se no geoplano para comprovarem que cada ponto tinha rodado 90˚, colocando um elástico de cor diferente a pôr em evidência o ângulo reto formado pela rotação de 90 graus de cada ponto.

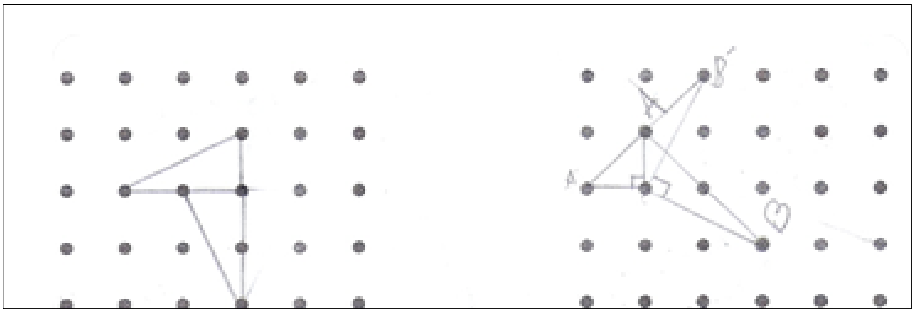


Figura 7. Rotação – T_{14} – Transformações no geoplano (díade AB)

Pela leitura da imagem , verificamos que rodaram bem o primeiro triângulo (90˚, sentido contrário aos ponteiros do relógio, centro de rotação é o ângulo reto). O segundo triângulo é escaleno e obtusângulo em vez de escaleno e retângulo, como era pedido na tarefa. Os alunos realizaram bem a rotação de 90˚, em torno de um ponto que não era o ângulo reto (pois nem sequer existia nesse triângulo). No papel ponteado, assinalaram corretamente os pontos da figura inicial e os pontos na imagem assinalando o ângulo reto que se desenha com a rotação.

> Professora: Construíram bem o triângulo?
> Aluno A: Sim… é um triângulo retângulo…(aponta para um ângulo reto)
> Professora: …mas qual era o triângulo inicial?
> Alunos A e B (depois de alguma discussão): Ah!...fizemos mal o triângulo…tem um ângulo obtuso em vez de reto.
> Aluno A: Mas está bem rodado, professora! (explica no geoplano, usando os elásticos)

Constatamos que os alunos perceberam como se deve realizar a rotação, uma vez que tiveram o cuidado de fazer rodar cada ponto, em torno do centro, a amplitude pedida e souberam-no explicar, através do geoplano.

Para a translação, o geoplano foi usado apenas na T_{14}. Nesta tarefa os alunos tinham de construir uma figura e a sua díade fazer a sua translação, de acordo com a direção, o sentido e a direção que o primeiro definisse, trocando, em seguida, de papéis.

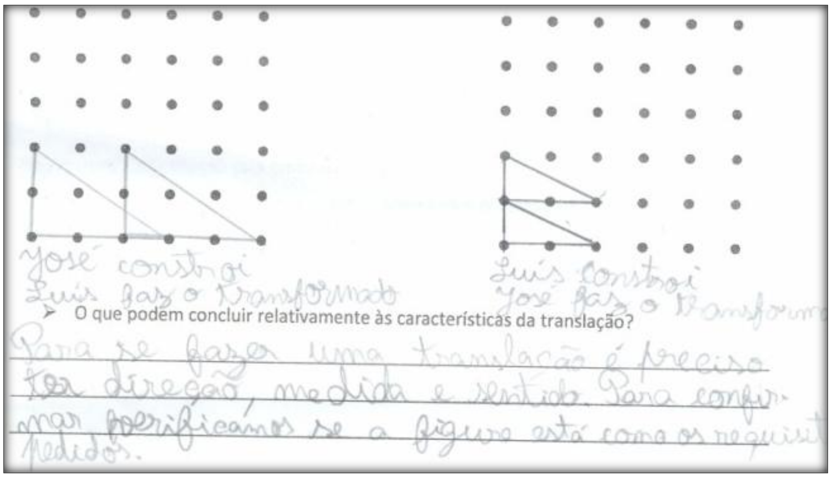


Figura 8. Tarefa$_{14}$ – translações com o apoio do geoplano (díade AB)

Constatamos que esta díade teve facilidade em fazer a translação com o geoplano. Apesar de terem realizado translações muito simples: duas quadrículas para a direita, num caso e uma quadrícula para cima, no outro.

Como síntese, podemos referir que o geoplano foi um apoio para estes alunos, especialmente na rotação e na reflexão onde, através do apoio facultado pelo geoplano, realizaram importantes conclusões sobre estas isometrias. O geoplano, quando explorado pelos alunos, permitiu-lhes elencar um conjunto de raciocínios durante a realização das tarefas relativamente às construções geométricas em estudo, potenciando a descoberta e aquisição do conhecimento matemático associado a este campo da geometria.

Reação dos alunos ao uso do geoplano

Esta díade esteve sempre envolvida e empenhada durante a realização das tarefas. Gostaram de utilizar este material e construíram todas as figuras no geoplano, colocando os elásticos conforme desejavam, com relativa facilidade, em todas as isometrias: reflexão, translação e rotação. Estes alunos gostaram de usar este material e consideraram-no importante para a compreensão das propriedades das isometrias estudadas. Em resposta ao questionário *(Q_2)* , sobre a importância do geoplano para a aprendizagem da reflexão referem que*"…é bom construir e* reconstruir *a figura e podê-la movimentar à nossa escolha. O geoplano é muito útil para fazermos a reflexão,* *porque podemos contar o número de pontos que vão da figura ao eixo e depois fazer a figura unindo os pontos"*

No caso da translação, os alunos são de opinião que o geoplano "*…é tão útil como o papel quadriculado, só que é um material diferente*"(Q_4). Para a rotação o geoplano volta a ganhar mais importância porque, para eles, "*o geoplano ajudou muito a fazer a rotação pois percebemos onde é que rodou e para onde rodou, pois conseguimos ver o vértice rodado mais facilmente e ficamos com uma ideia diferente das imagens"(Q_3).*

Estas respostas vão de encontro às nossas observações quando verificamos que os alunos manipulam o geoplano: rodam-no, olham para as figuras de diferentes ângulos, viram o geoplano fazendo ainda experiências com os elásticos, quer para verificarem a rotação ou translação dos pontos para as respetivas imagens ou para comprovarem a perpendicularidade de cada ponto e do seu transformado, relativamente ao eixo de reflexão, no caso desta isometria, conforme podemos comprovar por este diálogo retirado da entrevista 2.

> Professora: Por é que dizem que com o geoplano ficam com um ideia diferente das imagens*?*
> Aluno *B : Porque construímos as figuras e mexemos nelas…era mais difícil ver a reflexão e fazê-la se só estivessem no papel.*
> Professora: *E porque é que dizes isso?*
> Aluno B*: Porque no papel não vemos tão bem a transformação… (E_2*)

Em conformidade com este diálogo, verificamos, nas nossas observações, que estes alunos gostaram de utilizar o geoplano e que este contribuiu para os raciocínios e conclusões que foram elaborando. Ressaltamos ainda o facto de os alunos assinalarem (E_2) que seria mais difícil fazer as construções geométricas se não tivessem o geoplano, o que é um forte indício que o material manipulável é facilitador da compreensão destes conceitos.

As tarefas com o mira/ espelho

Desempenho dos alunos nas tarefas com o mira/ espelho

Com estes materiais realizamos quatro tarefas: três com o mira (T_0, T_{19}, T_{21}) e uma com o espelho - T_4.

Os alunos gostaram muito de utilizar o mira. Este foi o primeiro material que levamos para a aula e, como já referimos, a curiosidade e a alegria em torno do objeto foi transversal a todos os alunos. Todos "se miraram" através do mira, fazendo várias experimentações. Contudo, só quando o usaram na tarefa T_0 é que os alunos descobriram quais eram as potencialidades deste material. Nesta tarefa esta díade realizou a reflexão do boneco com o apoio permanente do mira. Contudo, no final da tarefa foram fazendo várias experiências, colocando o mira em diferentes posições relativamente a outros objetos que tinham em cima da mesa: lápis, borracha,… concluindo, no final da atividade, que *"o mira é como um espelho"(T_0)*. Segundo esta díade *"…a posição do mira é muito importante …se o mira estivesse noutra posição as imagens afastam-se ou aproximam-se uma da outra e se pudéssemos mover ambas as imagens para cima, uniam-se"(E_1),* frisam, enquanto fazem experiências com o mira.

Voltamos a usar o mira nas tarefas T_{18}, T_{19} e T_{21}. O objetivo do mira nestas atividades era ajudar os alunos a identificar e a traçar os eixos de simetria diversas figuras, em polígonos regulares e em triângulos, respetivamente. Verificamos que os alunos só usaram o mira em alguns casos, para confirmarem as situações onde tinham dúvidas ou para explicarem, um ao outro, quais eram os eixos de simetria da figura. Esta constatação leva-nos a concluir que os alunos perceberam bem o conceito de reflexão e de simetria de reflexão e que conseguem visualizar esta transformação sem terem de recorrer ao apoio facultado pelo material manipulável. Apesar disso, o material continua a ser útil porque utilizam-no sempre que têm dúvidas e, através da manipulação, argumentam à volta dos motivos que determinam que haja (ou não) este tipo de simetria (Figura 9).

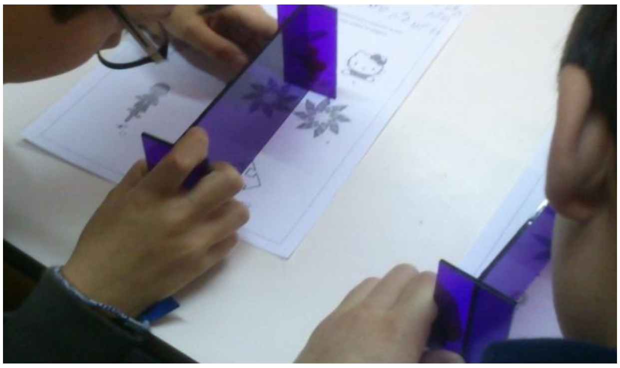


Figura 9. Utilização do mira – Tarefa 18

Na tarefa T_4 o material manipulável usado para a reflexão foi o espelho. Os alunos tinham de fazer a reflexão de quatro triângulos que estavam desenhados em papel liso (sem quadriculado ou ponteado).

Verificamos que os alunos sentiram muitas dificuldades em utilizar o espelho. Começaram a usá-lo, mas como não viam a sua mão a desenhar a figura no lado oposto, optaram por utilizar apenas a régua e o esquadro, conforme fica patente no seguinte diálogo estabelecido entre os alunos:

> Aluno A: O espelho não serve para nada, pois não?
> Aluno B: O espelho não dá para ver do outro lado…por isso vou fazer a construção sem o espelho.
> Aluno A: O espelho não ajuda…dá só para confirmar, mas não ajuda na construção.
> Aluno B: (reforça) Eu estou a fazer por medidas.

Neste seguimento, ambos os alunos, usando régua e esquadro traçaram as linhas auxiliares que consideraram necessárias e construíram a reflexão de cada triângulo, relativamente ao eixo apresentado (Figura 10).

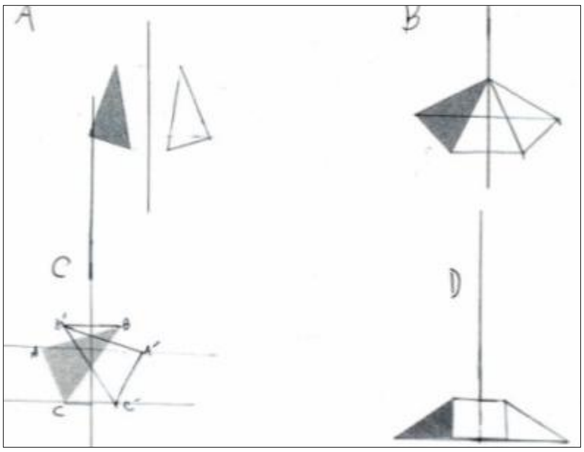


Figura 10. Reflexão – T_4- Reflexão dos espelhos (díade AB)

Verificamos que ambos os alunos fizeram a reflexão usando corretamente as propriedades da reflexão: assinalaram os pontos (apenas no caso do triângulo C, porque consideraram que *"era mais difícil ver para onde se desloca cada ponto"*, traçaram as perpendiculares com um esquadro, mediram os pontos correspondentes na figura e no transformado, equidistantes ao eixo e traçaram a imagem. Quando consideraram necessário prolongaram o eixo de reflexão. No final confirmaram as construções com o espelho.

Em relação à reflexão do triângulo C, o aluno A alude: "…*como o eixo está no meio do triângulo, tens de refletir dos dois lados…o lado direito refletes para a esquerda e a parte da esquerda refletes para o lado direito."*

Estes alunos revelam assim uma grande facilidade na construção da reflexão de uma figura e na determinação de eixos de simetria de reflexão. Usam o espelho e o mira, na maioria das vezes, apenas para confirmarem os raciocínios que conseguem elencar, de forma mais abstrata.

Em síntese, o material contribui para a aquisição do conhecimento matemático relativo à reflexão e à simetria de reflexão, especialmente o mira. Pela experimentação que os alunos realizaram nesta experiência didática, o material manipulável constitui-se num veiculo facilitador da descoberta das propriedades das transformações geométricas agora referidas.

Reação dos alunos ao uso do mira/ espelho

O mira e o espelho foram materiais que usamos para a reflexão e a simetria de reflexão. Observamos que, para os alunos, estas noções, por serem mais trabalhadas, são mais simples. Os alunos conseguem, com relativa facilidade fazer a reflexão de uma figura ou identificar eixos de simetria. Contudo, notamos por diversas vezes, que revelam confusão entre estes dois conceitos, usando-os de forma arbitrária.

Verificamos que esta díade utilizou corretamente estes materiais. Destes dois, gostaram de utilizar mais o mira e consideraram-no mais eficaz para realizar a reflexão e para determinar os eixos de simetria de reflexão de uma figura. Eles referem que "…*este material deu jeito, porque só tínhamos de pôr o mira em cima do eixo que a* *imagem aparecia refletida do outro lado e depois era só desenhar por cima, pois os seus lados transparentes permitiam ver a reflexão e desenhá-la"(Q_2).*

Relativamente à utilização do espelho na construção da reflexão dos triângulos, esta díade é de opinião que *"… ajudou a ver a reflexão, mas não ajudou a copiá-la pois não era transparente nos dois lados"(Q_2).* Referiram que não era útil na construção da isometria, porque "…*só permitia ver a imagem no espelho e não do outro lado, como acontece com o mira"(*E_1).

Constatamos, nesta sequência de tarefas e mediante as nossas observações e as respostas desta díade que os alunos usaram corretamente estes materiais e que estes contribuíram para a aprendizagem do conceito de reflexão e de simetria de reflexão. Os materiais, para esta díade, tem um papel importante por ser o motor que os leva a trocar argumentos e a desenvolver raciocínios. Verificamos que sempre que não precisam do apoio do material não o usam.

As tarefas com o papel (vegetal, acetato, quadriculado, ponteado, dobragens e recortes)

Desempenho dos alunos nas tarefas com o papel

O papel é um material que privilegiamos nesta experiência didática. Fizemo-lo porque é de uso corrente, prático e acessível e porque, pela sua manipulação e experimentação, permite a concretização dos conceitos que estão em estudo.

Com este material realizamos várias tarefas: o papel vegetal ou o acetato foi utilizado nas tarefas T_1, T_5, T_{10}, T_{12}, T_{13}, T_{20}; o papel ponteado ou quadriculado foi utilizado nas tarefas T_3,T_8, T_{11}, T_{15},T_{24} e as dobragens foram atividades realizadas nas tarefas T_{17} e T_{23}.

O papel vegetal foi o material que estes alunos mais utilizaram na rotação e foi o que consideraram mais útil e importante na realização das tarefas relacionadas com esta isometria. Como já referimos construímos as tarefas e sequenciamo-las no sentido de haver uma apropriação dos conhecimentos matemáticos e que progressivamente os alunos revelassem uma menor necessidade (dependência) da utilização dos materiais manipuláveis, pois é nosso objetivo que os alunos façam "a passagem" entre o concreto e o abstrato, fazendo uma apropriação do conceito de forma mais significativa. Por esse motivo, por exemplo, na rotação as primeiras tarefas recorriam à utilização do papel vegetal e posteriormente só já deveriam realizar a rotação através do apoio facultado pelo papel quadriculado (T_5).

Verificamos, contudo, que esta díade revelou algumas dificuldades em se libertar da utilização do papel vegetal. Na maioria das tarefas, mesmo que fizessem a rotação sem o papel vegetal, os alunos necessitavam de confirmar a transformação com este material. Como é ilustrado pela resposta dada a uma pergunta na tarefa T_5 quando os alunos referem que quando realizam uma rotação de 360˚, a imagem "*fica na mesma porque a rotação vai fazer com que a imagem do papel vegetal fique em cima da do papel. Depois de rodar 4/4 verifico que volta à figura inicial*"(T_5). Nesta tarefa, na parte final, os alunos deveriam rodar um retângulo, sem o apoio do papel vegetal e esta díade não conseguiu realizar a rotação sem recorrer ao material concreto. Depois de terem efetuado a rotação com o papel vegetal (Figura 11) os alunos insistiam que a figura tinha rodado 180 °, evidenciando dificuldades em visualizar a rotação de 90 °, sem saberem a posição do transformado nem por onde deveria rodar o polígono.

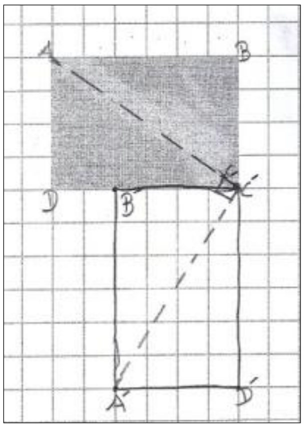


Figura 11. Rotação – T_5- À roda com as figuras (díade AB)

Professora: *Olhem bem para o centro da rotação e assinalem os pontos da figura inicial e para os respetivos pontos no transformado.*
(colocam os pontos na figura e na imagem)
Aluno B: O ponto vem para aqui…(diz, enquanto une os pontos A e A' ao ponto de rotação, assinalando o ângulo reto…)
Aluno B: *AH! Pois é! o ponto B vem para o B ʹ, este aqui é o D ´ …*
Aluno A: Professora, mas com o papel vegetal é muito melhor…vê-se logo!

Verificamos que, enquanto na reflexão e na translação, esta díade não tinha necessidade de utilizar o papel vegetal, na rotação continuavam-no a utilizar nem que fosse para confirmação, conforme comprovamos pela pergunta do aluno A "…*não posso usar a folha de papel vegetal para confirmar se isto está certo?* " (intervenção durante a realização da T_5).

O mesmo voltou a acontecer na tarefa T_6 e na T_{12} (Figura 12).

Figura 12. Utilização do papel vegetal na Tarefa 12

Na tarefa T_6 os alunos rodaram o polígono com o apoio do papel vegetal, ignorando o papel quadriculado.

Professora: Acham que a rotação está correta?
Aluno A: sim… (exemplifica com o papel vegetal)
Professora: Olha só para a rotação no papel quadriculado…
Aluno B: Está mal! Então não vês que está fora dos quadradinhos? Eu fiz pelos quadradinhos, professora (mostra a rotação do seu polígono).

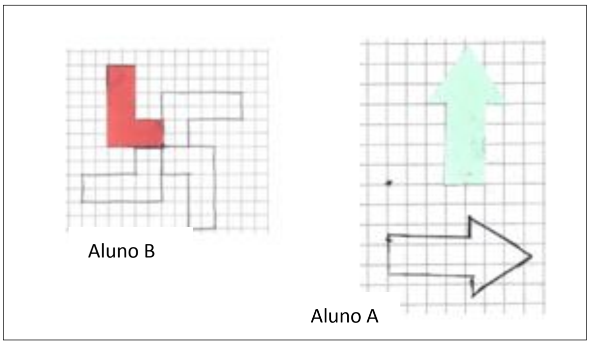


Figura 13. Rotação – T_6 – À roda com os polígonos (díade AB)

Em conformidade com estas observações, na tarefa T_{12}, onde era pedido para os alunos identificarem a isometria que transforma *a* em *b*, os alunos começaram por desenhar o pássaro no papel vegetal, e voltamos a verificar que não o utilizaram para identificar a reflexão, nem a translação. Tiveram necessidade de utilizar o papel vegetal para comprovar a reflexão deslizante e dificuldades acrescidas para identificar a rotação. As maiores dificuldades centraram-se na determinação do ponto de rotação. Os alunos sabiam que a transformação era uma rotação e íam realizando experimentações com o papel vegetal procurando encontrar o centro da rotação, que não estava assinalado.

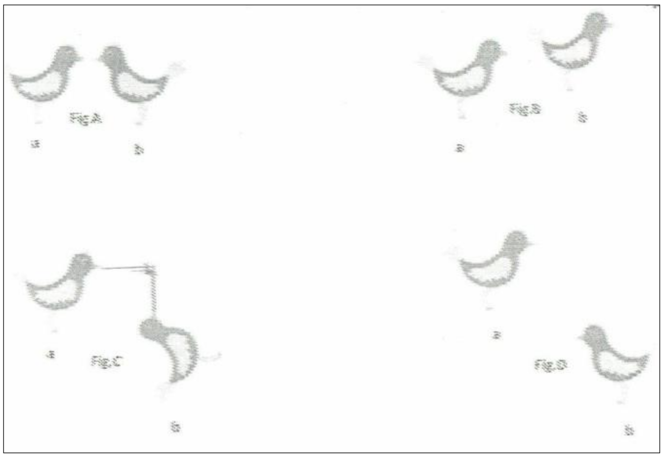


Figura 14. Isometrias – T_{12}- As voltas do passarinho (díade AB)

Depois de várias tentativas com o papel vegetal esta dupla conseguiu identificar o ponto de rotação. Nessa altura, quisemos perceber se os alunos conseguiam visualizar a rotação, sem usarem o papel vegetal.

> Professora: *Olhem com atenção para onde está o ponto de rotação…*
> Aluno A: (olhando para o ponto e para os bicos do pássaro) *ah! Rodou 90 ˚*
> Aluno B: *Pois é! Dá um ângulo de 90 ˚. Era mesmo fácil… (traçaram o ângulo reto, formado entre os bicos dos pássaros e o centro da rotação)*
> Aluno A: *Rodou 90˚ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio*.
> Aluno B: *Se fosse ao contrário rodava…90 + 90 + 90…270˚.*
> Aluno B: *O papel vegetal foi muito útil nesta atividade para confirmar e auxiliar-nos.*
> Professora: *Expliquem lá como fizeram?*
> Aluno B: *Na figura A usamos o processo de reflexão, na B houve translação, na C rotação de 90˚para a frente ou 270˚ para trás.*
> Aluno A: Na D fizemos reflexão e translação para baixo.

