INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Helena Parente da Costa Rufo Felgueiras

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DA DESCOBERTA DE PADRÕES: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 1º ANO DE ESCOLARIDADE

Curso de Mestrado em Educação
Didática da Matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Ana Cristina Coelho Barbosa

dezembro de 2011

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível com o apoio de diferentes pessoas que contribuíram de forma significativa para a sua concretização. Neste sentido não poderia deixar de agradecer a todas.

À Professora Doutora Ana Barbosa um agradecimento muito especial pela forma como orientou todo o meu trabalho, pela disponibilidade, conselhos críticos e pelo apoio incondicional demonstrado ao longo da realização deste trabalho. A sua colaboração e empenho permitiram a elaboração e conclusão atempada deste estudo.

A todos os professores que comentaram as tarefas aplicadas no estudo.

À Direção do Agrupamento de escolas e ao coordenador da escola à qual pertenço pelo consentimento e apoio desde o primeiro momento sem os quais não era possível concretizar este trabalho.

Aos pais e alunos intervenientes no estudo, pela forma como se disponibilizaram e cooperaram tornando possível a sua realização e por tudo o que aprendi com eles.

Aos meus colegas professores e amigos pelas palavras de afeto e encorajamento.

À minha família, em especial ao meu marido, que me apoiou nas horas mais difíceis, assim como aos meus filhos, cujo apoio incondicional permitiu a concretização do estudo e que estiveram sempre presentes.

RESUMO

O presente estudo procura compreender como alunos do 1.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a procura de padrões, em diferentes contextos. Para aprofundar e contextualizar este problema definiram-se as seguintes questões orientadoras: (1) Como se caracterizam as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos?; (2) Que dificuldades apresentam os alunos na resolução deste tipo de problemas?; e (3) Qual o impacto dos contextos no desempenho dos alunos?

O estudo seguiu uma metodologia de natureza qualitativa, num *design* de estudo de caso, e concretizou-se no ano letivo 2010/2011, tendo a recolha de dados ocorrido entre os meses de fevereiro e maio. Esta recolha teve como principais instrumentos a observação participante, entrevistas semiestruturadas realizadas aos alunos da turma do 1.º ano, gravações vídeo e áudio das sessões de implementação das tarefas e documentos, uns produzidos pelos alunos da turma no âmbito das tarefas propostas e outros documentos existentes na escola que facilitaram a caracterização do contexto e dos participantes. A investigadora foi a principal fonte de recolha de dados, tendo assumido o duplo papel de investigadora e professora da turma.

A análise dos dados permitiu verificar que o tipo de tarefas propostas, contemplando sequências de repetição e de crescimento, visuais e numéricas, e problemas de processo associados à exploração de padrões suscitaram um grande entusiasmo aos alunos e conduziram à utilização de múltiplas estratégias, sendo as mais comuns de natureza recursiva, como as contagens e a verbalização da estrutura do padrão. Pelas experiências que têm ao nível da Matemática, os alunos têm maior propensão para os números do que para aspetos visuais, no entanto também aplicaram estratégias de tipo visual. Revelaram dificuldades no recurso a linguagem apropriada para a explicitação do seu raciocínio e na descoberta de relações funcionais. Não evidenciaram diferenças na exploração de sequências de repetição e de crescimento. O recurso a material concreto revelou-se um importante contributo para identificarem a estrutura dos termos de algumas das sequências exploradas.

As tarefas propostas possibilitaram o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos, entre diferentes tipos de representações, contribuindo para o desenvolvimento das capacidades transversais. A introdução progressiva e regular deste tipo de tarefas, acompanhadas dos respetivos registos, na atividade matemática dos alunos poderá contribuir para que melhorem a sua capacidade de argumentação, de comunicação escrita e de resolução de problemas.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática; Resolução de problemas; Padrões; Estratégias de resolução; Dificuldades.

ABSTRACT

This study seeks to understand how first grade students solve problems that involve looking for patterns, in different contexts. To deeper understand and contextualize this problem the following guiding questions were defined: (1) How can we characterize the strategies used by students?; (2) What difficulties do students present when solving such problems?; and (3) What is the impact of the different contexts on students performance?