O papel vegetal voltou a ser utilizado por esta díade na reflexão deslizante. Na tarefa T_{10} era apresentada a imagem de duas borboletas, em que uma se transformava na outra através de uma reflexão deslizante. Os alunos começaram por desenhar a borboleta no papel vegetal. Fizeram várias experiências, movimentando o papel vegetal, experimentando se poderia ser a rotação de 180° ou a translação. Como não conseguiam, viraram a folha de papel vegetal (refletindo) e depois moveram a folha para baixo.

Aluno A: *professora, pode ser refletir e "transladar"?*
Professora: *Se der…expliquem lá isso…*
(Para explicarem estes alunos desenharam o papel quadriculado e refletiram a borboleta)
Aluna A: *Acho que já descobri… (diz, enquanto faz movimentos com o papel vegetal) e pode ser de duas maneiras diferentes…pode ser reflexão para o lado e translação para baixo ou 2º translação para baixo e reflexão para o lado"*
Professora: *então temos de fazer essas duas isometrias mas não importa a ordem pela qual se fazem?*
Aluno B: *Não!* (exemplifica com o papel vegetal)
Professora: *Lembram-se que nome tem essa propriedade?*
Aluno B (….) Comutativa… *não é professora?*
Professora: *Certo! Esta isometria tem propriedade comutativa e chama-se reflexão deslizante*.
Aluno A: *Claro! Ora vê… (usa o papel) reflete e desliza…*
Aluno B : …*ou desliza e reflete!*

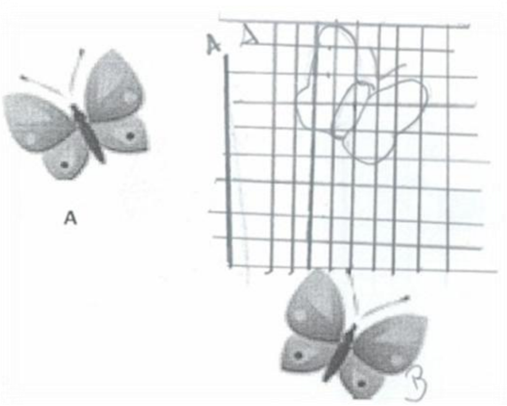


Figura 15. Reflexão deslizante – T_{10}- O voo da borboleta (díade AB)

Apesar de verificarmos uma grande dependência deste alunos nas primeiras tarefas de rotação com o papel vegetal, observamos que na última tarefa que realizamos: T_{24}, estes alunos construíram a rosácea sem o apoio do papel vegetal. Perguntamos-lhes porque é que não estavam a usar o papel vegetal e eles explicaram que, como na tarefa T_6, a figura que construíram tinha ficado *"mal no quadriculado",* resolveram fazer a rosácea orientando-se apenas pelo suporte do papel. Contudo, íam confirmando com o papel vegetal.

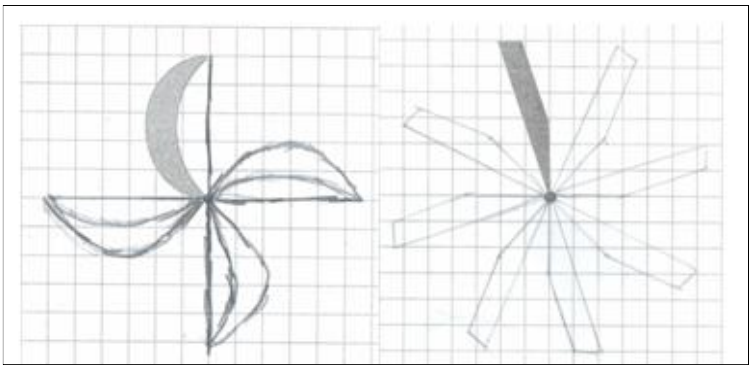


Figura 16. Rosáceas – T_{24}- À roda com as rosáceas (díade AB)

Na primeira rosácea traçaram duas retas perpendiculares a passar pelo ponto de rotação e orientando-se pelo quadriculado, realizaram corretamente as quatro rotações

Na construção da segunda rosácea procederam da mesma forma, fazendo inicialmente as rotações de 90˚, 180˚ e 270˚. Depois identificaram no quadriculado (com um pontinho) onde estava a metade do ângulo de 90˚ (A sua bissetriz – o ângulo de 45˚) e traçaram as rotações de 45˚, de 135˚, de 225˚ e de 315˚.

Contudo, apesar da destreza aqui revelado, esta díade tinha revelado algumas dificuldades na utilização do papel quadriculado (Figura 15) pois quando tiveram de realizar a translação com este material não faziam bem a isometria, porque não contavam as quadrículas corretamente deslocavam mal a figura. Observamos que na T_8 quando os alunos tinham de realizar e descrever uma translação de um trapézio, o faziam de forma incorreta. Da figura **a** para **a’’** os alunos teriam de deslocar o trapézio 15 quadrículas na horizontal.

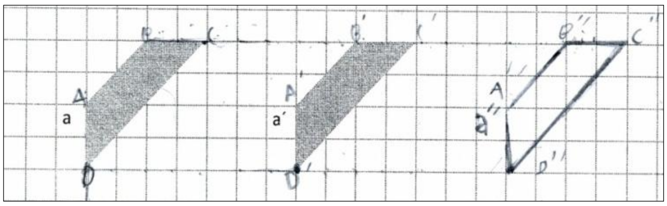


Figura 17. Translação – T_8- O deslize do trapézio (díade AB)

Verificamos que estes alunos deslocaram o trapézio 14 quadrículas, apesar de o polígono se manter congruente. Procuramos perceber porque é que tinha havido este erro:

Professora: O que é que aconteceu ao trapézio?
Aluno B: Andou para a frente…
Professora: Certo! Mas andou como?
Aluno A: Andou 15 quadrículas para a frente.
Professora: como é que contaram?
(o aluno exemplifica contando os quadrados)
Professora: Contaste as quadrículas! Repara o ponto A, por exemplo, deslocou-se para o A’’
Aluno B: Ah! Temos de contar as linhas…14 linhas!
Professora**:** Pois é! A distância é o comprimento do lado da quadrícula.

Nas outras tarefas com o papel quadriculado esta díade já não revelou dificuldades e utilizaram-no corretamente, quer na translação (T_9), quer na reflexão (T_3), quer na última tarefa de rotação (T_{24}).

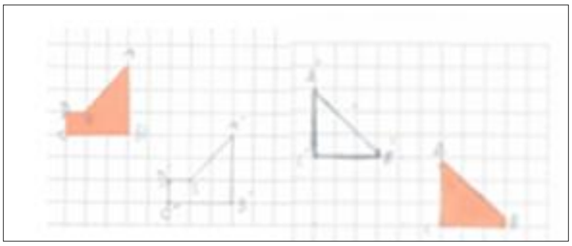


Figura 18. Translação – T_9- Polígonos em movimento definido (díade AB)

Nesta conformidade, na tarefa 9 os alunos retiram, um polígono de saco, colam-no e fazem a translação de acordo com as indicações que lá estão referidas. Como conclusão das propriedades desta isometria os alunos escrevem na ficha de trabalho que *“ao* fazermos *uma translação a figura movimenta-se para outro local tendo em conta a direção, o sentido e o comprimento. A figura translacionada tem a mesma área e é equivalente à inicial"(T_9).*

Na tarefa 3 usamos o mesmo procedimento e o mesmo material, mas relativamente à reflexão (Figura 19).

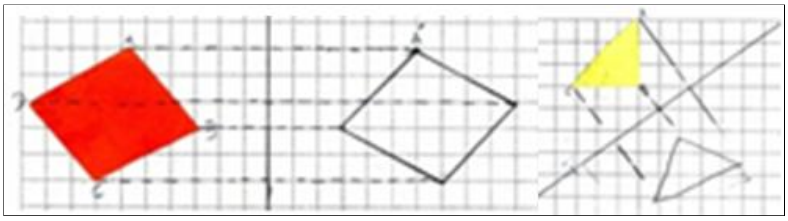


Figura 19. Reflexão – T_3- A reflexão dos polígonos (díade AB)

No final da tarefa estes alunos explicam que para fazerem a reflexão “ fizemos *linhas perpendiculares ao eixo passando pelos pontos. Depois fizemos uma linha igual* *com a mesma medida da outra e fizemos o mesmo com os outros vértices. Unimos todos os pontos e* formamos a reflexão da figura" (T_3).

Como já salientamos a utilização do papel esteve muito presente nesta experiência didática, pois consideramos que é um material acessível ao contexto de uma sala de aula e que permite a realização de várias atividades promotoras da visualização das transformações que estamos a estudar. Neste sentido, para trabalharmos o conceito de simetria realizamos duas tarefas com recortes e dobragens (T_{17} e T_{23}). Os alunos encararam estas tarefas como se fossem atividades lúdicas e desenrolou-se em torno destas atividades muito entusiasmo e participação. Na T_{17} designada de "Mata borrão", os alunos colocavam guaches no interior de uma folha A_4 (como quisessem) e depois dobravam-na uma vez, vincando a dobra, desdobrando.

Esta díade realizou diferentes experiências e obteve várias imagens. Pedimos-lhes para fazerem dois conjuntos diferentes com os mata-borrões que tinham obtido, mas os alunos agruparam-nos por cor sem perceber que o objetivo da professora era que separassem as figuras com reflexão das figuras com simetria. Então retiramos nós dois exemplares (Figura 20) e questinamo-os:

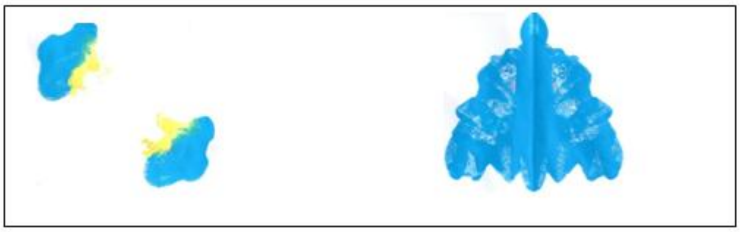


Figura 20. O mata-borrão – díade AB

Professora: O que é que podem dizer relativamente a estas imagens?
Aluno B: Quando dobramos fez-se a reflexão para o outro lado.
Professora: Mas o que é que as figuras têm de diferente?
Aluno B: Na minha é só uma imagem e na dele são duas…
(exploração como toda a turma)
Professora: Meninos em que circunstâncias é que podemos dizer que há apenas uma reflexão e quando é que podemos dizer que essa reflexão é também uma simetria?
Aluno A: *Uma simetria é quando, por exemplo, temos metade de um círculo colado ao eixo e quando refletimos fica um círculo completo. A simetria tem de ser sempre na mesma figura.*

Na T_{23}, depois de os alunos realizaram algumas dobragens e recortes, conforme estava descrito no procedimento e desdobrarem a folha teriam de identificar as simetrias dessa figura.

Verificamos que os alunos apesar de realizarem as dobragens conforme estava descrito, realizaram recortes usando da sua criatividade (Figura 21).

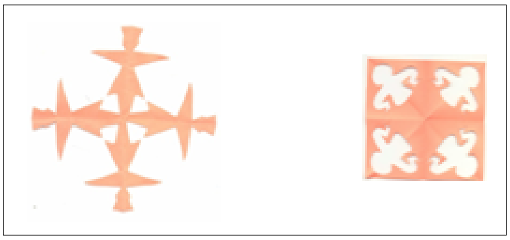


Figura 21. Simetrias – T_{23} - Dobragens (díade AB)

Professora: … e então o que é que podem dizer acerca das simetrias dessas figuras?
Aluno A: Que temos 4 reflexões com 2 eixos oblíquos, 1 horizontal e 1 vertical.
(enunciam conforme vão dobrando a folha)
Aluno B: E que também há rotações de ordem 4 de 90 °, cada volta. (dizem-no rodando a folha com o dedo no centro da rosácea)

Observamos que os alunos gostaram muito de realizar esta atividade e que, através dela conseguiram retirar conclusões e fazer algumas generalizações acerca das rosáceas.

Aluno A: Oh professora, nas rosáceas o número de reflexões e de rotações é sempre o mesmo número!
Professora: Se calhar, aqui acontece…mas será que podes generalizar apenas com um exemplo?
Aluno A: Não sei! Mas eu em casa vou experimentar com outras e amanhã digo-lhe…

Neste seguimento, verificamos que através destas tarefas que para os alunos tiveram um caráter muito lúdico, podemos clarificar os conceitos de simetria de reflexão e de reflexão e que foram os alunos que, através da exploração dos materiais, chegaram a estas conclusões.

Reação dos alunos ao uso do papel

Pela nossa observação, o papel vegetal é um material do agrado dos alunos. Os alunos gostam de desenhar as figuras no papel e depois realizar o movimento correspondente à isometria que estão a trabalhar. Consideramos que na reflexão este papel foi facilitador do trabalho pois como referem "*este material ajudou-nos nesta tarefa porque conseguimos desenhar a figura original e virando o papel obtivemos a reflexão".* Contudo, verificamos que, muitas vezes, os alunos não tinham necessidade deste suporte e realizavam a reflexão apoiando-se apenas no papel quadriculado, só usando o papel vegetal (ou acetato) em caso de dúvida.

No que diz respeito à realização ou confirmação da rotação a atitude e opinião dos alunos muda completamente pois consideram que "n*a rotação o papel vegetal dava muito jeito, porque desenhávamos a figura com o ponto de rotação, púnhamos o lápis no ponto de rotação, girávamos os graus que nos mandavam girar e a figura ficava perfeita".* Pela nossa observação, também verificamos que sempre que os alunos tinham de realizar uma rotação usavam o papel vegetal (Figura 22).

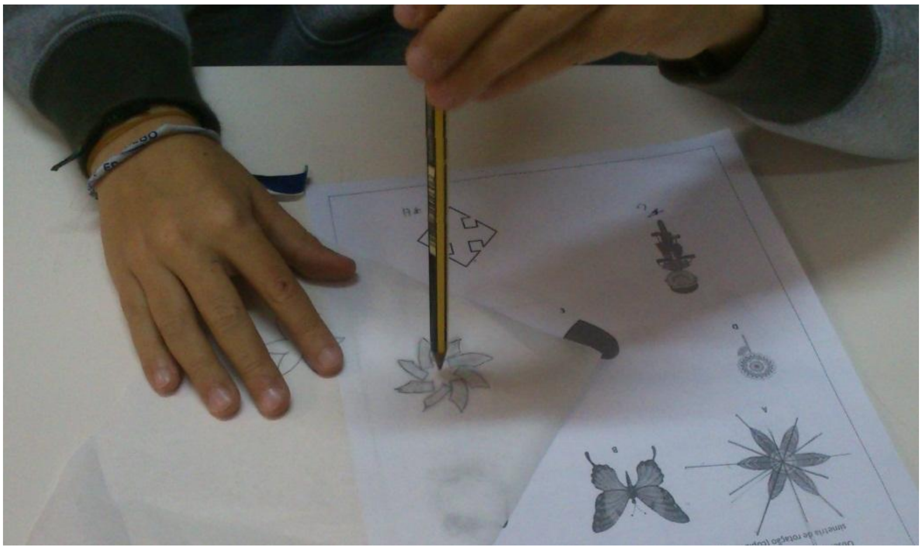


Figura 22. Utilização do papel vegetal na rotação (díade AB)

Nas tarefas relacionadas com a translação o material mais apreciado pelos alunos foi o suporte do papel quadriculado porque "c*onseguíamos dirigir e deslocar a figura mais facilmente graças às distâncias do quadriculado*". Segundo esta dupla, para a realização da translação, o material mais importante é o papel quadriculado, sendo que o papel vegetal também é útil porque permite verificar se a figura continua congruente.

Nas tarefas relacionadas com a simetria de reflexão o papel também foi um suporte importante. Verificamos que, em caso de dúvida, ou para confirmação os alunos dobravam o desenho, pelo que consideravam ser o eixo de reflexão, para verificar se as duas partes coincidiam. No caso da simetria de rotação a necessidade de utilizar o papel vegetal é determinante para identificar o ponto de rotação, mas principalmente a ordem de rotação, no caso das rosáceas.

5.3. Caso CD

5.3.1. Caracterização da díade

A díade CD é constituída por duas alunas que revelam aproveitamento satisfatório a matemática. São alunas interessadas, participativas, organizadas e empenhadas. A aluna C revela pouca confiança. Verificamos que consegue resolver muitas situações matemáticas autonomamente, mas revela insegurança não sendo capaz de argumentar e justificar os seus raciocínios, acabando por aceitar as resoluções dos seus colegas, quando são divergentes da sua. Segundo o inquérito realizado no início da investigação refere que *"acho que nem sempre percebo a matéria e tenho dificuldades na resolução de problemas" (Q_1)*. A aluna D tem um comportamento assertivo. É uma aluna com aproveitamento mediano, mas é muito participativa e autónoma durante as aulas, assumindo, nesta díade, o papel de líder.

Observamos que perante uma tarefa a aluna D começa logo a ler o enunciado e a sublinhar o que considera mais relevante. É também ela a primeira a começar a utilizar os materiais. A aluna C acompanha a colega e vai dando a sua colaboração, mas essencialmente segue os procedimentos realizados pelo seu par. Apesar do exposto, consideramos que esta díade revela uma boa dinâmica de trabalho apoiando-se mutuamente.

5.3.2. Desempenho da díade CD na realização das tarefas com os materiais manipuláveis

As tarefas com o geoplano

Desempenho dos alunos nas tarefas com o geoplano

O geoplano foi utilizado pela díade com curiosidade. Como a maioria dos colegas, durante a exploração livre do material, realizaram diferentes construções de figuras à sua escolha, aprendendo a colocar os elásticos nos pregos. Depois desta fase, durante a realização das tarefas, utilizaram o geoplano como suporte à realização das tarefas, conforme era solicitado nas diferentes atividades. Observamos que as alunas não revelaram dificuldades em utilizar o material, revelando gosto e empenho na construção das figuras.

Salienta-se que estas alunas revelaram muita organização e rigor na passagem das imagens para o papel ponteado, fazendo sempre as construções com uma régua. Assinalaram corretamente cada ponto da figura inicial e os respetivos pontos na imagem, como é demonstrado na Figura 23 – reflexão de eixo vertical de um polígono irregular.

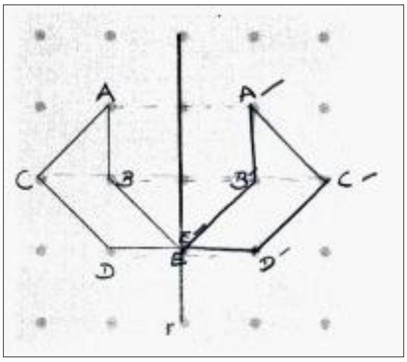


Figura 23. Reflexão – T_2- Figuras no geoplano (díade CD)

Nesta tarefa (T_2), após a realização da primeira reflexão (de eixo vertical) era pedido aos alunos para descreverem a transformação. Observamos que esta díade, apesar de ter realizado bem a reflexão, não conseguia fazer nenhuma descrição, evidenciando dificuldades na comunicação (oral e escrita) matemática. Por esse motivo, questionamos as alunas:

Professora: *Olhando para a figura e para a sua imagem o que podem concluir?*
Aluna D: *tombamos a figura como fizemos com o acetato…*
Aluna C: *as duas figuras são iguais, mas viradas ao contrário.*
Aluna D: *as imagens são equivalentes, têm a mesma área e o mesmo perímetro, mas estão desenhadas opostamente.*
Professora: *…mas como é que se constrói a reflexão?*
Aluna C: *Vira-se ao contrário…*
Professora: *Olhem só para o eixo de reflexão e para as linhas a tracejado que unem cada ponto ao seu transformado…o que verificam?*
Aluna C: *O eixo divide as linhas a tracejado a meio*.
Aluna D: *Olha só para aqui!...(aponta para duas perpendiculares, entre o eixo e uma das linhas a tracejado). Fazem um ângulo reto…sempre…*
Professora: Façam as outras reflexões e depois vejam se conseguem justificar melhor a vossa ideia.

É de realçar que as alunas reconhecem a congruência das figuras na reflexão, fazendo bem a sua construção, mas não conseguem "ver" nem enunciar as propriedades da reflexão.

As alunas voltaram a focar-se no geoplano e realizaram as outras duas construções pedidas (de eixo horizontal e inclinado).

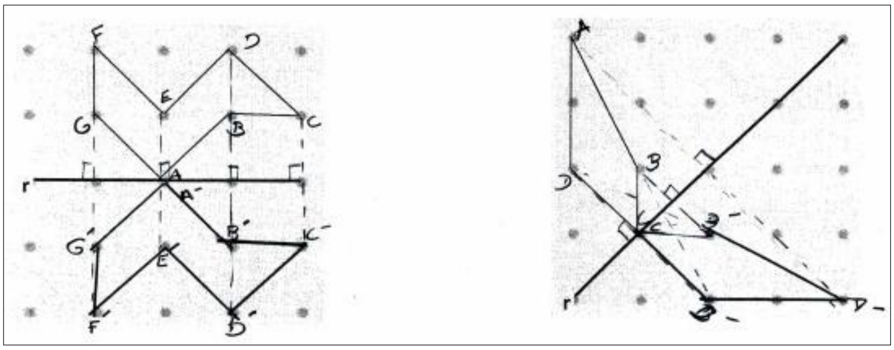


Figura 24. Reflexão – T_2- Figuras no geoplano (díade CD)

Fizeram os procedimentos referidos na T_2: assinalaram os pontos da figura inicial e da imagem e traçaram, a tracejado, as linhas que unem cada ponto ao seu transformado.

Verificamos que, nesta altura, as alunas focaram as atenções nas figuras construídas no papel ponteado, deixando de usar o geoplano.

Aluna D: Lembras-te do que eu disse? …Isto faz sempre um ângulo reto… (assinala os ângulos retos no papel ponteado)
Aluna C: Então o que é que escrevemos?

Para explicarem as propriedades da reflexão estas alunas realizam o seguinte registo.