The study followed a qualitative methodology, with a case study design, and was implemented in the 2010/2011 school year, data was collected between February and May. The data was collected through participant observation, semistructured interviews with the participant students, audio and video recordings of the sessions of implementation of the tasks, and documents, some produced by students related to the proposed tasks and other documents facilitated by the school to characterize the context and the participants. The researcher was the main source of data collection, assuming the dual roles of researcher and teacher of these students.

Data analysis has shown that the type of tasks proposed, comprising repeating sequences and growing sequences, visual and numerical, and process problems associated with the exploration of patterns, raised a great enthusiasm in students and led to the use of multiple strategies, the most common being of recursive nature, such as counting and verbalization of the structure of the pattern. With the experiences that these students had in Mathematics, they were more likely to privilege numbers than visual approaches, however they also applied visual strategies. They experienced some difficulties when using correct language to explain their thoughts and on discovering functional relationships. No difference was found in the exploration of repeating sequences and growing sequences. The use of concrete material proved to be an important contribution to identify the structure of the terms of some of the sequences explored.

The proposed tasks enabled the establishment of connections between mathematical concepts, between different types of representations, contributing to the development of transversal abilities. The progressive and regular introduction of this type of tasks, accompanied by the respective records, in the mathematical activity of students may contribute to enhance reasoning, written communication and problem solving.

Keywords: Mathematics learning; Problem solving; Patterns; Strategies; Difficulties.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

APM – Associação de Professores de Matemática

DEB - Departamento de Educação Básica

DGEBS – Direção Geral do Ensino Básico e Secundário

DGIDC – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

ME – Ministério da Educação

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se as principais ideias que conduziram à realização deste estudo, contextualizando a relevância da investigação levada a cabo. São definidos o problema e as questões que orientam o estudo e, por fim, é sintetizada a estrutura geral do trabalho.

Contexto e pertinência do estudo

Por norma, socialmente a Matemática é encarada como uma disciplina potenciadora de grandes dificuldades, fazendo com que os alunos tenham uma imagem negativa e de incapacidade face a esta disciplina, muitas vezes antes de ingressarem na escolaridade obrigatória, o que suscita frequentemente atitudes como a desmotivação e a falta de persistência. É por isso fundamental que o professor contemple, nas aulas de Matemática, tarefas desafiantes e significativas para os alunos, procurando estabelecer conexões com outras áreas e com o quotidiano, de modo a incrementar o interesse e a valorização desta disciplina. O ano letivo 2009/2010 coincide com a generalização do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) e, como é natural, apresenta orientações que implicam alterações nas práticas letivas, face aos programas anteriores, por exemplo ao reorganizar de forma diferente a distribuição dos conteúdos ao longo do ensino básico, ao enfatizar determinados temas matemáticos e através da apresentação de sugestões metodológicas que contribuem para uma visão mais positiva da Matemática. Todos estes fatores despertaram em mim o interesse em desmistificar um pouco esta conceção de que a Matemática é uma disciplina difícil e que não está ao alcance de todos, podendo ainda demonstrar que torna possível o estabelecimento de pontes com outras áreas disciplinares e com o quotidiano, preparando os alunos para o futuro. Ao realizar este estudo pretende-se dar um contributo de mudança, mostrando que o envolvimento ativo dos alunos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática permite que compreendam, desde os primeiros anos, a natureza desta ciência e o que significa *fazer* matemática:

> Por isso hoje, certamente também mais do que nunca, se exige da escola uma formação sólida em Matemática para todos os alunos: uma formação que permita aos

> alunos compreender e utilizar a Matemática, desde logo ao longo do percurso escolar de cada um, nas diferentes disciplinas em que ela é necessária, mas igualmente depois da escolaridade, na profissão e na vida pessoal e em sociedade; uma formação que promova nos alunos uma visão adequada da Matemática e da atividade matemática, bem como o reconhecimento do seu contributo para o desenvolvimento científico e tecnológico e da sua importância cultural e social em geral; e, ainda, uma formação que também promova nos alunos uma relação positiva com a disciplina e a confiança nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela. (ME-DGIDC, 2007, p.3)

No exercício das minhas funções tenho verificado que os alunos manifestam muitas dificuldades na resolução de problemas, quer através das suas participações orais, quer através dos registos que apresentam. Naturalmente que associada ao conceito de problema está a noção de dificuldade e sem esta não existe problema (Pólya, 2003). No entanto, a resolução de problemas tem assumido, desde a década de oitenta, um papel central no currículo de Matemática, como processo, como metodologia e como capacidade. Segundo Fernandes (2007) "a resolução de problemas pretende levar os alunos a discutir e refletir sobre a sua forma de pensar e a dos seus pares, a validar resultados e a construir argumentos convincentes" (p. 1). Nesta perspetiva, o insucesso dos alunos é preocupante.

O novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) reforça a relevância do papel da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática destacando-a, a par com a comunicação e o raciocínio matemáticos, como objetivo central de aprendizagem, como orientação metodológica para estruturar as tarefas a realizar em sala de aula, mas também como uma capacidade transversal, considerando que os alunos devem adquirir destreza na resolução de problemas em qualquer contexto. Nesta investigação será por isso valorizada a vertente da resolução de problemas.

A Álgebra é um dos temas matemáticos em destaque nas atuais orientações curriculares para o ensino básico (ME-DGIDC, 2007), surgindo de forma clara a partir do 2.º ciclo. No entanto, há referências a objetivos associados ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde o 1.º ciclo, integrados nos temas Números e Operações e Geometria e Medida. Estes objetivos traduzem-se na investigação de sequências numéricas e padrões geométricos, apelando ao reconhecimento de regularidades e à compreensão de relações, formulando e justificando conjeturas. As tarefas que têm por base a exploração de padrões podem contribuir de forma crucial para o desenvolvimento de competências próprias da resolução de problemas como: a análise de casos particulares, a sistematização de dados, a formulação de conjeturas e a generalização (Barbosa, Vale & Palhares, 2008). Permitem também uma maior aproximação à atividade de um matemático, envolvendo ativamente os alunos na descoberta de relações e ideias.

Considerando os aspetos anteriormente referidos, a realização desta investigação relaciona-se com o interesse em compreender algumas das dificuldades e procedimentos associados à resolução de problemas em Matemática, procurando perceber o contributo da exploração de padrões desde os primeiros anos, tendo como referência o facto de este tipo de tarefas proporcionarem um ambiente de aprendizagem envolvente, significativo, próximo da realidade da verdadeira atividade matemática, evidenciando a vertente experimental e indutiva da Matemática.

Problema e questões de investigação

Tendo por base as ideias discutidas anteriormente, este estudo tem como principal objetivo analisar o modo como alunos do 1.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a procura de padrões, em diferentes contextos. Com a finalidade de refletir sobre esta problemática foram definidas algumas questões de investigação, a partir das quais se orienta o estudo, e que incidirão sobre uma turma de alunos do 1.º ano:

1) Como se caracterizam as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos?
2) Que dificuldades apresentam os alunos na resolução deste tipo de problemas?
3) Qual o impacto dos contextos no desempenho dos alunos?

O estudo das abordagens utilizadas por alunos deste nível de ensino no que refere à exploração de padrões, bem como das dificuldades emergentes do seu trabalho, realizado em diferentes contextos poderá contribuir para uma compreensão e caracterização mais aprofundada da forma como resolvem problemas deste tipo. Estes aspetos serão analisados em contextos associados a sequências de repetição, a sequências de crescimento, de natureza visual e numérica, e problemas de processo que potenciam a procura de padrões.

Organização geral do Trabalho

Para a estruturação e concretização dos objetivos desta investigação foi analisado o desempenho de uma turma do 1.º ano de escolaridade, no que refere à resolução de problemas envolvendo a exploração de padrões. Este trabalho encontra-se organizado em seis capítulos que se descrevem em seguida, de forma sucinta.

No primeiro capítulo, *Introdução*, é focada a importância e o significado do estudo, salientando o problema e as questões que o orientam.

No segundo capítulo, *Enquadramento Teórico*, é efetuada a revisão de literatura, centrada no problema associado a esta investigação, onde se discutem ideias relacionadas com: o ensino e a aprendizagem da Matemática, a resolução de problemas, a exploração de padrões e a relação entre a resolução de problemas e a descoberta de padrões, abordando aspetos ligados à generalização.

No terceiro capítulo, *Metodologia*, são definidas e fundamentadas as opções metodológicas tomadas, as técnicas e procedimentos utilizados na recolha de dados e a maneira como foram analisados.

No quarto capítulo, *Contexto do Estudo*, apresenta-se a caracterização dos participantes no estudo e das tarefas implementadas.

No quinto capítulo, *Análise dos dados*, é feita uma análise detalhada do trabalho desenvolvido pelos alunos em cada uma das tarefas, focando aspetos associados às questões deste estudo.