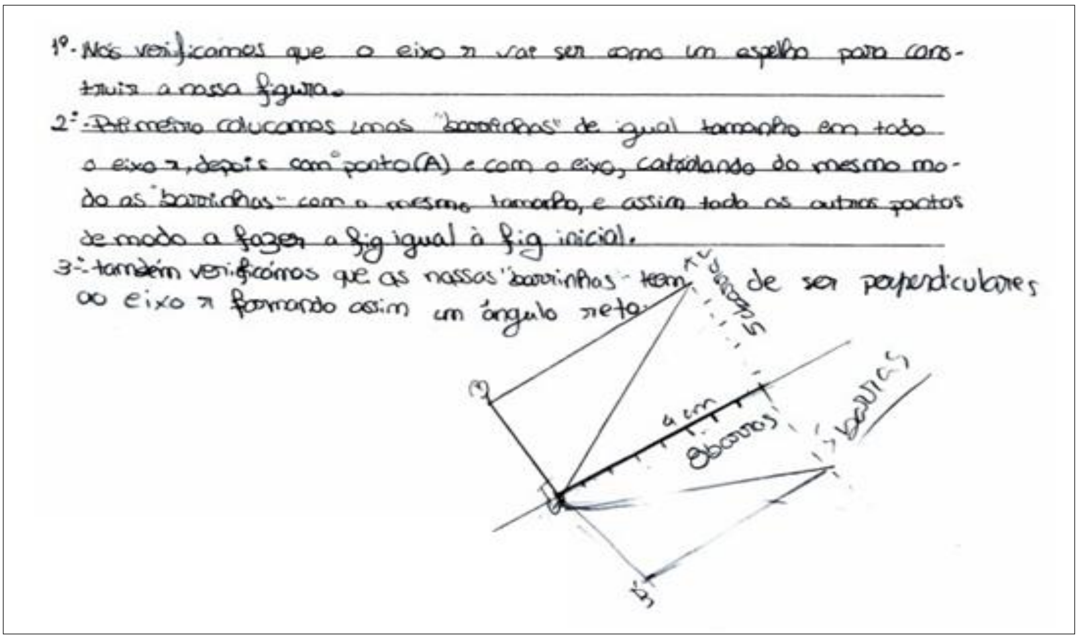


Figura 25. Reflexão – explicação das propriedades- díade CD

Aferimos, pela descrição realizada na Figura 25 por estas alunas que para transmitirem a noção de reflexão, se apoiam na imagem transmitida pelo espelho, apoiando-se, novamente, no concreto dos objetos. Contudo, nos pontos 2 e 3 da sua descrição conseguem explicar que a distância que vai do ponto A ao eixo tem de ser a mesma que vai até ao A' e que o segmento que une AA' tem de ser perpendicular ao eixo, ou seja que o eixo é a mediatriz do segmento AA'.

Observamos assim que estas alunas utilizam corretamente o geoplano, fazendo bem as construções pedidas (Figura 26).

Figura 26. Utilização do geoplano – díade CD

Contudo, verificamos que as alunas têm muita dificuldade em explicar os procedimentos utilizados e para elaborarem as suas conclusões complementam os seus raciocínios com os argumentos que conseguem elaborar através do papel ponteado.

Por exemplo na T_{14}, as alunas fazem corretamente as reflexões pedidas no geoplano e no papel ponteado, mas para formularem as suas conclusões relativamente à reflexão (T_2) referem que para comprovaram se a reflexão foi bem realizada *"temos de imaginar a folha a fechar pelo eixo e as figuras têm de bater uma na outra*", apoiando-se muito na concretização possibilitada pela utilização do material e revelando dificuldades em explicar os passos realizados.

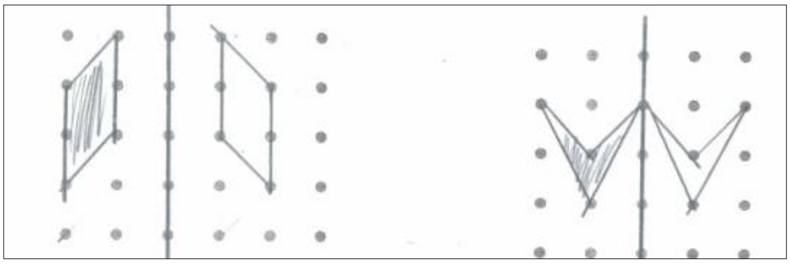


Figura 27. Reflexão – T_{14}- Transformações no geoplano (díade CD)

Contudo, no final da tarefa 14 elaboraram o seguinte registo que procura explicar os procedimentos e propriedades da reflexão (Figura 28).

1º temos que ter atenção ao eixo,
2º temos que ter atenção aos pontos, pois eles tem que coinsidir
3º temos que medir as distâncias que vão do ponto ao eixo e do eixo ao ponto
4º No final temos de ter atenção porque se imaginarmos a folha a fechar as figuras tinham que bater uma na outra.

Figura 28. Reflexão (díade CD) - explicação das propriedades da reflexão – T_{14}

Observamos ainda que as alunas íam movimentando os dedos pelos pregos para determinarem para qual prego se deslocava cada ponto, enquanto falavam uma com a outra.

O mesmo verificamos na realização da rotação. Estas alunas, para fazer a rotação no geoplano, adotaram a seguinte metodologia: colocavam um lápis no ponto de rotação (no geoplano) e depois com os dedos nos pregos íam dizendo para que prego rodava cada vértice.

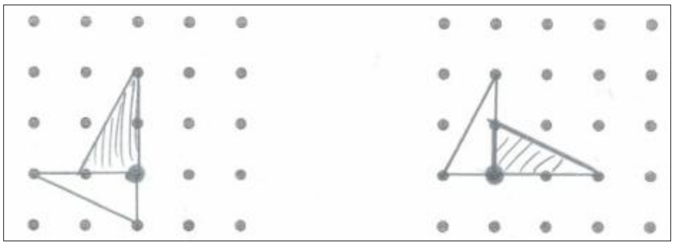


Figura 29. Rotação – T_{14}- Transformações no geoplano (díade CD)

No final da tarefa 14, estas alunas corroboram as nossas observações, através do seguinte registo.

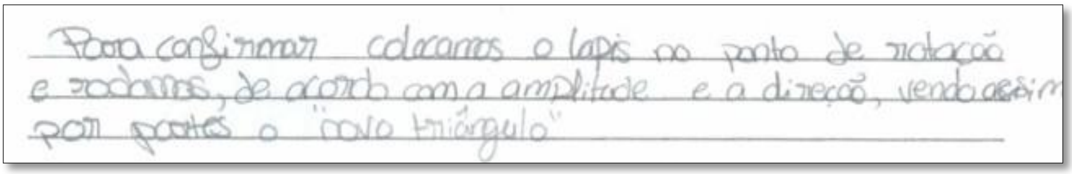

Para confirmar colocamos o lapis no ponto de rotação e rodamos, de acordo com a amplitude e a direcção, vendo assim por partes o "novo triângulo"

Figura 30. Rotação - explicação da díade CD

Reação dos alunos ao uso do geoplano

Constamos que esta díade gostou de trabalhar com o geoplano e fê-lo de forma muito participada. Usaram-no em todas as isometrias e apoiaram-se neste material para fundamentar os seus raciocínios, referindo que com o geoplano *"conseguimos ver a figura como realmente era"(*Q_2). Relativamente aos requisitos que, segundo estas alunas, tornam este material importante no estudo das transformações geométricas *"depende muito da isometria que temos de realizar"*. Ao longo do estudo, nas diferentes tarefas com o geoplano, observamos que esta dupla usa o geoplano com destreza e em função das tarefas, de acordo com as instruções dadas, referindo que o geoplano é um material *"útil para aprendermos as reflexões porque permite-nos* *mover a figura à nossa escolha"* (Q_2). Verificamos que as alunas movimentam os dedos pelos pregos do geoplano para determinarem o comprimento dos lados das figuras e a distância entre cada ponto e o seu transformado.

Estas alunos gostaram de usar este material principalmente na rotação pois consideram que *" é muito bom pois parece que vemos a figura a rodar ou podemos mexer o geoplano e ver a rotação a acontecer"(*E_2). Verificamos isso nas aulas com o geoplano quando observamos que as alunas rodavam o geoplano para ter uma perspetiva, mais concreta, do movimento. As tarefas onde menos gostaram e usar o geoplano, não o considerando necessário foi na translação pois frisam que *"gostamos de fazer a translação no geoplano mas se fizéssemos a tarefa só com o papel quadriculado, conseguíamos fazê-la na mesma"(*E3).

As tarefas com o mira/ espelho

Desempenho dos alunos nas tarefas com o mira/ espelho

Como temos vindo a referir o mira foi dos materiais que os alunos mais gostaram de utilizar e esta díade não foi exceção. Como conclusão da tarefa T_0 estas alunas registam *que "a imagem que nós desenhamos ficou idêntica à imagem real. O mira ajudou-nos a desenhar pois refletiu como um espelho."* Curiosamente, verificamos que quando usaram o espelho (tarefa 4) não o consideraram útil nem facilitador na construção desta isometria. As alunas colocavam o espelho no eixo de reflexão e olhavam pelo espelho, vendo a reflexão do triângulo respetivo, mas quando olhavam para o outro lado do espelho e tentavam realizar a reflexão ficavam confusas pois não viam a imagem que tinham de construir.

Como estavam com dificuldade para desenhar a reflexão dos triângulos e não tinham o suporte do papel quadriculado ou ponteado, a aluna C ainda tentou colocar a folha da tarefa por cima do papel quadriculado do caderno diário, no entanto não tinha visibilidade, e acabou por desistir da estratégia.

Aluna C: *Vou colocar a minha folha por cima do quadriculado do caderno para ajudar…*
Aluna D*:…se eu fizer pelos pontos vai dar certo…mas no espelho não aparece…*

Observamos que optaram por fazer a reflexão sem o apoio do espelho: traçaram retas perpendiculares ao eixo e fizeram as medições necessárias. Verificamos que, inclusive, mediram os lados do triângulo para que a figura e o seu transformado fossem congruentes. No final da tarefa usaram o espelho para confirmar a transformação.

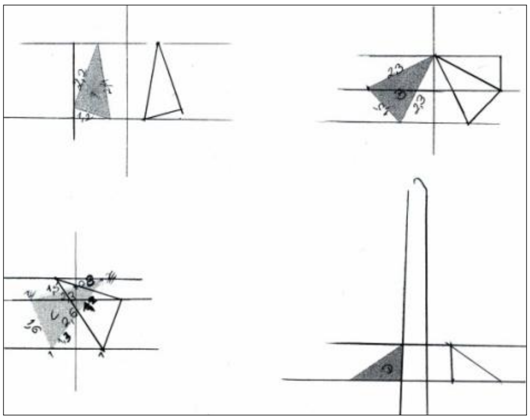


Figura 31. Reflexão – T_4- Triângulos ao espelho (díade CD)

Desta forma, comprovamos que esta díade utilizou corretamente os procedimentos para realizar a reflexão, sem o apoio do material manipulável. Apesar disso, observamos que sempre que tinham o mira, utilizavam-no. Foi o que aconteceu nas tarefas T_{19} e T_{21}. Nestas tarefas, um dos objetivos era identificar e traçar os eixos de simetria de reflexão e estas alunas usaram o mira em todas as imagens.

Professora: *Ainda precisas de usar sempre o mira para ver se há simetria?*
Aluna C: *Não...mas é giro, por isso uso. Outras vezes não vejo bem e é para confirmar*.
Aluna D: *Mas se não o tivéssemos fazíamos na mesma! Mas assim é mais fixe!*

Nesta sequência, consideramos que estas alunas sabem fazer a reflexão e conhecem as suas propriedades, no entanto têm dificuldade em comunicar e explicar os procedimentos que usam e as conclusões a que chegam.

Este procedimento não estava de acordo com as nossas expectativas pois considerávamos que as alunas iriam sentir muitas dificuldades em realizar as reflexões C e D, pelas razões já anteriormente referidas: na imagem C tem e eixo no meio da figura e na imagem D o espelho físico não corresponde ao espelho matemático. Contudo, as alunas ultrapassaram as expectativas da professora e utilizando outros materiais (em vez do espelho, a régua e o esquadro) realizando corretamente as reflexões solicitadas.

Reação dos alunos ao uso do mira/ espelho

Estas alunas gostaram muito de utilizar o mira e consideraram-no muito útil para fazer a reflexão porque *"projeta a imagem e assim podemos desenhá-la"* (Q_2).

Em relação ao espelho dizem não ter gostado deste material e frisam que *"não nos ajudou nada* na realização da tarefa"(E1).

A nossa observação também vai de encontro a estes registos pois esta díade usou sempre o mira com entusiasmo e gosto e nas últimas tarefas, apesar de já não necessitarem do material de forma permanente, faziam-no porque o consideravam divertido e facilitador.

As tarefas com o papel (vegetal, acetato, quadriculado, ponteado, dobragens e recortes)

Desempenho dos alunos nas tarefas com o papel

Relativamente à utilização do papel como apoio à realização das tarefas, observamos que estas alunas revelaram muita facilidade em utilizar o papel quadriculado em todas as tarefas e facilmente conseguiam orientar-se pelo quadriculado do papel.

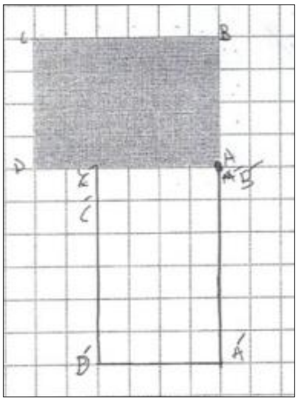


Figura 32. Rotação de um retângulo (T_5) – díade CD

Verificamos isso, por exemplo na tarefa 5 (T_5) quando na parte final da tarefa, as alunas rodaram o retângulo orientando-se apenas pelo papel quadriculado ou na tarefa T_3 – A reflexão dos polígonos, quando observamos que a aluna D fez questão de escolher um polígono mais complicado e traçou um eixo inclinado para realizar a reflexão, mostrando confiança e empenho para realizar a atividade.

Nesta tarefa observamos que a aluna C retirou do saco um triângulo e a aluna D um dodecágono em forma de cruz (porque o escolheu). A aluna C traçou um eixo vertical e colou a figura fazendo um vértice do seu polígono coincidir com o eixo de reflexão enquanto a aluna D colou a sua figura afastada de um eixo que traçou na diagonal.

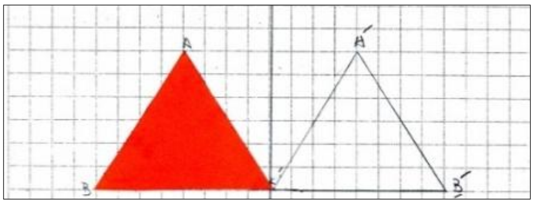


Figura 33. Reflexão – T_3 – A reflexão dos polígonos (aluna C)

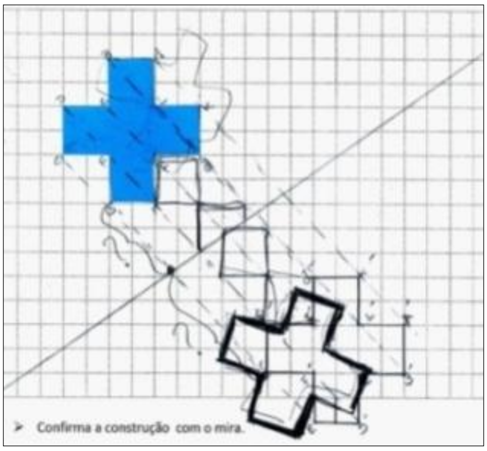


Figura 34. Reflexão – T_4- A reflexão dos polígonos

A aluna C Fez a sua reflexão com muita facilidade (Figura 33), enquanto a sua colega, muito concentrada, fazia a sua transformação (Figura 34). Fez a reflexão para a imagem que está "mais a carregado".

Professora: *Achas que a reflexão está bem-feita?*
Aluna D: *Espere aí…(*dobrou a folha pelo eixo para ver se a figura e a sua imagem se sobrepunham). *Não…mas eu fiz bem!*
Professora: *Como é que fizeste?*

Aluna D: *Contei a distância, em quadrados, que vai da figura até ao eixo e depois fiz o mesmo para o outro lado e imaginei que a figura ficaria mais ou menos assim…*. (desenhou no quadriculado os quadrados a que se referia) *Ah! Não dá…os quadrados não são os mesmos!*
Professora: *Coloca os pontos no teu polígono e depois começa a refletir ponto por ponto…*

A aluna D começou a identificar os vértices na figura inicial, traçou linhas auxiliares (a tracejado) perpendicularmente ao eixo, verificou, pelo quadriculado, se o ponto e o transformado eram equidistantes ao eixo e traçou o transformado. No final, voltou a dobrar a folha e confirmou a reflexão.

Enquanto isso, a aluna C, por sua iniciativa, tirou outro polígono, desta vez um hexágono irregular e colando afastado do eixo realizou os mesmos procedimentos da colega.

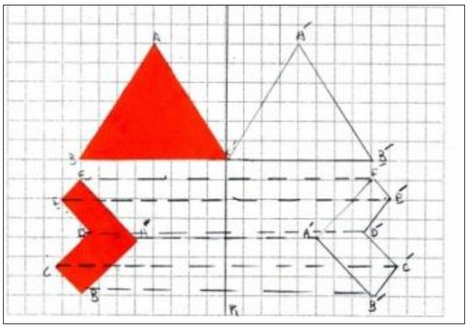


Figura 35. Reflexão – T_3- A reflexão dos polígonos – continuação (aluna C)

Nesta continuidade, registamos a mesma facilidade desta díade em utilizar o papel quadriculado na T_6. As alunas tinham de retirar um polígono do saco e realizar a rotação, segundo as indicações referidas no polígono.

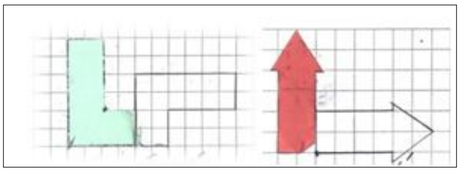


Figura 36. Rotação de um polígono (T_6) - díade CD

Esta díade rodou os seus polígonos 90˚, no sentido dos ponteiros do relógio, em torno de um vértice assinalado na figura. Fizeram-no apenas orientando-se pelo papel quadriculado.

Quando lhes pedimos para explicarem como é que se faz a rotação fizeram os seguintes desenhos para explicar.

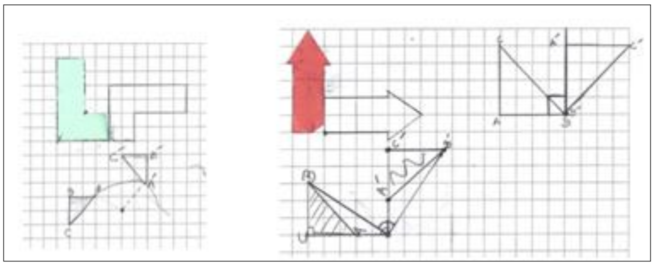


Figura 37. Rotação – explicação gráfica da díade CD

Professora: Como é que fizeram a rotação?
Aluna D: Contamos os quadrados…unimos cada vértice da figura original ao ponto de rotação e cada ponto roda aquilo que quisermos.
Professora: Como é que ficam as figuras depois da rotação?
Aluna C: Ficam iguais porque tem a mesma área…só roda.

No final da tarefa, na ficha de trabalho, esta díade conclui que numa *rotação "…todos os pontos da figura inicial rodam 90 ° em torno do ponto de rotação. 1º A figura é equivalente, tem a mesma área, os mesmos ângulos, os mesmos lados e o mesmo perímetro. 2º É preciso saber a amplitude dos ângulos, para que lado vai rodar e o ponto de rotação." (T_6)*

Na tarefa T_9 trabalhamos a translação com o papel quadriculado. Estas alunas fizeram corretamente a translação de um triângulo isósceles (Figura 38) e de um hexágono irregular (Figura 3)). As alunas assinalaram (sem lhes ser pedido) os pontos na figura inicial e os respetivos pontos na imagem. Concluíram que *"todos os pontos têm de andar de modo a corresponder às indicações dadas"(T_9)*. No caso do triângulo, duas quadrículas para baixo e 4 para a esquerda e no caso do hexágono, 3 quadrículas para a direita e duas para cima. Referiram que as figuras "*sobrepostas são exatamente iguais*"(T_9) e que para se fazer uma translação "*tem de se saber para que lado vai a figura e quantas quadriculas se move*"(E_3).

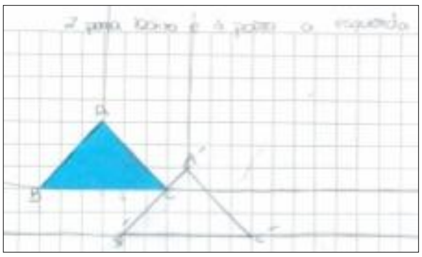


Figura 38. Translação de um triângulo – Aluna C - T_9

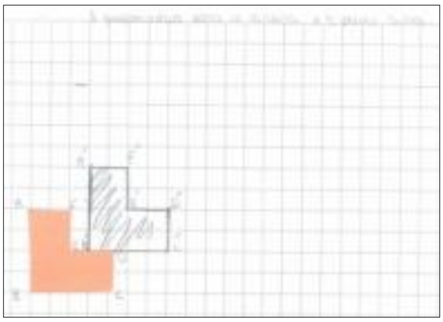


Figura 39. Translação de um hexágono – Aluna D - T_9

Apesar da facilidade em utilizarem o papel quadriculado esta díade revelou desenvoltura e destreza na utilização do papel vegetal. Utilizaram-no na primeira parte da tarefa 5 (T_5), na rotação da bandeira (Figura 40).

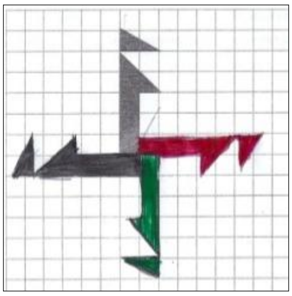


Figura 40. Rotação da bandeira – T_5 – díade CD

O papel vegetal voltou a ser utilizado na tarefa 10 (T_{10}) – Figura 41. Nesta atividade os alunos tinham de explorar as imagens e descobrir como é que uma borboleta se transforma na outra. Neste momento ainda não tinham o conceito de reflexão deslizante.

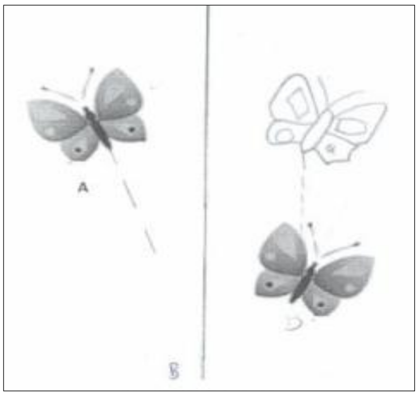


Figura 41. O voo da borboleta

Usando o papel vegetal , as alunas tentaram rodar a figura , aproximadamente 45˚ e depois fazer uma translação. A determinada altura a aluna C verificou que a borboleta não é totalmente simétrica e que por isso teriam de fazer uma reflexão de eixo vertical, seguida de uma translação. Demoraram algum tempo até definirem onde seria o eixo de reflexão…

Professora: *o que estão a fazer?*
Aluna C: *Está difícil descobrirmos onde é o eixo de reflexão…se tivéssemos o papel quadriculado era mais fácil…*
Professora: *Porquê?*
Aluna D: *Porque temos de saber exatamente onde reflete para depois podermos fazer a translação para baixo…*

Voltamos a utilizar o papel vegetal na tarefa 12 (T_{12})- As voltas do passarinho. Nesta tarefa os alunos não têm papel quadriculado e têm de descobrir/ verificar as transformações realizadas pelo passarinho. O apoio é facultado pelo papel vegetal que podem utilizar, se precisarem. Verificamos que enquanto na reflexão e na translação a sua utilização foi só para confirmarem o movimento; na rotação o papel vegetal foi muito importante para comprovarem a rotação. Na reflexão deslizante as alunas também necessitaram de utilizar o papel vegetal.