No sexto capítulo, *Conclusões*, faz-se uma síntese dos principais resultados, advindos da integração da análise dos dados e do enquadramento teórico, apresentando também uma reflexão final sobre o estudo com enfoque nas implicações para a prática profissional, recomendações para investigação futura e identificação de algumas limitações do estudo empírico desenvolvido.

Finalmente apresentam-se as referências bibliográficas utilizadas neste estudo, bem como os anexos.

CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo é apresentado o enquadramento teórico do estudo, procedendo à contextualização das principais temáticas relacionadas com esta investigação. Pretende-se assim sintetizar as ideias centrais e correntes teóricas, emergentes de documentos curriculares e de literatura referente a investigações em educação matemática, tendo por base os objetivos do estudo.

A primeira secção deste capítulo é mais abrangente e diz respeito ao ensino e à aprendizagem da Matemática. De uma forma global, procura-se esclarecer o que caracteriza a atividade matemática, descrevendo alguns dos principais aspetos da natureza da Matemática, tentando assim compreender de que forma estas características influenciam as aulas desta disciplina. Faz-se ainda referência às atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática e à importância da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da matemática, em diferentes vertentes.

Na secção seguinte são abordadas questões relacionadas com a exploração de padrões em matemática. Começa-se por esclarecer o conceito de padrão, sendo para isso apresentadas e comparadas definições de autores de referência. Posteriormente é analisada a presença dos padrões no currículo de Matemática, em particular no ensino básico, a sua relação com a resolução de problemas e com a generalização.

O Ensino e a Aprendizagem da Matemática

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática é essencial considerar um triângulo didático dinâmico cujos vértices são: o conhecimento matemático, o professor e os alunos. Todas as componentes deste triângulo são essenciais e têm um papel crucial, surgindo de forma fluida e inter-relacionada. Neste sentido, é fundamental que se discutam aspetos como: a natureza da Matemática, o conhecimento matemático, a atividade matemática, a importância das tarefas propostas pelo professor e o papel do aluno.

A Matemática e a atividade matemática

A Matemática é vista globalmente pela sociedade como uma ciência exata, pura, constituída por um corpo de conhecimentos construído dedutiva e cumulativamente, com rigor absoluto. Contudo, diversos investigadores defendem que é necessário olhar para a Matemática como resultado de uma atividade humana, sendo por isso fundamental analisá-la numa perspetiva mais dinâmica, considerando não só o modo como é constituída e como evolui, mas também a vertente experimental e indutiva associada ao processo de criação (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999). Há uma diversidade de matemáticos, filósofos e educadores que defendem que a conceção que se sustenta sobre a Matemática condiciona inevitavelmente aquilo que será o seu ensino e aprendizagem, sublinhando a importância de se saber então qual a natureza da Matemática (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

Investigadores e educadores matemáticos salientam a importância da atitude investigativa como uma característica fundamental da atividade matemática, uma vez que envolve diretamente os intervenientes na construção de ideias, relações e conhecimento matemáticos, potenciando o nível de desafio e motivação através de descobertas significativas. A exploração de situações problemáticas e de natureza investigativa contribuem para que os alunos experienciem momentos genuínos de matemática, permitindo que se aproximem do trabalho de um verdadeiro matemático (Polya, 2003). Para uma melhor compreensão do que é a Matemática e do significado de *fazer* matemática deve ser dada aos alunos a oportunidade de resolver problemas, procurando regularidades, formulando e argumentando conjeturas. Durante o seu percurso escolar o aluno deverá desenvolver um conjunto de competências relacionadas com conteúdos, capacidades e atitudes, através de um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem, contribuindo para que sejam cidadãos portadores de uma literacia matemática adequada à sua vida profissional, social e pessoal (Ponte & Serrazina, 2000).

A Natureza da Matemática

Ao longo dos tempos a Matemática tem passado por um processo de evolução constante, sendo identificadas mudanças profundas em alguns aspetos considerados essenciais. A discussão sobre a natureza dos objetos matemáticos, a sua existência e realidade tem gerado múltiplas respostas e perspetivas controversas.