Professora: *Como é que foi possível obter o pássaro B a partir do pássaro A?*
Aluna D: Na figura A refletimos o pássaro verticalmente; Na figura B transladamos o pássaro 2,7 cm para a direita e 0,6 cm para cima; Na C rodamos 90 ˚ no sentido oposto ao ponteiro dos relógios. Na figura D refletimos o pássaro para a direita e depois transladamos a figura 2,4 cm para baixo.

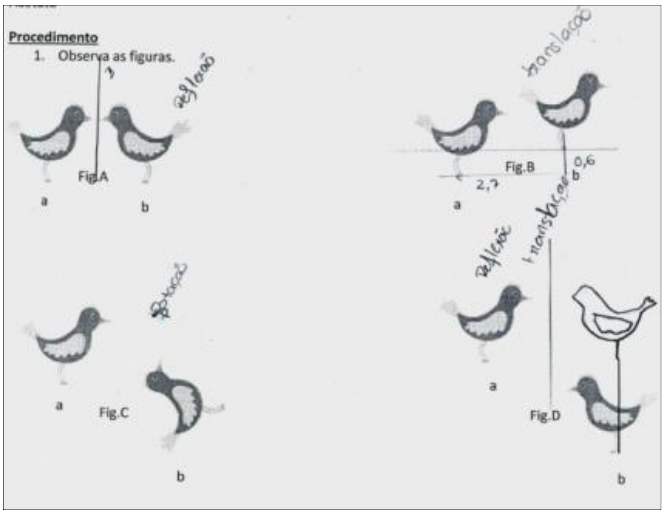


Figura 42. T_{12} – díade CD – As voltas do passarinho

Verificamos que para explicarem e justificarem os procedimentos esta díade recorria sempre à utilização do papel vegetal, mas identificou na figura os passos realizados nas diferentes isometrias. O papel vegetal constitui-se num apoio à descoberta das transformações realizadas, mas foi também muito importante como veículo facilitador da comunicação e da explicação dos processos utilizados e dos raciocínios efetuados.

Estas aulas gostam de utilizar o papel vegetal mas consideram que "se não o tivéssemos fazíamos as coisas na mesma, desde que houvesse papel quadriculado..."(E4) e "que quem usa sempre o papel vegetal está a ser preguiçoso" (E5)

Curiosamente na tarefa 24 (T_{24}), na construção da primeira rosácea, estas alunas utilizaram o papel vegetal e rodaram mal o motivo.

Professora: Achas que a tua figura está bem?
Aluna D: Sim...(exemplifica com o papel vegetal)
Professora: Olha para a tua rosácea e foca o teu olhar no "vértice da lua" e agora imagina-o a rodar sucessivamente 90 graus...
Então, por sua iniciativa, a aluna D traçou duas perpendiculares passando pelo centro. Verificou que fez bem as rotações de 90 ˚ e de 180 ˚, mas a rotação de 270 ˚ estava incorreta.
Aluna D: Ah! Não podia ser...tinha de vir para aqui... (apontou para o sítio onde deveria ter rodado a rotação de 270˚)

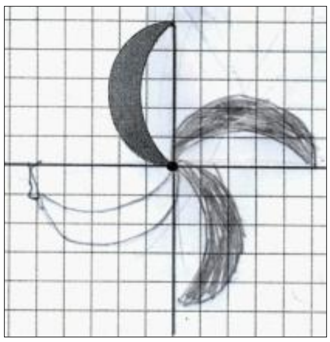


Figura 43. Construção de uma rosácea – díade CD

Na segunda parte da tarefa verificamos que as alunas estavam com dificuldades em rodar a figura 45 ˚. Diziam "*é metade de 90˚*", mas não sabiam exatamente para onde deviam rodar a figura, tendo a professora sugerido:

Professora: Façam primeiro a rotação de 90˚, de 180 ˚ e de 270˚. Só depois façam as rotações de 45 ˚....

Verificamos que as alunas fizeram a rosácea sem o apoio do papel vegetal, fazendo rodar um ponto que assinalaram de A (situado 3 quadrículas na vertical para cima em relação ao centro de rotação). Desta forma, conseguiram definir, com correção, onde ficariam as rotações de 90˚ , de 180˚, e de 270˚ Depois de realizarem estas rotações definiram, do mesmo modo, onde ficariam as rotações de 45˚, de 135˚, de 225˚ , e de 315˚. Usaram o papel vegetal para que o motivo rodado fosse sempre congruente, mas sabiam exatamente para onde o deveriam rodar (Figura 44).

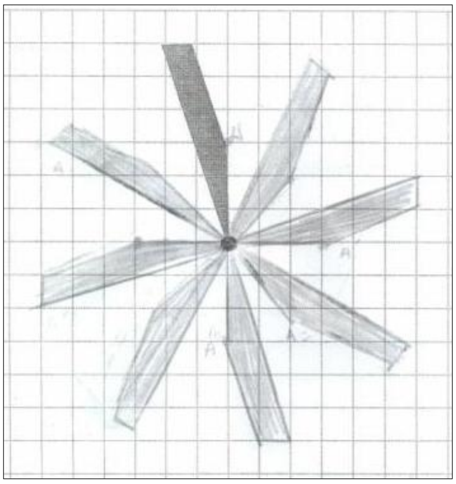


Figura 44 – Construção de uma rosácea (T_{24}) – díade CD

As tarefas realizadas através de recortes e pinturas com os guaches (mata borrão), T_{17} e T_{23}, foram muito do agrado destas alunas que, à semelhança dos colegas realizaram várias experiências, fazendo diferentes modelos.

Na tarefa T_{17} colocaram a tinta em diversos locais da folha e dobravam a folha, ora na vertical, ora na horizontal, ora na diagonal.

Deixamos que fizessem várias experiências e pedimos-lhe para escolherem dois modelos que fossem diferentes e que explicassem o porquê da escolha. Contudo verificamos que, apesar de as alunas escolherem uma figura com reflexão e outra com simetria, não conseguiram chegar a essa conclusão sozinhas.

Figura 45 – Simetria de reflexão (díade CD) – T_{17}

Figura 46-Reflexão (díade CD) - T_{17}

Professora: *Porque é que escolheram estes desenhos?*
Aluna C: *Porque são diferentes: uma está colada e a outra não…*
Aluna D: uma tem o eixo vertical e a outra de lado.
Professora: *Mas não é só isso…*
Aluna D: *Pois não…as duas são simétricas…*
Professora: *São simétricas ou têm reflexão?*
Aluna D: *É a mesma coisa…*

Depois da discussão em plenário anteriormente exposta com a díade AB, estas alunas concluem na ficha de trabalho que: "*A figura tem um eixo de simetria quando uma imagem é dividida e que é igual de um lado e de outro. Quando a imagem é refletida é quando temos uma figura completa e que se reflete para o outro lado"(*T_{17}).

Na T_{23} esta díade foi muito criativa e depois de dobrarem a folha conforme pedido fizeram os recortes à sua vontade. Estavam sempre na expectativa de ver a imagem que obtinham quando abriam a folha.

Obtiveram, entre outras, as seguintes figuras (Figura 47):

Figura 47. T_{23} – Dobragens – trabalho da díade CD

Quando lhes pedimos para identificarem as simetrias mencionaram apenas que “*as figura têm quatro eixos de simetria”*(T_{23}).

Professora: Mostrem lá onde é que estão esses eixos de simetria?
Aluna D: (dobrando a folha) São estes…1…2…3…4…
Professora: são eixos de simetria de reflexão. E não há mais nenhuns?
Aluna D: Não… (continua a dobrar a folha, confirmando a sua resposta, esquecendo-se das simetrias de rotação)

Reação dos alunos ao uso do papel

Esta díade considera que o papel quadriculado as ajudou muito em todas as isometrias, porque quando “…fazíamos as figuras e elas saíam direitinhas porque o papel quadriculado tem as medidas certinhas”(E_3).

Em relação ao papel vegetal esta díade defende que é um material *“…muito bom pois diz-nos o lugar certo para onde movimentar a figura. Este material ajudou muito porque encontramos um ponto e depois com o bico do lápis, carregamos no ponto e a figura roda para onde quisermos”*(Q_3), no entanto opinam que *“não o devemos usar se não precisarmos…quem o faz sempre está a ser preguiçoso*” (E5).

Para a translação estas alunas consideram que *“…não nos ajudou nada porque como tínhamos o papel quadriculado era desnecessário usá-lo”(Q_4).*

A tarefa das dobragens e do mata borrão para estas alunas *“foi muito divertida* e além disso ajudou-nos a perceber melhor as diferenças entre as simetrias e a reflexão”(E5) .

Pela nossa observação, as tarefas com recortes, dobragens e o “mata-borrão”são atividades prazerosas para os alunos e através delas conseguem realizar importantes raciocínios matemáticos. Os alunos envolvem-se, gostam do que estão a fazer e à volta da atividade têm oportunidades para comunicar e argumentar acerca das transformações geométricas que vão descobrir.

CAPITULO VI – ANÁLISE DOS DADOS. CONCLUSÕES

Neste capítulo iniciamos pela análise comparativa dos dois casos, focando as diferenças e semelhanças no desempenho das duas díades com os materiais manipuláveis ao longo desta experiência didática, bem como faremos uma síntese conclusiva do estudo realizado, das suas limitações, fazendo algumas recomendações para estudos futuros sobre esta temática.

6.1. Análise comparativa dos dados

Ao longo da nossa experiência didática fomos verificando que ambas as díades aderiram à utilização de materiais manipuláveis nas aulas e consideraram-nos úteis e benéficos para a aprendizagem matemática, referindo que *"as aulas são muito divertidas e diferentes e que os materiais manipuláveis podem ajudar porque estamos a experimentar e a aprender "* (Aluno A, E_5). Frisam que *" esta é uma forma mais fácil de aprendermos"* (Aluno C, E_5) pois *"como somos nós que descobrimos, isso fica na nossa memória"* (Aluna D, E_5) e que muitas vezes*"…quando não entendemos uma coisa sobre um objeto, só quando pegamos nele e o observamos é que conseguimos perceber"* (Aluno B, Q_1).

É nossa opinião que os alunos foram muito críticos na utilização dos materiais manipuláveis, sendo capazes de selecionar aqueles que consideravam mais importantes para cada isometria. Usaram-nos de forma correta e progressivamente ambas as díades foram-se tornando menos dependentes da utilização dos materiais manipuláveis conseguindo fazer "a ponte" para os conceitos e para a abstração matemática.

Neste sentido, constatamos que ambas as díades usaram o geoplano com facilidade e entusiasmo. Ambos os pares construíram bem as isometrias pedidas com este material. Verificamos que enquanto o par AB construiu reflexões mais complexas (com eixo inclinado), o par CD optou por construir reflexões mais simples (de eixo vertical com um ponto a pertencer ao eixo ou com um lado paralelo ao eixo).

Ambas as díades movimentavam os dedos pelos pregos do geoplano para determinarem a transformação de cada ponto, contando as distâncias e para verificarem se as figuras e os seus transformados se mantinham congruentes.

A díade AB usou o geoplano de forma mais sistemática. No caso da reflexão, usaram uma régua que deslocavam entre os pregos do geoplano para verificarem que havia perpendicularidade entre cada ponto e o seu transformado e o eixo de reflexão e no caso da rotação usavam um elástico de cor diferente para determinarem/ comprovarem a rotação de cada ponto em torno do centro definido.

A díade CD realizou as transformações no geoplano, mas apoiaram-se muito nas imagens no papel, referindo que no caso da reflexão a transformação estava correta *"porque se imaginarmos a folha a fechar as imagens têm de bater uma na outra"(*T_2). Este comportamento também aconteceu com a díade AB que para explicar as propriedades das isometrias se apoiavam ora no geoplano, ora nas imagens reproduzidas no papel ponteado.

A díade CD já considerou o geoplano muito importante para perceber a rotação pois usavam-no para experimentarem e comprovarem a rotação da imagem inicial, fazendo rodar ponto por ponto: colocavam um lápis no ponto de rotação e com os dedos rodavam ponto por ponto, visualizando o ângulo de rotação ou rodavam o geoplano.

Ambas as díades consideraram o geoplano menos útil para a translação, defendendo que o papel quadriculado era o suficiente e o mais adequado para realizar esta transformação geométrica.

O mira foi o material manipulável utilizado com que os alunos mais gostaram de trabalhar e ambas as díades o classificaram muito útil para realizar a reflexão e para determinar os eixos de simetria axial de uma figura. Verificamos que enquanto a díade AB, a determinada altura, deixou de usar o mira na identificação dos eixos e na construção das reflexões, só o usando para confirmação ou para explicar /argumentar os seus raciocínios; a díade CD usou sempre o material em todas as tarefas. Muitas vezes por precisarem, mas a maioria porque consideravam "divertido" usar o mira.

Estas díades não gostaram de usar o espelho na reflexão. Ambas referem que este material apenas permite comprovar a existência da reflexão, mas não contribuiu para realizar a construção.

Nesta proposta didática usamos em muitas tarefas o papel: vegetal (ou acetato), quadriculado, ponteado e liso. Consideramos que é um material manipulável porque permite a concretização dos conceitos e que ao manipulá-lo (mexer, tomar, rodar, virar, dobrar, recortar,…) os alunos podem fazer verdadeiras descobertas matemáticas, para além de ser um material de fácil acesso ao espaço da sala de aula.

Verificamos que a utilização do papel foi muito diferente nas duas díades nas diferentes isometrias estudadas. Enquanto que a díade AB se mostrou muito dependente do papel vegetal para realizar a rotação, mesmo quando tinham o papel quadriculado como suporte, as alunas da díade CD se tivessem papel quadriculado, usavam esse material pois opinavam que dessa forma "*contando as quadrículas, as figuras saíam direitinhas* (E_3)" e não necessitavam de recorrer ao papel vegetal. Apesar do exposto, observamos que a díade AB na última tarefa (T_{24}) construiu a rosácea sem o poio constante do papel vegetal, orientando-se também pelo quadriculado da ficha de trabalho, mostrando com isso uma melhor apropriação das propriedades desta isometria e uma passagem para a abstração que se pretende nesta área disciplinar.

Ambas as díades consideraram o papel quadriculado como o mais importante para a translação, no entanto, a díade AB revelou, no início, algumas dificuldades em utilizar o papel quadriculado porque para contar o comprimento de um segmento de reta contavam quadrículas em vez do "lado da quadrícula" e, por esse motivo, nem sempre realizavam a transformação corretamente.

Ambas as díades gostaram de realizar as tarefas com as dobragens e os recortes. Usaram da sua criatividade e fizeram vários exemplares conseguindo concluir acerca das diferenças entre a simetria e a reflexão.

Estas tarefas têm uma vertente muito lúdica, que pela "graça" das figuras que vão construir envolve os alunos e coloca-os a dialogar uns com os outros e a tecer importantes raciocínios e argumentos matemáticos relativos à simetria de reflexão e à reflexão, no caso das dobragens $–T_{17}$ - "mata-borrão" e às simetrias de reflexão e de rotação nas tarefa dos recortes (T_{23}), contribuindo para o conhecimento matemático e para a compreensão destes conceitos.

6.2. Conclusões do estudo

Apresentamos as principais conclusões do estudo, tendo-se optado por organizá-las através das questões que o orientaram.

Questão 1. Qual o contributo dos materiais manipuláveis para o conhecimento geométrico, ao nível das isometrias?

O contexto do estudo foi as isometrias onde o visual é um elemento presente e importante, contudo, esta capacidade, nem sempre está definida nos alunos, em particular ao nível do 2º ciclo, o que também é referido por vários autores (e.g. Vale & Barbosa, 2009; Vale & Fonseca, 2010). Para alunos desta faixa etária não tem o mesmo significado ver uma imagem geométrica no livro ou manusear uma figura: explorá-la e manipulá-la porque ao interagir com ela a criança adquire uma aquisição mais significativa dos conceitos geométricos presentes no objeto.

Os resultados deste estudo são consistentes com o referido por alguns autores (e.g. Kelly, 2006; Vale, 2002; NCTM, 2007) que também apontam que os materiais manipuláveis podem ser facilitadores para representar e descrever ideias matemáticas, assim como, alguns estudos empíricos (e.g. Almiro, 2004; Velosa, 2008; Caldeira, 2009b, Botas, 2008; Oliveira, 2010; Pinto, 2011).

Neste sentido, é diferente ver uma reflexão representada no papel, de experimentar refletir a figura e de ver "a acontecer" a reflexão, quer seja com o mira, o espelho, o papel vegetal ou o geoplano. Quando os alunos movimentam a imagem, fazem-na, desfazem-na, realizam experimentações e visualizam-na de diferentes formas, sob várias perspetivas. Desta forma, vão-se apropriando de um conjunto de características geométricas do objeto que lhes dá flexibilidade de raciocínio, que pensamos que não teriam, da mesma maneira, se apenas conhecessem a imagem dessa construção desenhada num livro, ou num PowerPoint, o que está em conformidade com o que refere Kelly (2006). Neste estudo verificou-se que qualquer uma das díades, a ritmos diferentes e de forma diferenciada, utilizaram os materiais manipuláveis que para além de os motivar os ajudou a identificar mais facilmente os conceitos. Foi notório que os materiais contribuíram para a compreensão das propriedades das isometrias estudadas mas que, quando os alunos já se tinham apropriado do conhecimento matemática e tinham descoberto uma forma mais rápida de resolver a tarefa, houve alunos que optavam por não os utilizar. Contudo, as nossas conclusões apontam para que a aprendizagem das isometrias foi facilitada e, nalguns casos, potenciada pelo uso dos materiais manipuláveis.

Questão 2. Como se caracteriza o trabalho dos alunos quando envolvidos em tarefas com materiais manipuláveis?

Ao longo deste estudo fomos constatando que os materiais manipuláveis promoveram o envolvimento dos alunos na aula, quer pela sua componente mais lúdica, quer pela descoberta dos conceitos que propiciam pois os alunos gostam de se envolver nas tarefas e "descobrir sozinhos", procurando chegar a uma conclusão. Este aspeto já tinha sido referido nos estudos vários autores (e.g. Almiro, 2004; Botas, 2008; Oliveira, 2010). Verificamos que as aulas com recurso a materiais manipuláveis estimulam essa procura e impelem os alunos a comunicar mais e a trocar argumentos, colocando as suas opiniões e contrapondo-as com as do seu colega. Para além disso, os alunos consideram as aulas mais divertidas e se num primeiro momento utilizam os materiais manipuláveis "como brinquedo", rapidamente "dão o salto" para os passarem a utilizar em função da realização da tarefa, na procura do conhecimento matemático, o que é corroborado por Veloso (2012). Consideramos ainda que os materiais manipuláveis podem-se constituir, para alguns alunos, no "motor" que despoleta o interesse e o gosto pela disciplina e que lhes permite perceber que também são capazes de "resolver as tarefas", sendo que este gosto tende a permanecer noutras aulas que não tenham recurso a este tipo de ferramentas.

Contudo, é nossa opinião que a vontade dos alunos em aprenderem matemática pode ser fomentada pela utilização dos materiais manipuláveis e que um ensino que os utilize e recorra a tarefas desafiantes são condições essenciais para que os alunos aprendam melhor, o que é consistente com o referido por Vale (2011) e com o estudo efetuado por Caldeira (2009a).

Questão 3. Que potencialidades e constrangimentos têm o uso de materiais manipuláveis na aprendizagem das isometrias?

As aulas com recurso a materiais manipuláveis revelam-se mais agitadas e mais barulhentas, e exigem mais preparação e organização nas dinâmicas da aula, conforme também é sublinhado por diversos autores (e.g. Almiro, 2004; Stein, 2001). Contudo, é crucial que o professor resolva as tarefas e utilize os materiais de modo a prever possíveis constrangimentos pois desta forma poderá melhor canalizar esses recursos e as suas intervenções em função da aprendizagem dos alunos, minimizando os episódios mais barulhentos e potenciando a aprendizagem com estes recursos. Deverão ainda ser definidas regras para a distribuição e recolha dos materiais para que haja uma rotina e se diminuam os índices de perturbação na sala de aula o que está concordante com a opinião de Stein e Smith (1998); Canavarro (2011). Verificamos que estas tarefas de caráter mais exploratório com recurso a materiais implicam a interiorização de uma dinâmica de trabalho, de maior autonomia e persistência na procura do conhecimento. Frisamos que ao longo da nossa experiência didática as dinâmicas de trabalho colaborativo entre os pares foram-se instalando e a cada aula que passava a perturbação provocada pelo material era menor e o trabalho desenvolvido pelos alunos era mais produtivo, pois verificamos uma evolução também no modo de trabalhar as tarefas. A princípio, limitavam-se a responder às perguntas formuladas, mas, progressivamente, começaram a manifestar o seu poder criativo, formulando novas questões e evidenciando o seu entusiasmo. Verificamos por isso que estas atividades quando realizadas de modo isolado ou esporádico, podem ser interessantes e divertidas para os alunos, mas o conhecimento matemático que podem retirar das mesmas é tendencialmente menor, o que também é sublinhado por Canavarro (2011).

As aulas com recurso a materiais são mais dinâmicas e os alunos muito participativos. Verificamos que numa primeira utilização dos materiais é importante dar tempo aos alunos para manipularem e explorarem os materiais como quiserem: brincar com eles! Depois desta exploração, a maioria dos alunos passa a usá-los apenas como apoio à realização da tarefa, sendo mais um elemento de trabalho. Deste modo, após a algumas aulas com materiais manipuláveis os alunos começaram a usá-los como suporte à sua aprendizagem e deixam de ser um fator de distração, o que é condizente com Kelly (2006).

É nossa opinião que é fundamental dar tempo para a realização das tarefas e para que os materiais possam ser explorados, o que também é referido no estudo de Almiro (2004). Os alunos precisam de tempo para manipular os objetos, construir, reconstruir e comunicar as suas ideias com os seus pares. Não pode ser dado tempo de mais nem de menos e este balizar é difícil de fazer porque as turmas são heterogéneas e os ritmos de aprendizagem e de dependência do material são diferentes entre os alunos. Por outro lado, salientamos que os materiais manipuláveis possibilitam a oportunidade para que o aluno e o professor possam gerir melhor o ritmo de aprendizagem de cada um, pois através da exploração do material são criadas as oportunidades para um ensino mais direcionado e individualizado que tenha em conta as dificuldades de cada aluno e o seu tempo para aprender, o que está em conformidade com o referido por Lorenzato (2006).

Consideramos que é crucial que no final de cada tarefa se realize, em plenário, com toda a turma, uma reflexão relativa às conclusões que os alunos retiraram da tarefa – condicionante de melhoria das aprendizagens que também é referida por Pinto (2011). Este momento permite aos alunos expor para toda a turma os seus raciocínios e clarificar os conhecimentos que se pretendiam atingir com a realização da tarefa. Os materiais manipuláveis podem assim proporcionar a discussão e a reflexão em torno de aspetos centrais da natureza da própria Matemática.

Contudo, apesar do exposto, julgamos que é importante diversificar as estratégias a utilizar nas aulas de matemática. Os materiais manipuláveis são importantes, mas deve haver uma diversificação, porque desta forma as aulas também se tornam cansativas.