Para as primeiras civilizações orientais, do Egito e da Babilónia, os conceitos matemáticos eram pensados apenas num plano estritamente concreto, quer na aritmética, quer na geometria. A partir do século V, surgiram com os pensadores gregos as primeiras demonstrações e consequentemente novas maneiras de estruturar e definir noções matemáticas, o que veio apoiar a ideia de imaterialidade dos objetos matemáticos. Com os gregos, os matemáticos começaram a constatar que os elementos sobre os quais raciocinam têm o caráter de objetos do pensamento, obtidos por abstração, a partir de objetos acessíveis aos sentidos. Houve então um reconhecimento da imaterialidade dos seres com que trabalhavam, no entanto associados a imagens acessíveis aos sentidos. A necessidade de progredir no conhecimento foi conduzindo à introdução de novos objetos matemáticos que deixaram de apoiar-se nos sentidos, surgindo do estabelecimento de relações entre elementos já existentes, sendo assim delineada, de forma gradual, a ideia de estrutura na base de qualquer teoria matemática.

Para além da natureza dos objetos matemáticos torna-se também pertinente analisar a sua dependência face ao sujeito que os estuda. Destacam-se aqui duas conceções: a idealista e a realista (ou platonista). Na primeira, os objetos matemáticos são considerados fruto da invenção do homem o que significa que não existem autonomamente, sendo determinados pelo pensamento. Na segunda, os objetos são reais e a sua existência é um facto totalmente independente do nosso pensamento. Embora estas duas correntes de pensamento defendam posições opostas, o idealismo e o platonismo estão muitas vezes presentes, e em simultâneo, nas conceções dos professores acerca da Matemática. Esta dualidade é sublinhada por Ponte *et al.* (1997) que salientam que “a Matemática é vista como uma passagem do concreto ao abstrato, mas por outro lado, o professor espanta-se com a sua aplicabilidade à interpretação do mundo físico” (pp. 4-5).

Outra componente importante na análise da natureza dos objetos matemáticos relaciona-se com o papel da experiência e da razão sendo distinguidas duas perspetivas: o racionalismo e o empiricismo (Ponte *et al.*, 1997). Para os racionalistas, a razão é uma característica intrínseca à mente humana que permite conhecer o mundo, independentemente da observação. Com o progresso das ciências da natureza, que tinham por base o método experimental, surge o empiricismo defendendo que todo o conhecimento tinha por base a observação. No caso particular do conhecimento matemático, os empiricistas referem que as afirmações matemáticas não são mais do que generalizações indutivas que advêm das experiências e observações feitas pelos indivíduos. Como se pode constatar, são duas visões contraditórias. Numa tentativa de unificar estas duas correntes de pensamento, Kant enfatiza o papel da razão, no entanto salienta que os dados provenientes da observação estimulam o poder organizador do espírito (Ponte *et al.*, 1997). Esta visão de Kant, perspetivando a ideia de complementaridade do racionalismo e do empiricismo, pode ser traduzida para a aula de Matemática pensando o ensino da Matemática voltado para atividades de índole investigativa, promovendo deste modo a expressão criadora dos alunos, ou seja, o processo de produção matemática que é intrínseco ao que é a matemática e também ao que constitui saber matemática (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999). O pensamento matemático, nas suas várias dimensões e na vertente inferencial, tem a dominante na atividade investigativa. As inferências de tipo dedutivo predominavam antigamente na matemática formal, ou seja, na matemática já *feita*, relegando para segundo plano qualquer outro tipo de inferência. Atualmente, tendo em conta que o conhecimento matemático está em construção, pensa-se que o pensamento dedutivo se articula com outros tipos de pensamento inferencial, principalmente o indutivo, o abdutivo e o transformativo (Oliveira, 2002).

Para Davis e Hersh (1995) os vários processos no desenvolvimento do raciocínio matemático são fundamentais para a construção do conhecimento, referindo que: (1) o processo de abstração é a base para a compreensão dos símbolos matemáticos; (2) a generalização possibilita a consolidação de conhecimentos; (3) a formalização ajuda a uma preparação para a utilização de símbolos; (4) a demonstração desenvolve o conhecimento e a compreensão. Salientam ainda o importante papel das demonstrações matemáticas e que a abstração, a formalização, a axiomatização e a dedução são componentes fundamentais da demonstração, dando por isso um papel central ao pensamento dedutivo. Pólya (2003) sustenta a versão que os raciocínios indutivo e dedutivo se completam pelo que devem ser utilizados na aula de Matemática e devem estar presentes lado a lado, o primeiro com um caráter experimental, capaz de gerar descobertas, e o segundo com a intenção de validar.