Como foi descrito ao longo deste trabalho, os materiais manipuláveis eram o ponto central no estudo, mas no decurso das aulas os alunos tiveram oportunidade de complementar o trabalho exploratório com outros recursos, pois consideramos que alunos necessitam de realizar todos os tipos de tarefas, o que vai de encontro ao referido por Ponte (2005) quando sublinha que tarefas que envolvam apenas papel e lápis e onde se pretenda o treino e o domínio de procedimentos também são importantes para a consolidação das aprendizagens realizadas.

Salientamos que o tipo de trabalho aqui delineado requer tempo e persistência pois o ensino exploratório da Matemática precisa de tempo e de continuidade para que o professor possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, ao mesmo tempo que os alunos vão adquirindo a postura e a autonomia necessária para os modos de produção do conhecimento que são inerentes a este tipo de ensino/ aprendizagem, o que está no seguimento das conclusões referidos no estudo de Almiro (2004).

Canavarro (2011) é concordante com esta linha de pensamento quando realça que o ensino exploratório da Matemática não pode ser visto pelos professores e pelos alunos como algo que se experimenta esporadicamente algumas vezes para realizar umas tarefas especiais. Adotar esta forma de ensino mais exploratório implica a necessidade de mudar aspetos centrais da cultura tradicional da aula de Matemática.

No trabalho com os alunos, como já referimos os materiais manipuláveis promovem o envolvimento de todos os alunos, não só dos que têm mais dificuldades, mas também daqueles que revelam bom aproveitamento e bom raciocínio matemático, o que é condizente com o que defende Vale, (1999). Verificamos que os alunos com mais capacidades a matemática utilizam os materiais manipuláveis, numa primeira fase, mas por sua iniciativa deixam de os usar. Apenas recorrem a eles para confirmação do raciocínio realizado ou para se apoiarem quando pretendem explicar a forma como pensaram. Os alunos com mais dificuldades tendem a continuar muito dependentes da utilização dos materiais e têm mais dificuldades em "dar o salto" para a abstração. Os materiais manipuláveis são assim importantes como suporte às tarefas. Estas têm de ser ricas de maneira a fomentar o raciocínio, a realização de conexões com conhecimentos já adquiridos, que instiguem os alunos a realizar conjeturas e a pensar, como também é referido por ME (2007). Constatamos que é importante que os alunos trabalhem com os materiais manipuláveis em pares pois desta forma trocam impressões e entreajudam-se promovendo ainda a comunicação matemática e a partilha de saberes, aspeto importante sobretudo na validação dos raciocínios efetuados o que vai de acordo com o referido por Fernandes (1997). Sendo que a manipulação dos materiais manipuláveis constitui-se num bom argumento para pôr os alunos a comunicar matematicamente (e.g. Velosa, 2008; Oliveira, 2010) e a realizar conjeturas sobre o trabalho realizado pois sabemos que os materiais manipuláveis, por si só, não transmitem conhecimento matemático, como frisam diversos autores (e.g.Clements, 1999; Vale, 1999; Nacarato, 2005; Alves, 2006; Caldeira, 2009a; Vale, 2011). Eles constituem-se num suporte que, através da concretização, permite aos alunos uma melhor compreensão e apropriação dos conceitos em estudo, tornando a matemática mais significativa.

Os resultados obtidos vão de encontro com Vale (2011) quando refere que para os alunos, ter a oportunidade de trabalhar em tarefas ricas e desafiantes, com recurso a materiais manipuláveis e num ambiente de sala de aula incentivador, traduz-se em ganhos substanciais de aprendizagem. Explorar situações e ideias, fazer e testar conjeturas, generalizar, discutir, justificar e provar, tornaram-se elementos chave do trabalho na sala de aula durante este estudo e estes são fatores que contribuem para uma eficaz aprendizagem deste tópico da geometria.

O material permitiu que as díades verbalizassem, analisassem e discutissem os seus raciocínios e, deste modo, permitiu-lhes definir os conceitos, conjeturando, experienciando e elaborando sucessivamente os conceitos a adquirir.

As experiências vividas pelos alunos na sua atividade matemática podem assim constituir-se num marco fundamental para a aprendizagem posterior da geometria.

6.3. Recomendações e limitações do estudo

O papel do investigador que cumulativamente também é o docente da turma trás algumas dificuldades para o papel do investigador porque, em alguns momentos da aula, sentimos que não conseguimos desempenhar os dois da melhor forma dando prevalência a um deles pois o trabalho de pares, as tarefas mais abertas e a utilização de materiais obriga a uma grande disponibilidade do professor junto dos alunos. Neste sentido, consideramos que seria uma mais-valia a existência de um observador externo que pudesse complementar as observações do investigador e colaborar nas reflexões acerca do desempenho dos alunos com os materiais.

Para este estudo optamos por efetuar uma experiência didática que abrangesse todas as isometrias contempladas no programa, excetuando-se os frisos e as pavimentações. Este aspeto foi bastante complexo atendendo ao tempo disponível para a implementação do estudo e à grande quantidade de dados que se recolheram, que por questões práticas não foi possível descrever neste trabalho.

Outra dificuldade encontrada neste estudo tem sobretudo a ver com o reduzido número de trabalhos de investigação realizados no domínio das transformações geométricas para este nível de ensino e no âmbito da utilização de materiais manipuláveis. Estes aspetos trouxeram algumas dificuldades no que diz respeito ao confronto das conclusões deste estudo com outros que pudessem ter sido realizados.

Para investigações futuras consideramos que seria importante um estudo sobre a utilização dos materiais manipuláveis noutro tópico da matemática e/ou com alunos doutra faixa etária; Também seria interessante investigar a relevância da utilização de um determinado material (geoplano, cuisenaire, papel) em diferentes tópicos da matemática ou as implicações que os materiais manipuláveis podem ter na criatividade, na comunicação matemática e na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almiro (2004). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. Acedido em 15 de fevereiro de 2012 em, www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/GTI-Joao-Almiro.pdf

Alves. C & Morais, C. (2006). Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca & P. Canavarro (Orgs), *Números e álgebra: na aprendizagem matemática e na formação de professores*, (pp. 335-349). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Boavida, A., Cebola, G., Paiva, A., Pimentel, T. & Vale, I. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o ensino da Geometria: Transformações geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.

Botas, D. (2008). *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática. Um estudo no 1º ciclo*. Tese de mestrado (não publicada). Lisboa: Universidade Aberta.

Caldeira, M. (2009a). *A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática.* Tese de doutoramento. Universidad de Málaga: Faculatad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de la Lengua y La Literatura y Escola Superior de Educação João de Deus.

Caldeira, M. (2009b). A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática. *Atas do X Congresso Internacional Galego Português de Psicopedagogia*. Braga: Universidade do Minho.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 112, 11 -17.

Clements, D. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood,* 1, 45-60.

Damiani, M. (2008*).* Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios*. Educar*, 31, 213-230.

Fernandes, E. (1997). *O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula*. Análise Psicológica (1997), 4 (XV): 563-572. Acedido em 10 de janeiro em, http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/aps/v15n4/v15n4a04.pdf

Fiorentini, D. & Miorim, M. (1990). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática*. Boletim SBEM*, 4, 7.

GAVE (2011). *Relatório Nacional das Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo. Lisboa:* GAVE.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre & C. Nunes (Orgs.), Atas do XXIII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp. 133-243). Lisboa: APM. CD-ROM.

Huberman, A & Miles, M (1994). Data Management and Analysus Methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds), *Handbookof qualitative research* (pp.428-441). Newbury Park, CA: Sage publications.

Januário, G. (2008). *Manipulando Materiais, (re) descobrindo a matemática: possibilidades em sala de aula.* Acedido em 3 de dezembro, em http://pt.scribd.com/doc/39181400/manipulando-materiais-re-descobrindo-a-matematica-possibilidades-em-sala-de-aula.

Kelly, C. (2006). Using Manipulatives in Mathematical Problem Solving: A Performance-Based Analysis. University of Colorado at Colorado Springs. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 2, 184-193.

Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In Sérgio Lorenzato, (org.). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* Campinas: Autores Associados.

Matos, J. & Serrazina, M. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Martins, C. & Santos, L. (2010). *Utilização de materiais manipuláveis: a descoberta de novas potencialidades num contexto de formação contínua*. In ProfMat 2010. Aveiro.

Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional para o Ensino Básico.* Competências essenciais. Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério de Educación y Ciencia (2004). *Números, Formas y Volúmenes en el entorno del Ninõ.* Acedido em 2 de dezembro de 2012, em http://books.google.pt/books?id=LMxSq0EjNXIC&pg=PT81&lpg=PT81&dq=N%C3%BAmeros,+Formas+y+Vol%C3%BAmenes+en+el+entorno+del+Nin%C3%B5.+pdf&source=bl&ots=WJkfnUPLaE&sig=-ZyqJvTSXPDrLyqBTr861YK8Crw&hl=pt&sa=X&ei=ugRDUa6ELKyy7AbfFw&redir_esc=y

Nacarato, A. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática – Ano 9*, 9-10, 1-6. Acedido em 18 de fevereiro , de http://www.sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf

NCTM (2007). Princípios e Normas para a matemática escolar. (Tradução portuguesa de Principles and standards for school mathematics, 2000). Lisboa: APM.

Oliveira, C. (2010). *(In) Sucesso na Matemática e a utilização de recursos didácticos no 7ºano de escolaridade: estudo de caso*. Dissertação de mestrado. Universidade Portucalense.

Pinto, S. & Fonseca, L. (1012). As isometrias no 2º ciclo do Ensino Básico: uma proposta de ensino baseada no modelo de Van Hiele. *Atas do XXII SIEM – Associação de Professores de Matemática*. Simpósio: Geometria e medida, 167-178.

Pinto, S. (2011). *Desenvolvimento do pensamento geométrico. Uma proposta para o ensino das isometrias*. Tese de mestrado (não publicada). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Ponte, J. (2003a). Investigar, ensinar e aprender. *Atas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2003b). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2,* 93-169.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), Investigación en educación matemática XII (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J. & Serrazina, L. (2009). *O novo programa da matemática: uma oportunidade de mudança. Educação e Matemática*, 105, 99-114.

Roldão, M. (1999). *Gestão curricular: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Silveira, D; Novello, T & Laurino, D (2011). *O uso de materiais concretos no ensino da matemática nas primeiras etapas de escolarização*. Revista Jr de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia, v.2, n.2, p. 19-22. Acedido em 10 de dezembro, em http://c3.furg.br/arquivos/download/silveira_novello_laurino.pdf

Scalaro, M. (2008). *O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de matemática*. Acedido em 6 de novembro, em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.

Stein, M. & Bovalino, J. (2001). Manipulatives: one piece. Factors Associated with Successful. Mathmatics *Teaching in de Middle School,* 6 (6) .

Stein, M.; Engle, R.; Smith, M. & Hughes, E. (2008). *Orchestrating Productive Mathematical Discussions:Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell.* University of Northern Iowa.

Thompson, P. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding, *Arithmetic Teacher,* 41(9), 556-558.

Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), *Atas do ProfMat 99*, (pp.111-120). Lisboa: APM.

Vale, I. (2002). *Materiais Manipuláveis*. ESEVC: LEM.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*, 5, 171-202.

Vale, I. & Barbosa, A. (2009). *Padrões. Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática*. Viana do Castelo: ESE-IPVC. pp. 59 – 68.

Vale, I. (2011). *Didactic materials in initial elementary mathematics teacher education: the use of manipulative in geometry*, In *Proceedings of the CIEAEM* 55, Plock, Poland.

Vale, I. & Fonseca, L. (2010) Pattern Tasks with Geometric Transformations in Elementary Teachers‘ Training: Some Examples In Kristiina Kumpulainen & Auli Toom (Eds), Proceedings of the 20th Annual Conference of the European Teacher ETEN 20 (pp. 154-162). University of Helsinki & Liverpool Hope University.

Vale, I. (2012). Tarefas Geométricas com Recurso a Materiais manipuláveis: alguns exemplos com futuros professores do ensino básico. In Lurdes Serrazina, Fernanda Gomes, J. & José, P. (coord.) *Formação Continua. Relatos e Reflexões* (pp. 83-99). Lisboa: ESE-IPL, projeto Edulink.

Velosa, R. (2008). *A aprendizagem da geometria com recurso aos materiais manipuláveis no 7º ano de escolaridade*. Tese de mestrado. Madeira: Universidade da Madeira.

Veloso, E. (2007). Notas sobre o Ensino da Geometria Grupo de Trabalho de Geometria da APM. *Educação e Matemática*, 93, 19-22.

Veloso, E. (2008). Notas sobre o Ensino da Geometria Grupo de Trabalho de Geometria da APM. *Educação e Matemática*, 96, 18-19.

Veloso, E., Bastos R. & Figueirinhas, S.(2009). Isometrias e Simetrias com materiais manipuláveis. In. Educação e Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática – Ed. 101 APM.

Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.

ANEXOS

Anexo 1

Questionário - Q_1

Nome: ______________________________________ Idade_____

Este questionário tem como único objetivo conhecer-te melhor e perceber o que, na tua opinião, é importante para aprenderes melhor os assuntos tratados nas aulas de matemática. Peço-te sinceridade nas respostas que deres.

1. Gostas de matemática? Porquê?

____
____
____

2. Tens dificuldades nesta disciplina? Se sim, porque achas que isso acontece?

____
____

3. Na tua opinião, como se aprende matemática?

____
____

4. Na tua opinião, como deve ser um **bom professor** de matemática?

____
____

5. Nas aulas de matemática, gostas mais de trabalhar:

- ☐ individualmente
- ☐ a pares
- ☐ em grupo

5.1. Porquê?

____
____

6. Quais são as tarefas que mais gostas de fazer nas aulas?

- ☐ Resolução de exercícios
- ☐ Resolução de problemas
- ☐ Tarefas de investigação
- ☐ Jogos matemáticos
- ☐ Outras. Quais? ____

6.1. Porquê?____
____
____

7. Já alguma vez utilizaste materiais manipuláveis nas aulas de matemática?
____

7.1. Se sim, quais? ____

7.2. Dá dois exemplos de materiais manipuláveis?
____

7.3. Achas que os materiais manipuláveis podem ser importantes para perceberes melhor os assuntos tratados nas aulas de matemática? Porquê?
____
____
____

Questionário - Q_2

Nome: ____ Idade_____

Este questionário tem como único objetivo perceber em que medida os materiais manipuláveis contribuíram (ou não) para perceberes melhor as isometrias e as simetrias. Peço-te sinceridade nas respostas que deres.

Reflexão

Nas tarefas da reflexão usamos: o mira, o acetato,o espelho, o geoplano, o papel ponteado, o papel quadriculado.

Depois de os teres utilizado, qual consideras ser a sua utilidade para a aprendizagem da reflexão.

Mira-
Acetato-
Espelho-
Geoplano-
Papel ponteado-
Papel quadriculado-

Dos **materiais utilizados na reflexão**, seleciona o que mais gostaste de usar e menos, explicando porquê.

Mais________________porque ____

____

Menos ______________porque ____

____

Questionário - Q_3

Nome: ____ Idade_____

Este questionário tem como único objetivo perceber em que medida os materiais manipuláveis contribuíram (ou não) para perceberes melhor as isometrias e as simetrias. Peço-te sinceridade nas respostas que deres.

Rotação

Nas tarefas da rotação usamos: o geoplano, o papel vegetal, o papel quadriculado.

Depois de os teres utilizado, qual consideras ser a sua utilidade para a aprendizagem da rotação.

Geoplano-
Papel vegetal-
Papel quadriculado-

Dos **materiais utilizados na rotação**, seleciona o que mais gostaste de usar e menos, explicando porquê.

Mais________________porque ____

____

Menos ______________porque ____

____

Questionário - Q_4

Nome: ____ Idade_____

Este questionário tem como único objetivo perceber em que medida os materiais manipuláveis contribuíram (ou não) para perceberes melhor as isometrias e as simetrias. Peço-te sinceridade nas respostas que deres.

Translação

Nas tarefas da translação usamos: <u>o acetato</u>, <u>o papel vegetal, o papel quadriculado.</u>

Depois de os teres utilizado, qual consideras ser a sua utilidade para a aprendizagem da translação.

Acetato-
Papel vegetal-
Papel quadriculado-
Geoplano-

Dos **materiais utilizados na translação**, seleciona o que mais gostaste de usar e menos, explicando porquê.

Mais________________porque ____

____

Menos ______________porque ____

Questionário - Q_5

Nome: _______________________________________ Idade_____

Este questionário tem como único objetivo perceber em que medida os materiais manipuláveis contribuíram (ou não) para perceberes melhor as isometrias e as simetrias. Peço-te sinceridade nas respostas que deres.

Simetria

Nas tarefas da simetria usamos: o mira, o acetato, o papel vegetal, o papel quadriculado, recortes, pinturas com guaches

Depois de os teres utilizado, qual consideras ser a sua utilidade para a aprendizagem da simetria.

Mira-
Acetato-
Papel vegetal-
Papel quadriculado-
Recortes
Pinturas com guaches

Dos **materiais utilizados na simetria**, seleciona o que mais gostaste de usar e menos, explicando porquê.

Mais_______________porque ____

____

Menos ______________porque ____

____

Anexo 2

E_1 - Entrevista semi-estruturada – Guião

Dos materiais utilizados (mira, espelho, geoplano, papel quadriculado) quais são os que gostaste mais de utilizar na reflexão? Porquê?

Qual foi o material que te pareceu ser mais útil para esta isometria?

Houve alguma material que tiveste mais dificuldades em manusear?

O que achas da utilização destes materiais manipuláveis para trabalharmos a reflexão?

E_2 - Entrevista semi-estruturada – Guião

Dos materiais utilizados (papel vegetal e papel quadriculado) quais são os que gostaste mais de utilizar na rotação? Porquê?

Qual foi o material que te pareceu ser mais útil para esta isometria?

Houve alguma material que tiveste mais dificuldades em manusear?

O que achas da utilização destes materiais manipuláveis para trabalharmos a rotação?

E_3 - Entrevista semi-estruturada – Guião

Dos materiais utilizados (papel quadriculado e papel vegetal) quais são os que gostaste mais de utilizar na translação? Porquê?

Qual foi o material que te pareceu ser mais útil para esta isometria?

Houve alguma material que tiveste mais dificuldades em manusear?

O que achas da utilização destes materiais manipuláveis para trabalharmos a translação?

E_4 - Entrevista semi-estruturada – Guião

Dos materiais utilizados (mira, espelho, papel quadriculado, dobragens, recortes) quais são os que gostaste mais de utilizar no estudo das simetrias? Porquê?

Qual foi o material que te pareceu ser mais útil para perceber o conceito de simetria?

Houve alguma material que tiveste mais dificuldades em manusear?

O que achas da utilização destes materiais manipuláveis para trabalharmos a simetria?

O que achas das aulas de matemática com recurso a materiais manipuláveis? Em que é que isso pode ajudar (ou não) na aprendizagem. Porquê?

Anexo 3

T$_0$ - **<u>Tarefa introdutória: O mira</u>**

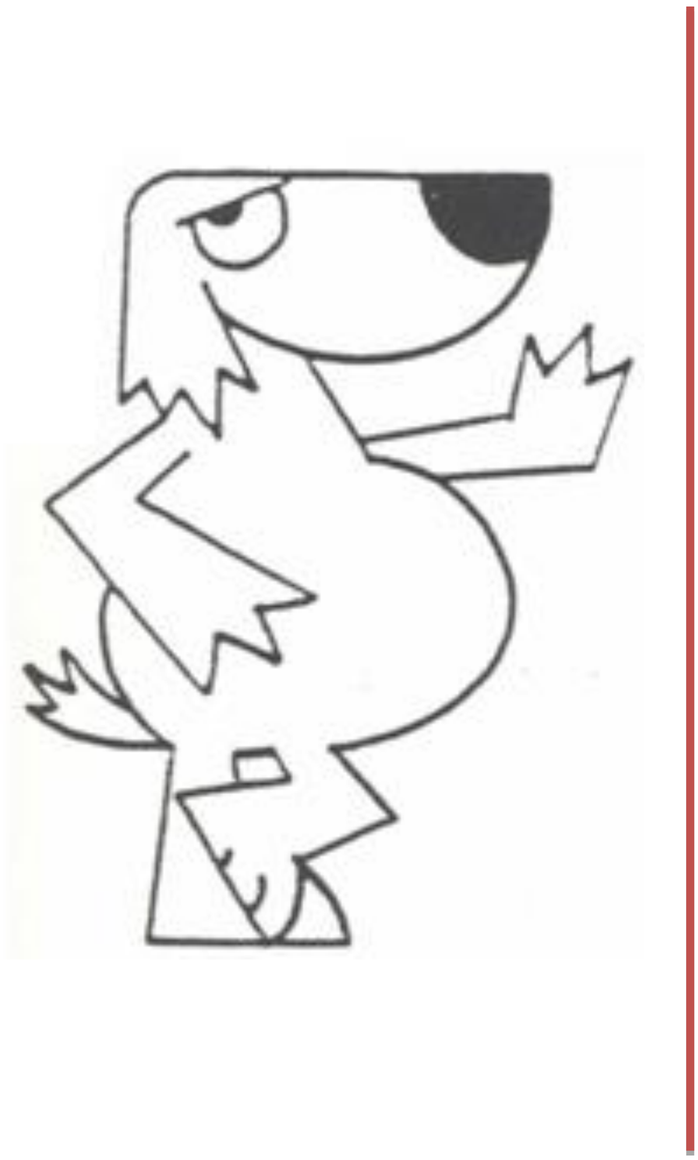
<u>Objetivos:</u>

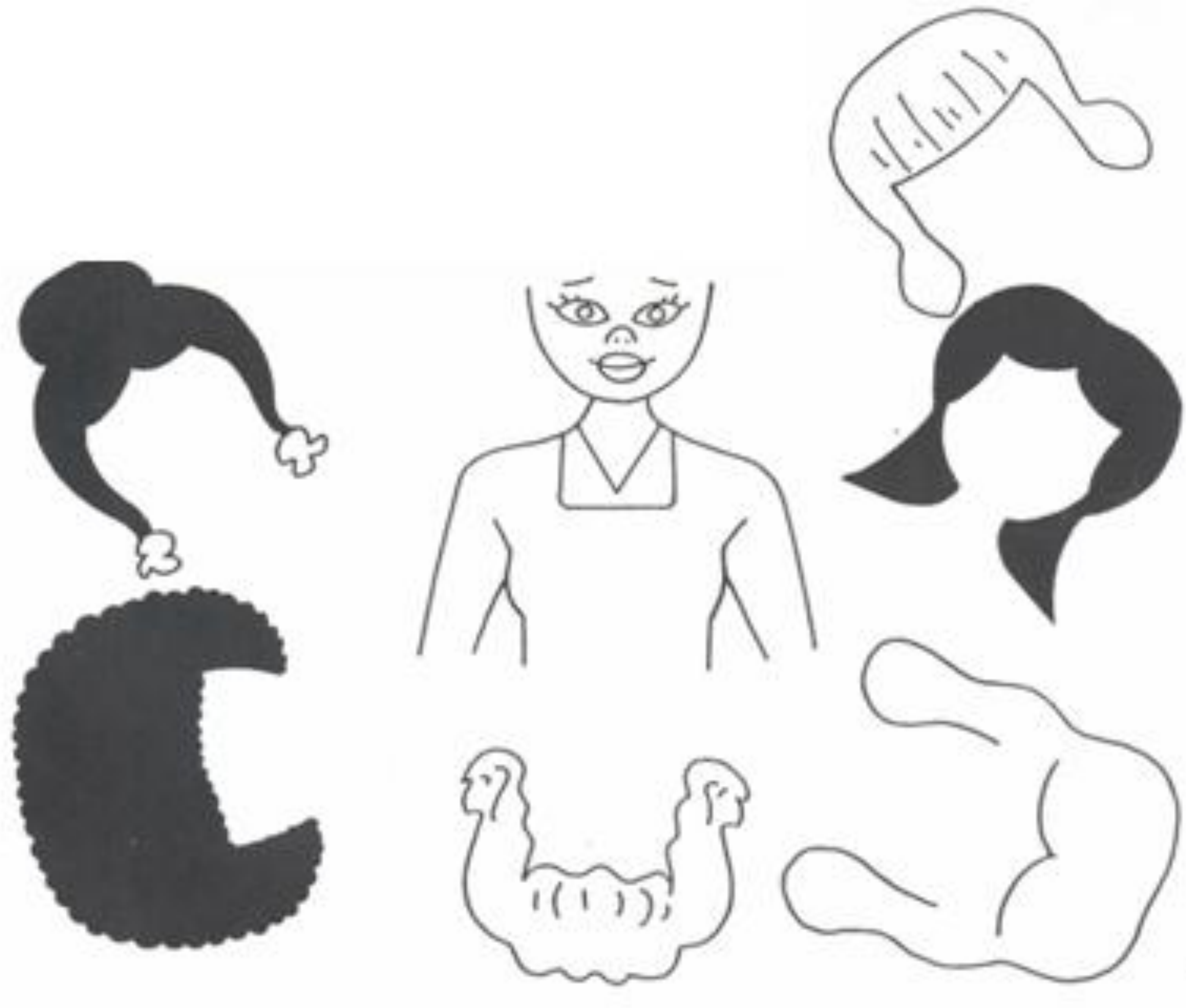
- Utilizar o mira para a compreensão intuitiva do conceito de reflexão.

<u>Procedimento:</u>

1) Coloca o mira sobre a linha e desenha a imagem que vês, quando olhas pelo seu lado esquerdo. Descreve a imagem que observas comparando-a com a imagem inicial.

   I.





T_1 - **<u>Tarefa 1 - A transformação da flor</u>**

<u>Objetivos</u>

- Descrever o movimento associado a uma isometria, dada a figura geométrica original e o transformado

<u>Material necessário</u>

- Acetato
- Caneta de acetato

<u>Procedimento</u>

- Cada par copia para a folha de acetato a flor representada na figura A. De seguida tem de descrever os movimentos realizados para que a figura A se transforme na B; a figura B na figura C e a figura C na figura D.

A **B** **C** **D**

1) Copia a imagem A para a tua folha de acetato.
2) Usa a folha de acetato e descreve (s) **movimento(s)** que permite (m) transformar:

2.a) a figura A na figura B.

____

____

2.b) a figura B na figura C.

____

____

2.c) a figura C na figura D

____

____

Tarefa adaptada de Durão.E, Baldaque.M(2011). *Matemática 6º ano*. Volume 1. Texto Editora

T_2- **<u>Tarefa 2 : Figuras no geoplano</u>**

<u>Objetivos</u>

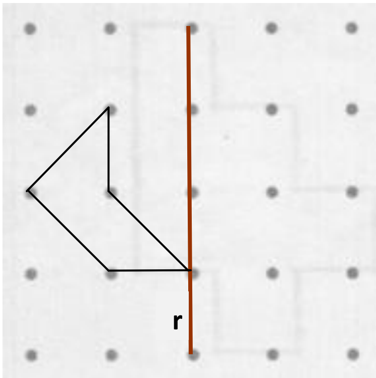
- Construir a imagem de uma figura por reflexão.
- Compreender as propriedades da reflexão.

<u>Materiais</u>

- Geoplano
- Elásticos
- Papel ponteado

<u>Procedimento</u>

1. Representa no geoplano a figura representada ao lado.



2. Representa no geoplano a figura refletida em relação ao eixo r. Regista no papel ponteado.
3. Que relações consegues descobrir entre a figura dada e a figura refletida?

____

____

____

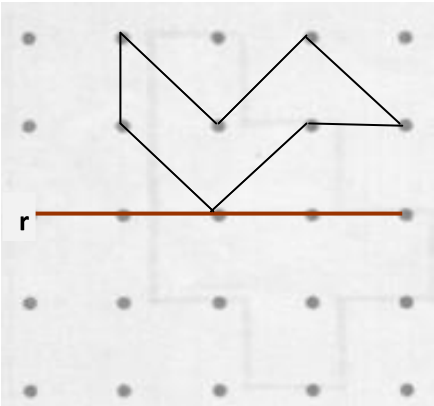
4. Assinala no papel ponteado, na figura inicial, cada um dos vértices do polígono com as letras A, B, C, D, E. (naquela que desenhaste no papel ponteado)
5. Na figura refletida(imagem ou transformado), identifica o vértice que correspondente a cada um dos pontos da figura inicial, identificando-os respectivamente como A´, B´, C´, D´e E´.
6. Une cada ponto original com a sua imagem. (Fá-lo a tracejado no papel ponteado . No geoplano, podes fazê-lo usando um elástico)
7. O que verificas?

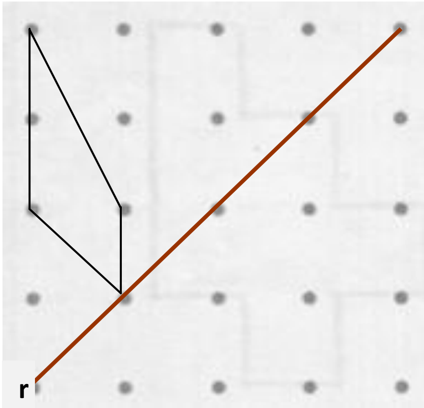
____

____

____

8. Repete os mesmos procedimentos para as seguintes figuras .





9. Explica como podes construir a reflexão de uma figura numa folha de papel (sem o apoio do geoplano ou do papel ponteado)?

____
____
____
____

T₃ - **<u>Tarefa 3: A reflexão dos polígonos</u>**

<u>Objetivos</u>

- Construir a imagem de uma figura por reflexão.
- Compreender as propriedades da reflexão.

<u>Material necessário</u>

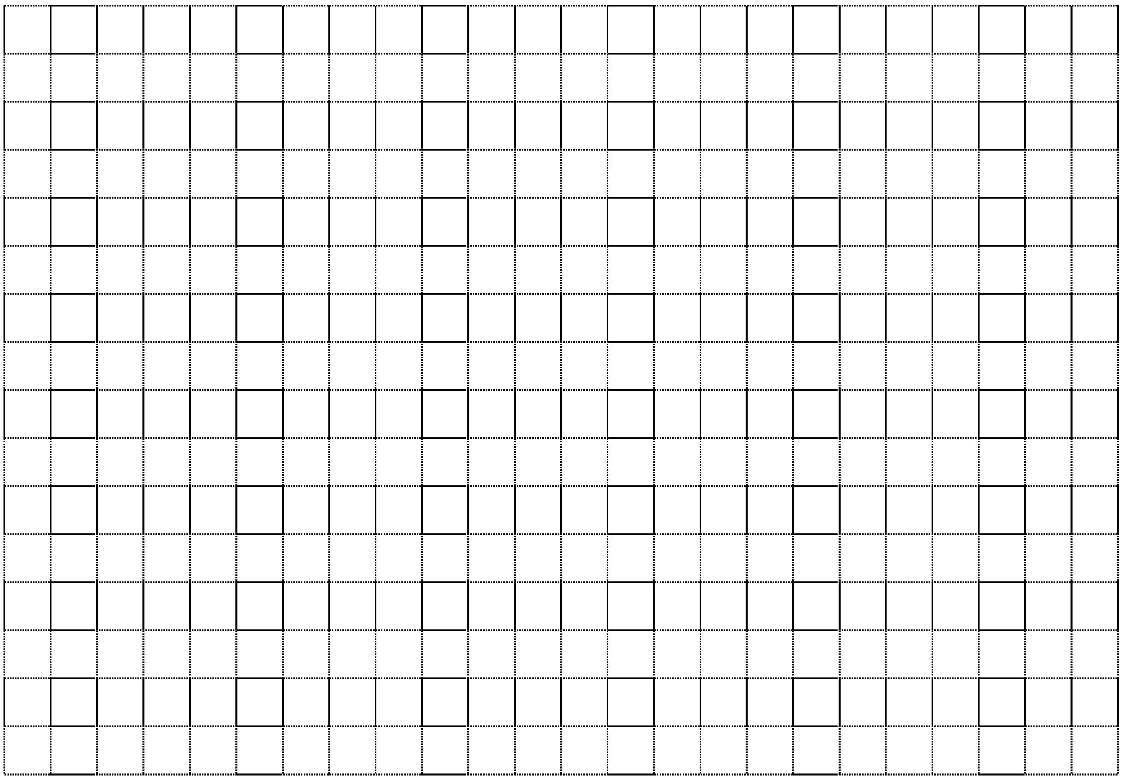
- Polígonos recortados em cartolina (das dimensões do quadriculado)
- Papel quadriculado
- Cola
- Régua
- Esquadro

<u>Procedimento</u>

A. Escolhe um polígono e cola-o no papel quadriculado, de modo a que os vértices da figura que escolheste coincidam com os vértices do quadriculado.

B. Desenha um eixo de reflexão com a orientação que entenderes e na posição que quiseres. (colado ou não à figura)

C. Desenha a imagem do teu polígono, por reflexão.



- ➢ Confirma a construção com o mira.

D. Diz como é que procedeste para desenhar a imagem da tua figura por reflexão.

____

____

____

T_4 - **<u>Tarefa 4 : Triângulos ao espelho</u>**

<u>Objetivos</u>

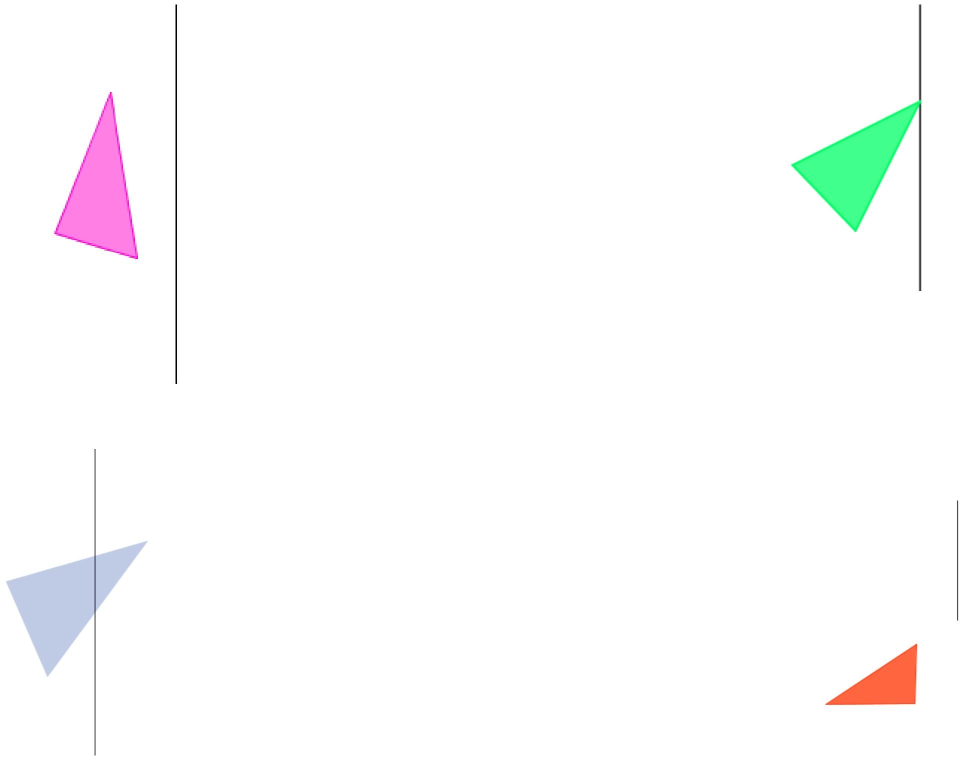
- Construir a imagem de uma figura por reflexão.
- Compreender as propriedades da reflexão.

<u>Materiais:</u>

- Espelho

<u>Procedimento</u>

1) Para cada um dos triângulos a seguir apresentados, constrói com o apoio do espelho, a figura obtida através de uma reflexão, pelo eixo assinalado.



1.1)Indica em qual destas quatro situações te pareceu mais fácil construir a reflexão? Porquê?

____

____

1.2)E mais difícil? Porquê?

____

____

T_5 - **<u>Tarefa 5 : À roda com as figuras</u>**

<u>Objetivos</u>

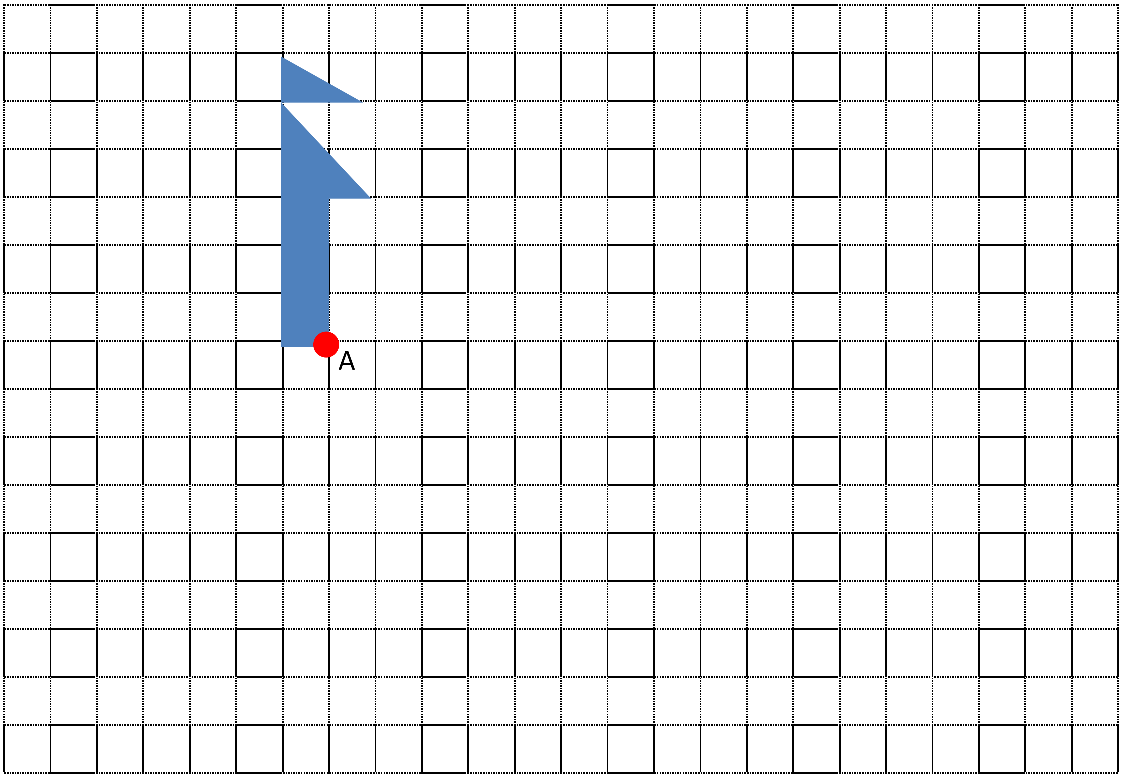
- Construir o transformado de uma figura por rotação.
- Descrever uma rotação.
- Compreender as propriedades da rotação.

<u>Materiais</u>

- Papel vegetal
- Papel quadriculado

<u>Procedimento</u>

1) Observa a seguinte figura que representa uma bandeira.



2) Desenha a bandeira na folha de papel vegetal.
3) Coloca a folha de papel vegetal por cima da imagem e, com o bico do lápis, fixa-a no ponto A .
4) Roda a folha de papel vegetal $\frac{1}{4}$ de volta, no sentido dos ponteiros do relógio. Desenha-a a vermelho.

10.

5) Faz o mesmo procedimento e roda a figura inicial meia volta, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Desenha-a a verde.

6) Roda agora a primeira imagem $\frac{3}{4}$ de volta, no sentido dos ponteiros do relógio e desenha-a a preto.

7) Roda a imagem inicial uma volta completa, no sentido dos ponteiros do relógio. O que verificas?

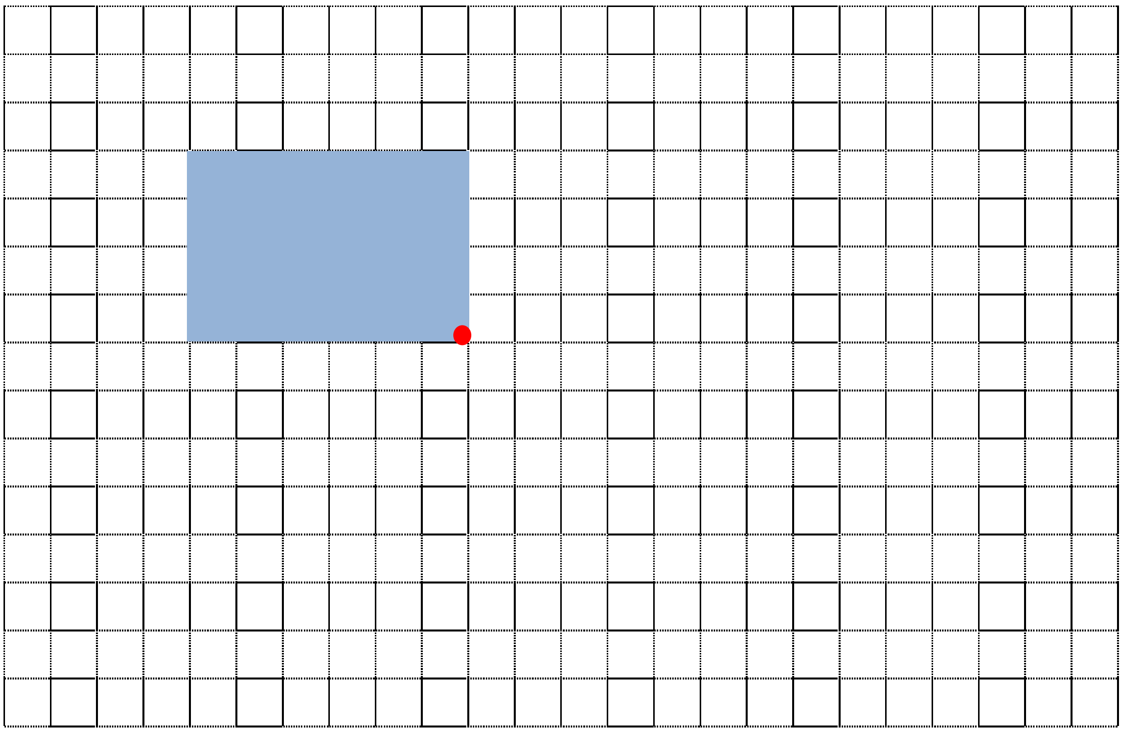
____

____

8) Completa:

- Na rotação de $\frac{1}{4}$ de volta, rodaste a imagem inicial __________ graus.
- Na rotação de $\frac{1}{2}$ volta, rodaste a imagem inicial __________ graus.
- Na rotação de $\frac{3}{4}$ de volta, rodaste a imagem inicial __________ graus.
- Na rotação de uma volta completa, rodaste a imagem inicial __________ graus.

9) Repara agora na seguinte figura.



9.1) Assinala cada um dos vértices do retângulo com as letras A,B, C e D

9.2) Roda o retângulo 90˚no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Considera o ponto assinalado a vermelho o centro de rotação. Desenha essa figura (imagem).

9.3) Assinala, na imagem cada um dos vértices correspondentes com as letras A´ B´ C´ D´.

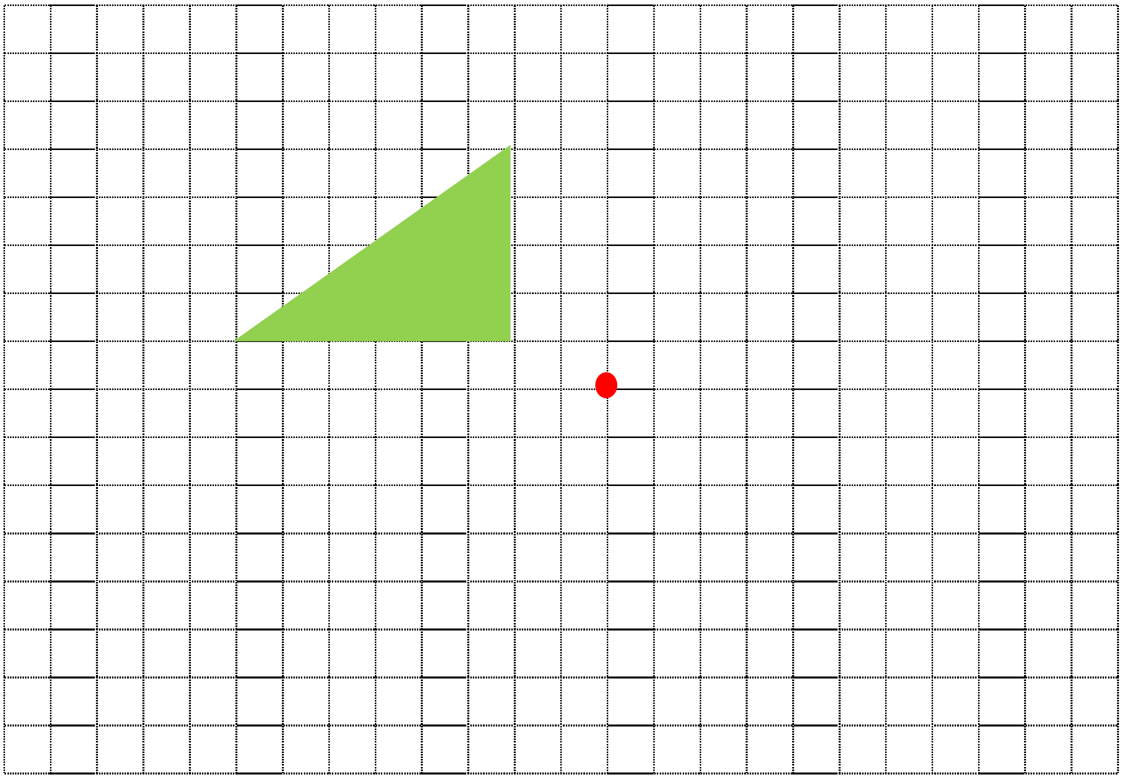
9.4) O que concluis relativamente à transformação realizada?