Com a evolução da informação e das necessidades da sociedade também a Matemática foi evoluindo, tentando responder aos problemas que vão surgindo, e, por essa razão, tem ocupado um lugar importante na história da cultura da humanidade. Este crescimento do conhecimento matemático, a sua abrangência no que refere às áreas temáticas que integra, tornam complexa a tarefa de definir o que é a Matemática. Apesar desta diversidade há uma definição que parece reunir o consenso da maioria dos matemáticos a de Matemática como a ciência dos padrões (e.g. Devlin, 2002; Steen, 1988). Devlin (2002) refere que a Matemática tem subjacente a identificação de padrões abstratos, que poderão ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, tornando visível o invisível. Já Davis e Hersh (1995) referem que a finalidade da matemática está em descobrir a regularidade onde parece vingar o caos. Com todas estas características, a Matemática assume um papel central na educação. Para além dos teoremas, dos axiomas e das teorias, a Matemática proporciona modos particulares de pensamento que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Estes devem ter oportunidades de participar em tarefas desafiadoras, resolver situações problemáticas e também ler, escrever e discutir ideias, onde o uso da linguagem matemática se torne natural e possam experienciar diferentes níveis de raciocínio matemático.

A aula de matemática

Quando se fala da Matemática no currículo escolar é necessário considerar as conceções e paradigmas teóricos associados à estruturação do conhecimento matemático, as experiências que se espera que os alunos vivenciem e as condições que permitem a sua concretização. A aprendizagem da matemática deve ser vista como um processo em que os alunos têm contacto com oportunidades de se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática, destacando-se a importância do caráter dinâmico e indutivo do processo de criação matemática e não apenas o contacto com o produto final (Alvarenga, 2006). Aprender matemática deve transformar-se em *fazer* matemática.

O conhecimento e a compreensão sobre a forma como os alunos aprendem são elementos fulcrais para o ensino da Matemática, contribuindo de forma significativa para a construção e o refinamento do pensamento dos alunos e para uma diversidade de aspetos associados à prática docente (Barbosa, 2010). Aos alunos devem ser dadas oportunidades de trabalharem tarefas diversificadas que devem ser adequadas ao seu nível de maturidade e por eles valorizadas, tentando que vivenciem experiências com características muito semelhantes às dos verdadeiros matemáticos. Deste modo, os alunos estabelecem um paralelismo com o trabalho desenvolvido pelos matemáticos fazendo testes, formulando e validando conjeturas, comunicando resultados, entre outros aspetos. Segundo Huang (2001, citado por Botas, 2008):

> Ao ensinar Matemática, o professor deve promover e criar situações onde a criança possa falar e interagir de formas diferentes durante a aula, nomeadamente quando as crianças pensam, respondem, discutem, elaboram, escrevem, leem e escutam sobre assuntos matemáticos, obtêm benefícios duplos: comunicam para aprender matemática e aprendem a comunicar. (p. 12)

O *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* sustenta a relevância de despertar e desenvolver no aluno a competência matemática, quando sujeito a experiências ricas e diversificadas, onde haja momentos de reflexão (ME-DEB, 2001). Ao aluno deverão ser proporcionadas diversas experiências de aprendizagem, nomeadamente: a resolução de exercícios e de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos. O aluno é o agente principal da sua própria aprendizagem. A metodologia a usar pelo professor deverá contemplar situações, individuais ou em grupo, diversificadas e motivadoras, promovendo o desenvolvimento do espírito de pesquisa, a criatividade, o gosto de aprender, a autonomia e o sentido de cooperação (Palhares, 2004). A dinâmica de sala de aula depende de múltiplos fatores: da natureza das tarefas matemáticas propostas pelo professor; dos alunos e da forma como eles veem a escola e a matemática em particular; do contexto escolar e social; e também tem muito a ver com o próprio professor, com o seu conhecimento e competência profissional (Ponte *et al.*, 1997). Na sala de aula, o professor deve propor diversas tarefas: umas mais ligadas à memória e ao treino e outras mais direcionadas para processos mais complexos de pensamento, e neste pressuposto Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) ressalvam que:

> As tarefas podem ser analisadas segundo duas dimensões principais: uma relacionada com o nível de estruturação e outra com o desafio matemático que suscitam. A estruturação da tarefa está associada ao grau de explicitação das questões colocadas, o que conduz a tarefas fechadas e a tarefas abertas. O desafio prende-se com o grau de dificuldade que se relaciona com conhecer-se, ou não, o processo de resolução. (p. 15)