____

____

____

10. Agora, roda a seguinte figura 90˚,no sentido dos ponteiros do relógio . Considera o ponto de rotação assinalado a vermelho.



10.1) Assinala cada um dos vértices da figura com as letras **A , B e C**

10.2) Assinala cada um dos vértices correspondentes na imagem com as letras **A´, B´ e C´**

10.3) Une cada vértice da figura original ao centro da rotação e, em seguida, ao vértice correspondente na sua imagem.

10.4) Descreve o que observas.

____

____

____

T_6-

Tarefa 6: À roda com os polígonos

Objetivos

- Construir a imagem de uma figura por rotação.
- Compreender as propriedades da rotação.

Material necessário

- Polígonos recortados em cartolina com as dimensões do quadriculado (onde é assinalado o centro de rotação, a medida da amplitude da rotação e o sentido de rotação)
- Papel quadriculado
- Cola
- Régua

Procedimento

A. Escolhe um polígono e cola-o no papel quadriculado, de modo que os vértices da figura que escolheste coincidam com os vértices do quadriculado.

B. Respeitando as indicações dadas no polígono, faz a rotação.

C. O que **concluis** relativamente à rotação de uma figura.

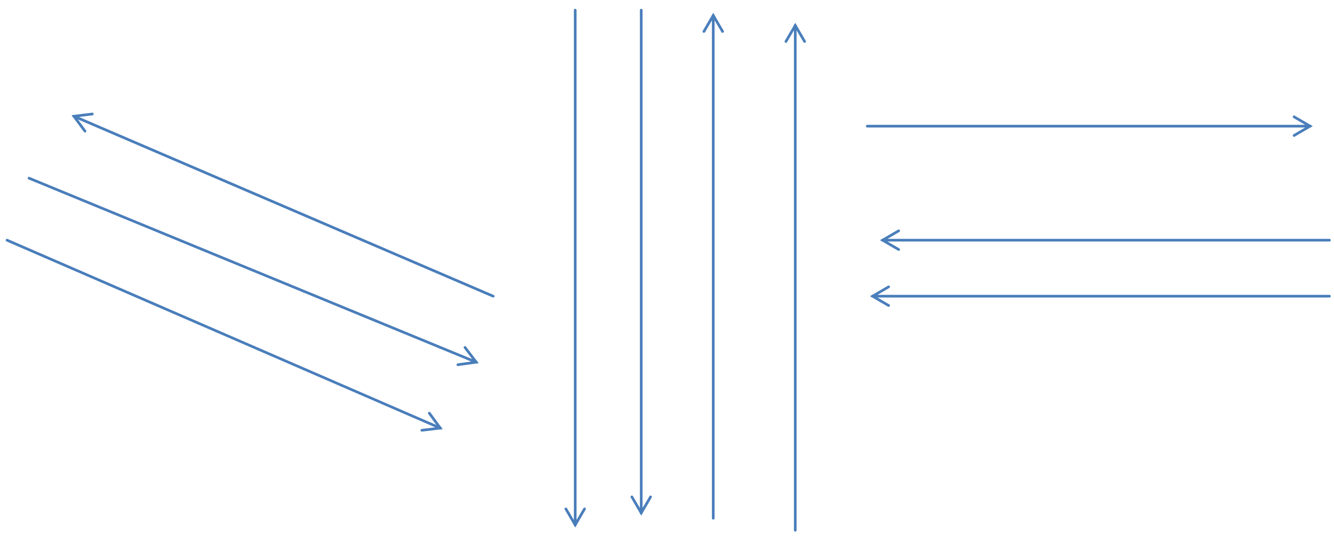
T_7 - **Tarefa 7 : Retas e mais retas**

Objetivos:

- Compreender o conceito de sentido e direção.

Procedimento:

1. Observa a imagem:



1.1. Indica:

a) Quantas retas vês na imagem?

____

b) E quantos direções consegues identificar?

____

c) E quantos sentidos?

____

T$_8$ - **Tarefa 8: O deslizamento do trapézio**

Objetivos:

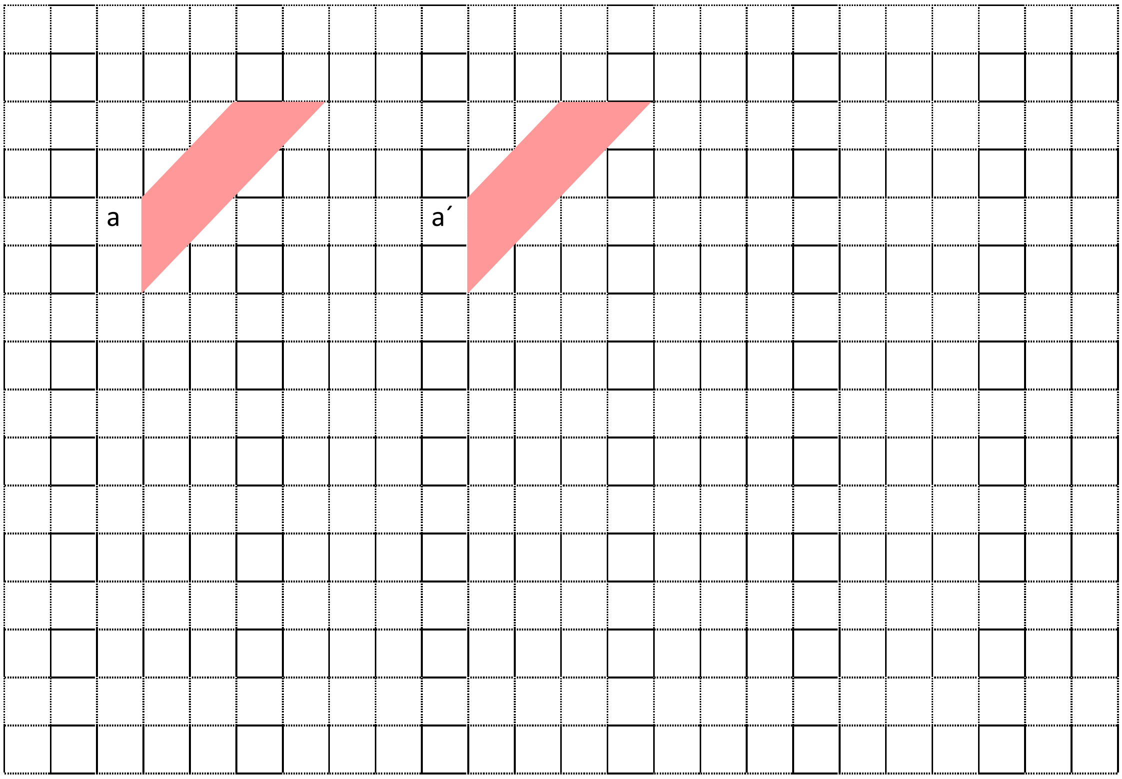
- Construir a imagem de uma figura por translação.
- Descrever uma translação.
- Compreender as propriedades da translação.

Materiais:

- Acetato ou papel vegetal
- Papel quadriculado

Procedimento:

1) Observa as figuras.



2) Compara o tamanho das **figuras a** e **a´.**

____

____

3) Descreve como é que a figura se transformou.

____

____

____

4) Imagina o movimento que faz deslizar o **trapézio a**, na direção horizontal, quinze quadrículas para a direita. Desenha a imagem obtida – chama-lhe **a´´**.

5) Agora, imagina o movimento que faz deslizar o **polígono a**, na direção vertical, oito quadrículas para baixo. Desenha a imagem obtida e chama-lhe **a** ´´´.

6) Decalca, em papel vegetal, a figura inicial e sobrepõe-a às figuras que desenhaste. O que observas?

____

____

7) Compara o original com cada uma das imagens. O que mudou? A direção? O sentido? O comprimento?

____

____

____

8) O que precisas para transformar uma figura noutra por translação?

____

____

____

T_9 - **Tarefa 9: Polígonos em movimento definido**

Objetivos

- Construir a imagem de uma figura por translação.
- Compreender as propriedades da translação.

Material necessário

- Polígonos recortados em cartolina, com as dimensões do quadriculado. (onde é assinalado o sentido, a direção e o comprimento: número de quadrículas)
- Papel quadriculado
- Cola
- Régua

Procedimento

A. Escolhe um polígono e cola-o no papel quadriculado, de modo que os vértices da figura que escolheste coincidam com os vértices do quadriculado

B. Respeitando as indicações dadas no polígono, faz a translação da figura.

C. O que **concluis** relativamente à translação de uma figura.

T_{10} -

Tarefa 10 : O voo da borboleta

Objetivos

- Identificar, predizer e descrever as isometrias em causa, dada a figura inicial e o transformado.

Materiais

Acetato

Procedimento

i. Observa as imagens.
ii. Copia a borboleta ´A´para a folha de acetato.

A

B

iii. Descobre que isometrias podes aplicar para transformar a borboleta A na borboleta B.

____

____

____

T_{11}- **<u>Tarefa 11 : Duas isometrias numa só?</u>**

<u>Objetivos</u>

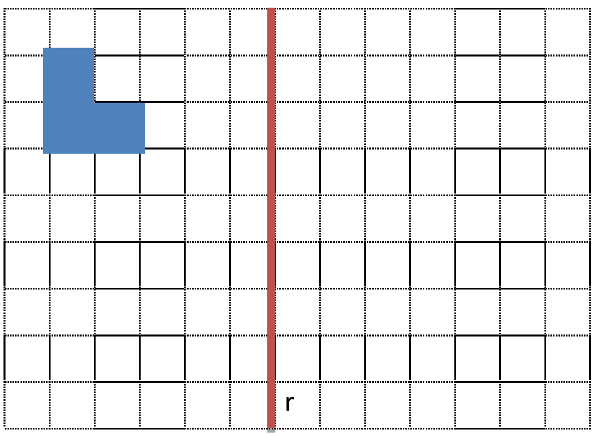
- Construir o transformado da figura através de uma reflexão deslizante

<u>Materiais</u>

- Papel quadriculado

<u>Procedimento</u>

1. Observa a figura.
2. Faz a reflexão da figura usando o eixo r.
3. De seguida desloca o transformado três quadrículas para baixo, na vertical.



4. Refere as isometrias que permitiram transformar a figura original na última figura que desenhaste

____

____

____

T$_{12}$ - **<u>Tarefa 12 : As voltas do passarinho</u>**

<u>Objetivos</u>

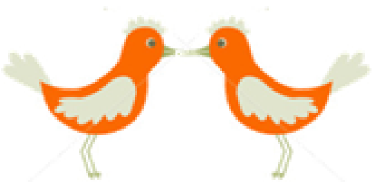
- Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos.
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando vocabulário próprio.
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

<u>Materiais</u>

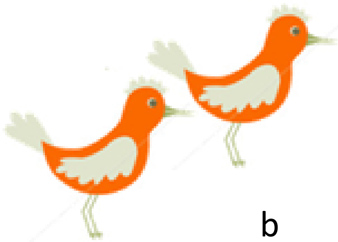
Acetato

<u>Procedimento</u>

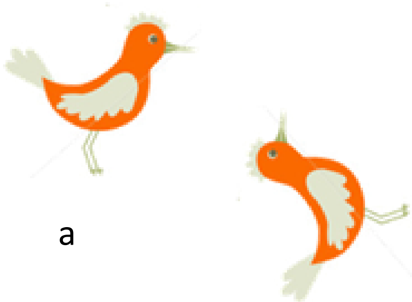
1. Observa as figuras.



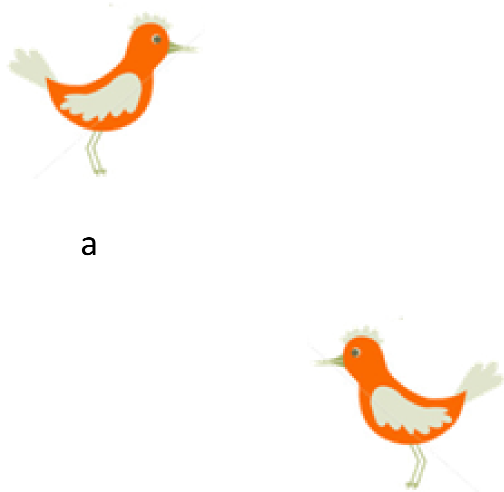
a b



b a



a b



a b

2. Foi sempre possível obter o pássaro **b** a partir do pássaro **a**? Porquê?

____

3. Explica como procedeste em cada uma das situações apresentadas.

____

____

____

Tarefa retirada de Propostas de um conjunto de tarefas para o 2º ciclo. Reflexão, rotação e translação (2010)

T_{13} - **<u>Tarefa 13 : O trapézio</u>**

<u>Objetivos</u>

- Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado;
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos;
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando vocabulário próprio;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos

<u>Materiais</u>

- Acetato

<u>Procedimento</u>

Descreve um movimento que transforme a primeira figura na segunda podes usar o acetato com a figura):

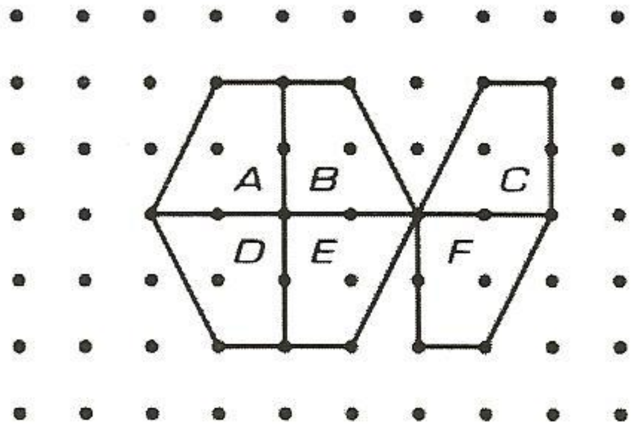
a) A figura A na figura B.

b) A figura A na figura C.

c) A figura B na figura D.

d) A figura B na figura E.

e) A figura B na figura F.



Nota: as letras apresentadas servem apenas para identificar cada figura, não pertencendo à própria figura

T_{14} -

Tarefa 14 : Transformações no geoplano

Objetivos

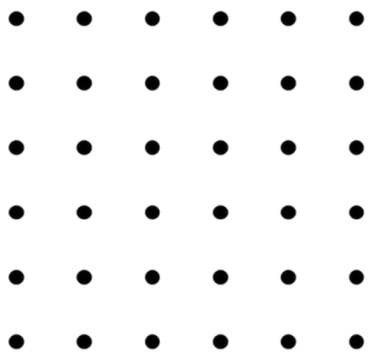
- Construir o transformado de uma figura por reflexão, translação ou rotação.
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos.
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando vocabulário próprio.
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

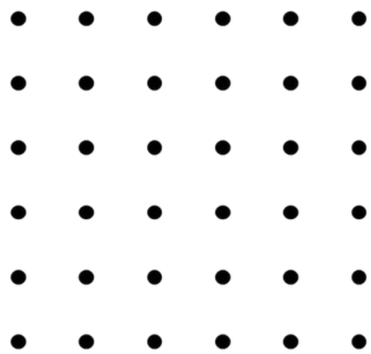
Materiais

- Geoplano
- Papel ponteado
-

Procedimento

a) Coloca um elástico no geoplano para funcionar como eixo de reflexão. Constrói uma figura do lado esquerdo do eixo e pede ao teu colega para construir o transformado por reflexão. Regista os resultados no papel ponteado. Troquem de funções e repitam o procedimento.





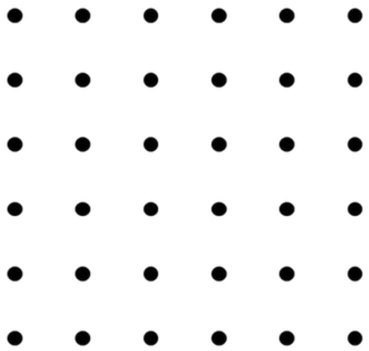
➢ O que podem concluir relativamente às características da reflexão?

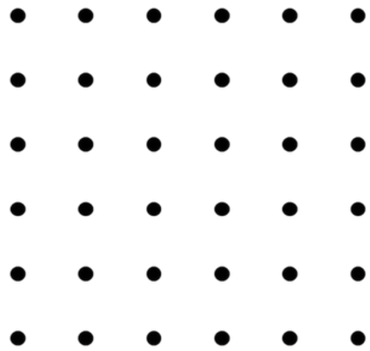
____

____

____

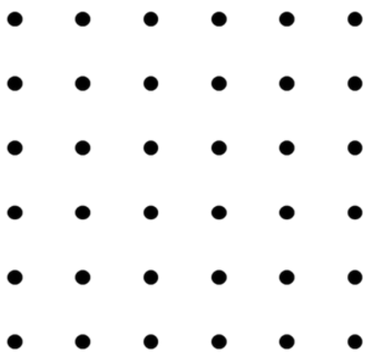
b) No canto inferior esquerdo do geoplano, constrói um triângulo escaleno pequeno. Pede ao teu colega para construir o transformado, dessa figura, por translação. Desenhem, no papel ponteado a figura e a imagem e descrevam a transformação ocorrida.

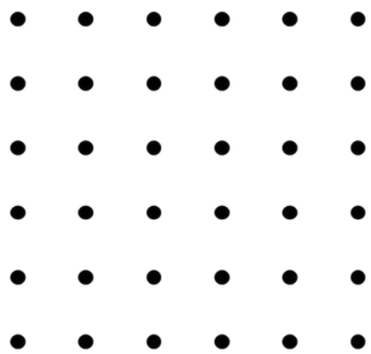




- O que podem concluir relativamente às características da translação?

c) Pede ao teu colega para construir, na parte central do geoplano, um triângulo retângulo escaleno . E tu vais construir o transformado por rotação de90˚ (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio) em torno do vértice do ângulo reto. Façam os respectivos registos no papel ponteado.





- O que podem concluir relativamente às características da rotação?

Tarefa retirada de Propostas de um conjunto de tarefas para o 2º ciclo. Reflexão, rotação e translação (2010)

T15 - **Tarefa 15: Jogo – rodar, deslizar ou refletir?**

Objetivos:

- Identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado.
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos.
- Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando vocabulário próprio.
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos

Material:

- Blocos padrão
- Cubos (marcadores)
- Cartões de pontos (dois por cada par)

Translações	Rotação (quarto de volta)	Reflexão (eixo vertical)
Reflexão	Translação	Rotação (volta completa)
Rotação	Reflexão (eixo horizontal)	Rotação (meia volta)

Translações	Rotação (quarto de volta)	Reflexão (eixo vertical)
Reflexão	Translação	Rotação (volta completa)
Rotação	Reflexão (eixo horizontal)	Rotação (meia volta)

Procedimento

- O jogo é feito em pares e cada jogador escolhe um cartão.
- Utilizando os blocos padrão cada jogador constrói um motivo e regista-o no seu caderno diário.
- Cada jogador efetua a isometria que entender sobre o seu motivo, desde que esteja disponível no cartão do adversário.
- De seguida, cada jogador tenta descobrir a isometria utilizada pelo seu adversário. Se a conseguir identificar correctamente, coloca um cubinho no cartão de pontos do adversário.

- No final da jogada, cada jogador faz o registo do transformado da forma inicial e da pontuação obtida pelo seu adversário (fazendo referência à isometria por ele utilizada e à isometria indicada pelo adversário).
- O jogo acaba quando um jogador tiver seis cubinhos no seu cartão.

T_{16} - **<u>Tarefa 16: Composições de isometrias</u>**

<u>Objetivos:</u>

- Construir o transformado de uma figura a partir de uma composição de isometrias.

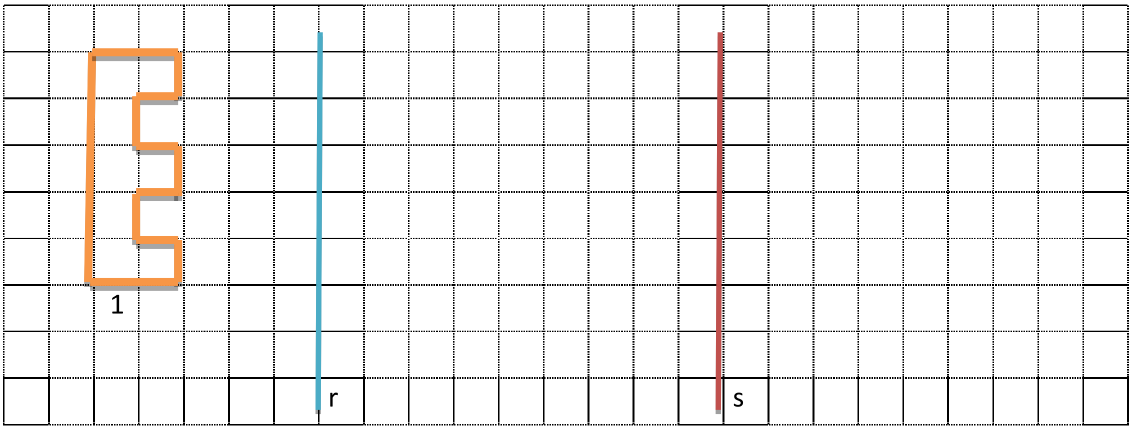
<u>Material</u>

- Papel quadriculado

<u>Procedimento</u>

1) Observa a figura

1.1) Desenha a figura 1 por reflexão usando o eixo r. Chama-lhe figura 2.



1.2) Faz uma nova reflexão, mas agora da figura 2 usando o eixo s. Chama-lhe figura 3.

1.3) Carateriza a isometria que permite passar, directamente, da figura 1 para a figura 3.

____

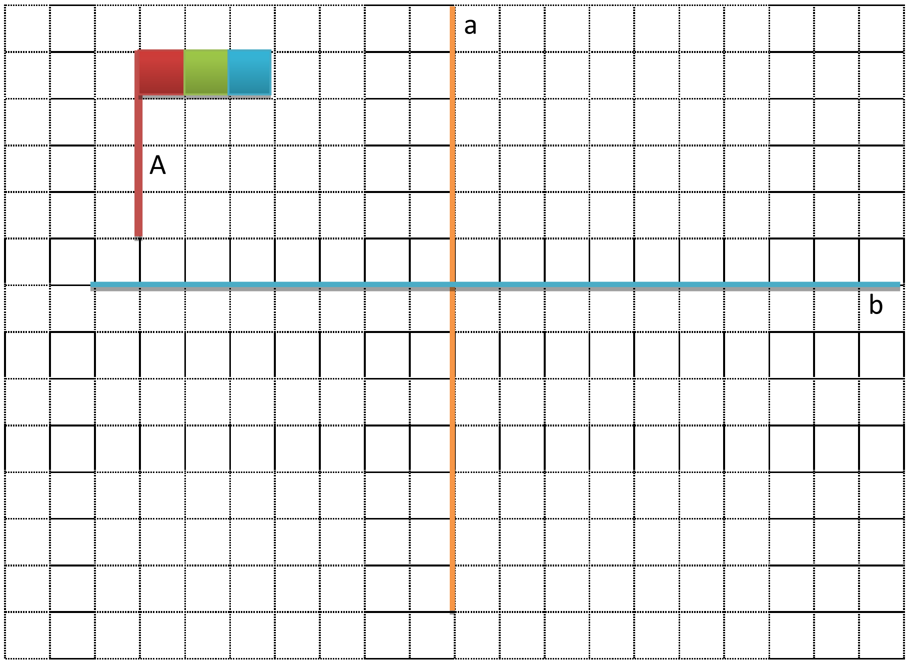
____

1.4) Que conclusão podes tirar desta composição de isometrias?

____

____

2) Observa a bandeira A, representada no canto superior esquerdo do quadriculado.



2.1) Faz a reflexão da bandeira usando o eixo vertical ´a.´ Chama-lhe bandeira B

2.2) Reflete, agora, a bandeira B, usando o eixo horizontal ´b´. Chama-lhe bandeira C.

2.3) Carateriza a isometria que permite transformar directamente a bandeira A na bandeira C.

____

____

____

Tarefa adaptada de Durão.E, Baldaque.M(2011). Matemática 6º ano. Volume 1. Texto Editora

T_{17} - **<u>Tarefa 17: O mata borrão</u>**

<u>Objetivos</u>

- Compreender o conceito de simetria de uma figura.

<u>Material:</u>

- Folha de papel branco.
- Guaches de diferentes cores.

<u>Procedimento:</u>

a. Coloca algumas gotas de guache (uma ou várias cores) na folha (como tu quiseres).
b. Dobra a folha, como entenderes. Vinca essa dobra.
c. Abre e descreve o que observas.

____
____
____
____

d. O que podes dizer relativamente à dobra que realizaste?

____
____

T18 - **<u>Tarefa 18: À descoberta das simetrias</u>**

<u>Objetivos</u>

- Compreender o conceito de simetria de uma figura.
- Compreender as noções de simetria axial e rotacional.
- Identificar as simetrias numa figura.

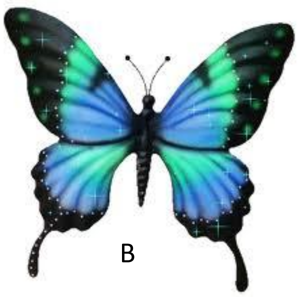
<u>Material:</u>

- Mira
- Acetato

<u>Procedimento:</u>

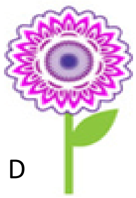
Observa as imagens e verifica se têm simetria de reflexão (confirma com o mira) e/ou se têm simetria de rotação (copia a imagem para acetato e roda o acetato sobre a 1ª imagem)

A



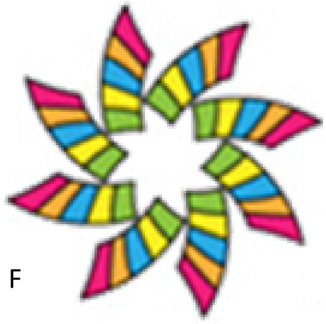
B

C



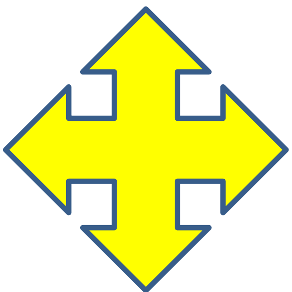
D

E



F

G



H

a) Usando o mira ou o acetato, identifica as imagens que têm simetria. Justifica.

Figuras	Simetria	
	Axial (simetria de reflexão)	Rotacional (simetria de rotação)
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

T$_{19}$ - __Tarefa 19: Simetrias de reflexão num polígono regular__

__Objetivos__

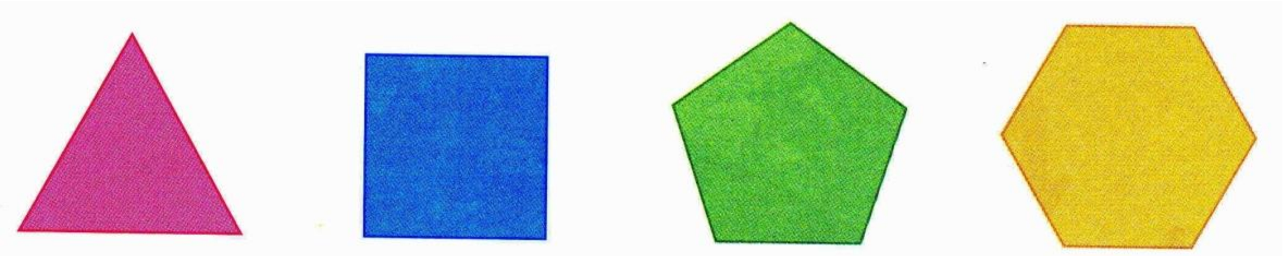
- Identificar num polígono simetrias de reflexão.
- Determinar o número de eixos de simetria num polígono regular.

__Materiais__

- Mira

__Procedimento__

Através da utilização do mira, descobre todos os eixos de reflexão de cada um dos polígonos regulares.



a) Faz os registos na tabela seguinte.

Nº de lados do polígono regular	3	4	5	6	7	8	…	n
Nº de eixos de simetria								

b) Na tabela que preencheste, que relação observas entre o número de lados do polígono e o número de eixos de **simetria**?

____

____

____

c) Em cada um dos polígonos regulares, explica por onde passam os eixos de **simetria** em relação aos vértices e aos lados.

____

____

____

d) Observa os eixos de **simetria** que traçaste em cada polígono. Como ficam divididos os ângulos que são atravessados por eixos de **simetria**?

____

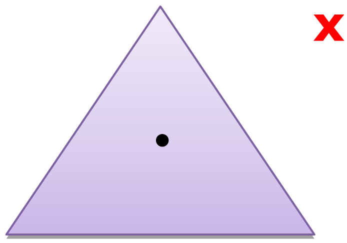
____

Tarefa retirada de Propostas de um conjunto de tarefas para o 2º ciclo. Reflexão, rotação e translação (2010)

T_{20} - **<u>Tarefa 20 : Simetrias de rotação de um polígono regular</u>**

<u>Objetivos</u>

- Identificar num polígono simetrias de rotação.
- Identificar a ordem da simetria de rotação de uma figura.



<u>Materiais</u>

- Acetato
- Polígonos regulares
- Transferidor

Procedimento

1. Copia o triângulo equilátero para a folha de acetato e o ponto de referência x
2. Coloca o triângulo copiado sobre o triângulo original. Com o auxílio do lápis ou do compasso, roda o acetato, lentamente em torno do ponto ● , até que os dois triângulos coincidam.
3. Conta o número de vezes que a imagem coincide com a figura original numa rotação completa de 360 ˚(até os pontos de referência voltarem a coincidir)
4. Repete os passos anteriores para os casos em que a figura original é um quadrado, um pentágono regular ou um hexágono regular.
5. Completa a seguinte tabela.

Nº de lados do polígono regular	3	4	5	6
Nº de simetrias de reflexão				
Nº de simetrias de rotação				
Medida das amplitudes da rotação				

6. Encontras alguma relação entre o número de lados de um polígono regular e o número de simetrias de rotação. Qual? Justifica.

____

____

____

7. Faz uma outra conjectura, mas esta sobre o número de simetrias de reflexão e o número de simetrias de rotação em polígonos regulares.

____

____

Tarefa adaptada de Durão.E, Baldaque.M(2011). Matemática 6º ano. Volume 1. Texto Editor

T_{21} - **<u>Tarefa 21: Simetrias de um triângulo</u>**

<u>Objetivos:</u>

- Classificar os triângulos de acordo com o número de simetrias de reflexão.

Material:

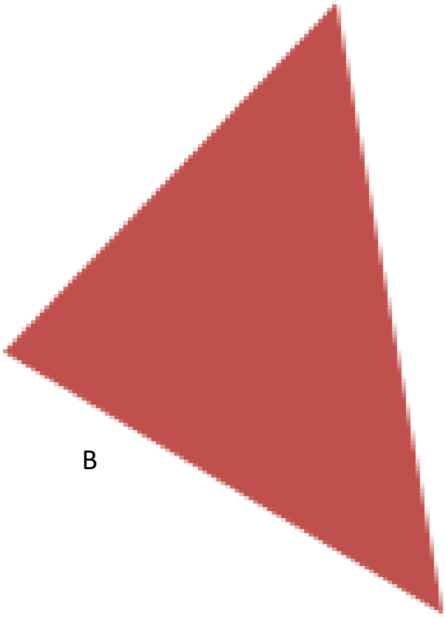
- Ficha de trabalho
- Mira

Procedimento:

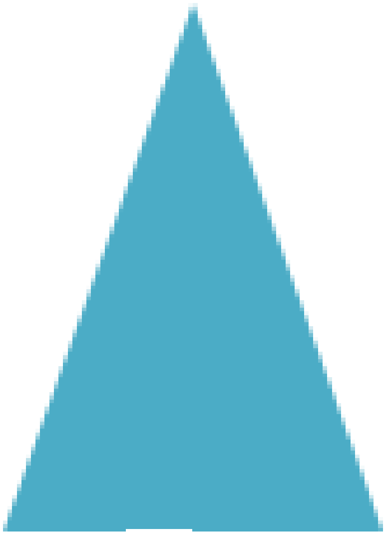
1. Traça em cada triângulo o (s) eixo (s) de simetria, se os tiver.
2. Completa o seguinte quadro:

Triângulo	Nº de eixos de reflexão	Classificação dos triângulos em relação ao cumprimento dos seus lados
Triângulo A		
Triângulo B		
Triângulo C		
Triângulo D		
Triângulo E		
Triângulo F		
Triângulo G		
Triângulo H		
Triângulo I		
Triângulo J		

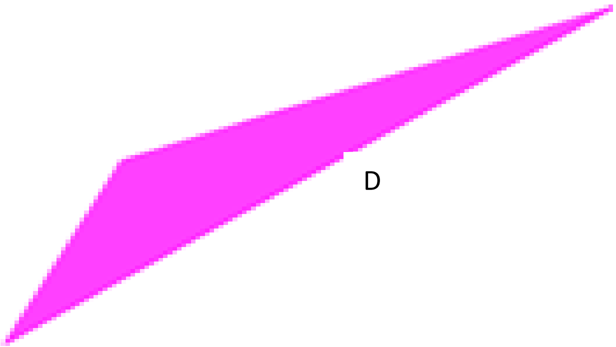
A



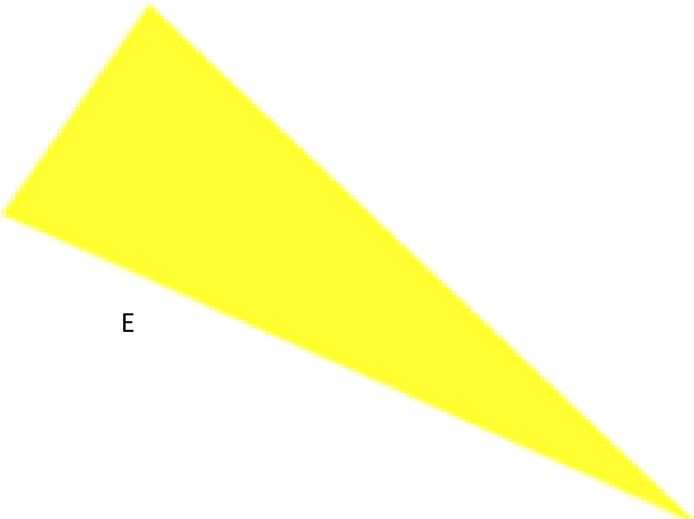
B



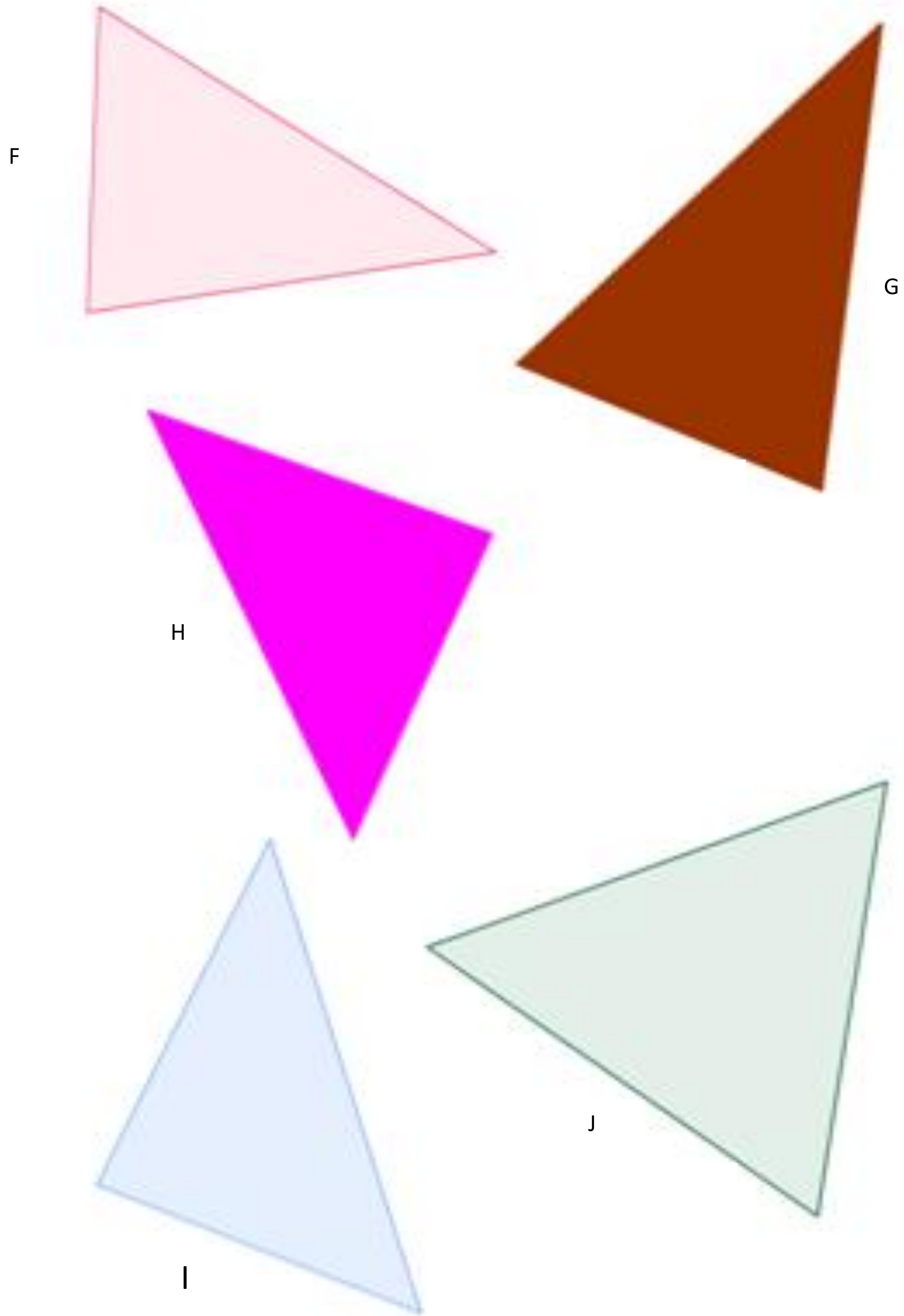
C



D



E


F
G
H
I
J

T_{22} - **<u>Tarefa 22: E tu? Tens simetria?</u>**

<u>Objetivos:</u>

- Compreender a noção de simetria

<u>Material:</u>

- Fotografia digitalizada (de cara e de frente para a objetiva)
- Computador

<u>Procedimento:</u>

1. Abre o programa Word e copia uma fotografia tua.

2. Corta a fotografia pelo que consideras ser o eixo de simetria, ficando a parte esquerda.

3. Copia e cola a imagem e faz a sua reflexão.

4. Junta as duas imagens.

5. O que verificas?

____

____

____

6. Faz o mesmo procedimento, mas agora deixando a parte direita da tua fotografia.

7. O que concluis?

____

____

____

T_{23}- **<u>Tarefa 23: Dobragens</u>**

<u>Objetivos:</u>

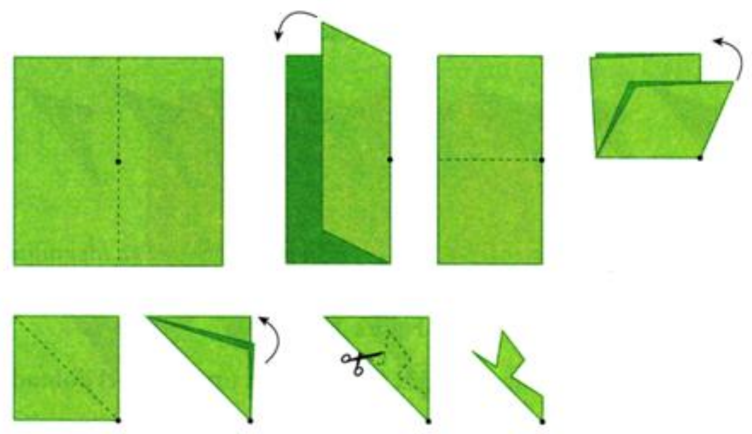
Identificar simetrias de reflexão e de rotação.

<u>Materiais:</u>

- Papel
- Tesoura

<u>Procedimento:</u>

Executa dobragens e cortes numa folha de papel de acordo com o esquema seguinte.



- Quando terminares, desdobra o teu trabalho com cuidado.

Que simetrias observas?

____
____
____

Tarefa adaptada de Propostas de um conjunto de tarefas para o 2º ciclo. Reflexão, rotação e translação (2010)

T24 - **<u>Tarefa 24: À roda com as rosáceas</u>**

<u>Objetivos:</u>

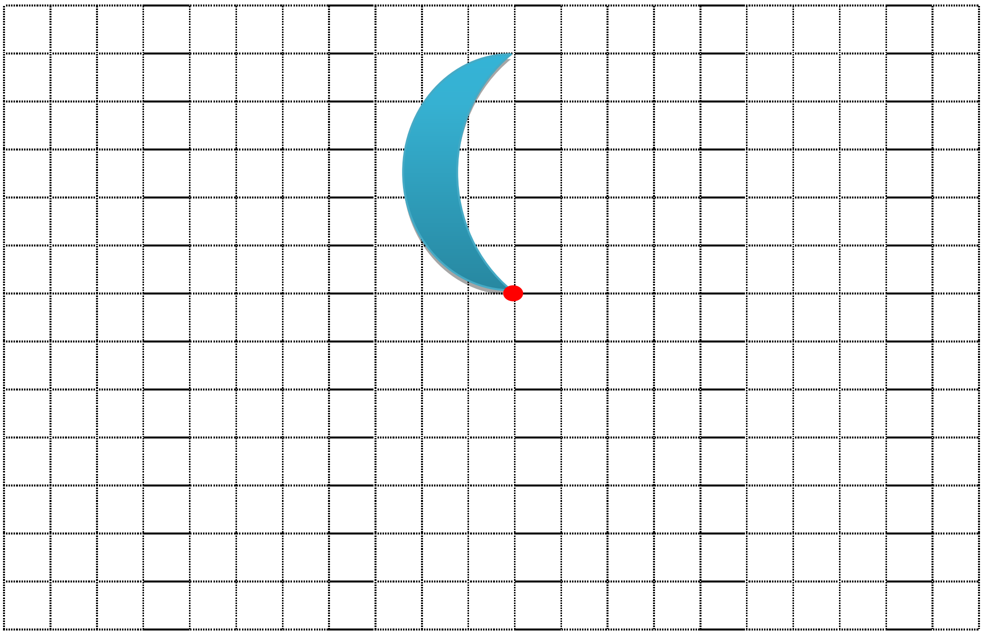
- Identificar simetrias em rosáceas.
- Construir rosáceas.

<u>Materiais:</u>

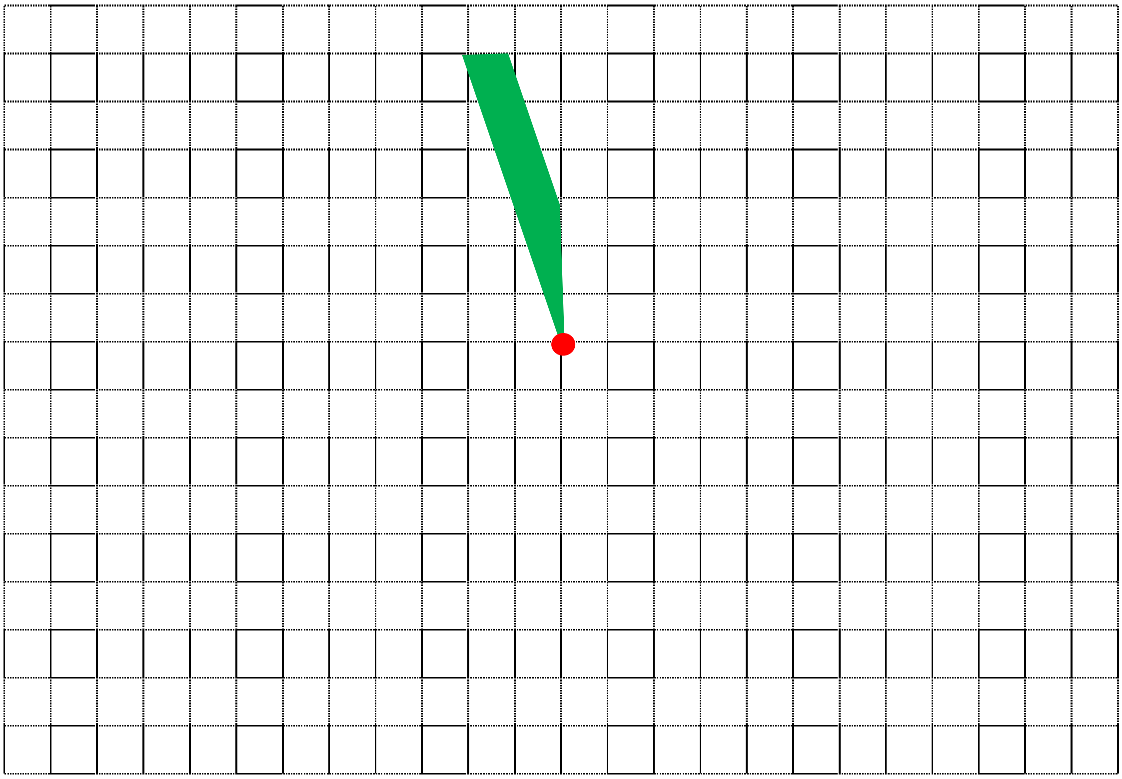
- Papel vegetal
- Papel quadriculado

<u>Procedimento:</u>

A. Roda a imagem 90°, em torno do ponto assinalado a vermelho, no sentido dos ponteiros do relógio. Faz sucessivas rotações de 90° , das imagens que vais obtendo.(sempre no sentido dos ponteiros do relógio, em torno do ponto assinalado a vermelho)



B. Roda a imagem 45 °, em torno do ponto assinalado a vermelho, no sentido do ponteiro do relógio. Faz sucessivas rotações de 45° , das imagens que vais obtendo (sempre no sentido dos ponteiros do relógio, em torno do ponto assinalado a vermelho)



C. O que podes dizer relativamente às figuras que obtiveste?

____

____

____

____