Cruzando estas dimensões os principais tipos de tarefas propostos na aula de matemática ficam distribuídos em quatro vertentes: exercícios (tarefa fechada e de desafio reduzido); problemas (tarefa fechada e de desafio elevado); explorações (tarefa aberta e de desafio reduzido); e investigações (tarefa aberta e de desafio elevado) (Boavida *et al.*, 2008). O professor deverá por isso ter o cuidado de preparar para os seus alunos tarefas matemáticas variadas, para além dos simples exercícios ou dos intrincados problemas abstratos e introduzir problemas de exploração (Ponte, 2007).

Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2010*)* apontam algumas situações que são de extrema importância para que uma aula de matemática tenha sucesso e que envolvem diretamente o professor e o seu papel no processo de ensino e aprendizagem: deve gostar da disciplina que trabalha; ter capacidade para planificar e selecionar as tarefas mais adequadas ao contexto e aos alunos; orientar os alunos num ambiente propício à resolução de problemas; e contemplar na sua planificação uma avaliação diária do trabalho, com o propósito de regular e melhorar a aprendizagem e o seu planeamento. Neste sentido, o aluno é um elemento importante do processo de ensino e aprendizagem e o professor deverá ajudá-lo criando as condições necessárias ao seu desenvolvimento, o que implica a utilização de recursos adequados, levando o aluno a envolver-se na resolução de problemas matemáticos não rotineiros e criativos. É ainda importante que o professor ajude o aluno a descobrir e compreender novos conceitos, a estabelecer conexões entre ideias e símbolos e se certifique que os alunos compreendem estas relações. O papel de mero transmissor de conhecimentos, que propunha exercícios rotineiros que implicavam treino de factos e procedimentos, desempenhado outrora pelo professor, num ensino perspetivado como tradicional (Zabala, 1998) tem vindo a mudar, esperando-se cada vez mais que assuma o papel de negociador e orientador de discussões fomentadas na sala de aula, propondo tarefas que promovam o desenvolvimento do raciocínio e da compreensão matemática, adotando um modelo de ensino dito construtivista (Simon, 1995). Estes modelos, tradicional e construtivista, têm implicações no que refere ao entendimento da natureza das tarefas e dos papéis assumidos pelo professor e pelos alunos (Tabela 1).

Tabela 1

Características do ensino tradicional e do ensino construtivista.

	Ensino Tradicional	Ensino Construtivista
Características das tarefas	Tarefas rotineiras e repetitivas: exercícios Resolução fechada: resposta única e apenas uma estratégia de resolução	Tarefas diversificadas: exercícios, problemas, investigações, projetos, … Permitem a utilização de diferentes estratégias de resolução
Papel do Professor	É diretivo. Expõe os conceitos. Resolve exercícios tipo para dar exemplos. Propõe exercícios semelhantes.	Interage com os alunos, orientando o processo de ensino e aprendizagem. A resolução das tarefas é deixada em aberto. Promove a comunicação e a negociação de significados na sala de aula.
Papel do Aluno	Ouve o professor e executa as tarefas propostas. Trabalha individualmente. Aprende passivamente.	Aprende ativamente, já que é um agente direto na construção do seu conhecimento. Questiona os pares e o professor. Trabalha em grupo.

A seleção das tarefas a propor aos alunos é determinante no desenvolvimento da atividade matemática. Quando estrutura estas propostas, o professor deverá considerar os aspetos e objetivos que pretende alcançar, a forma como irá organizar e orientar os alunos, o tipo de questões a colocar para promover o desenvolvimento de diversos níveis de competência e também o modo como poderá ajudar os alunos sem eliminar o desafio cognitivo (Conceição & Fernandes, 2009). Apesar de os documentos curriculares atuais defenderem um ensino de caráter construtivista, não é de desconsiderar momentos de exposição pelo professor e de sistematização da aprendizagem, no entanto a maior parte do trabalho é da responsabilidade dos alunos, incidindo na descoberta e construção do conhecimento. Deve-se considerar que o aluno não é uma *tábua rasa* e que transporta consigo um manancial de vivências e experiências da vida quotidiana e da gradual escolarização e por isso:

> O professor precisa de ter presente que a aprendizagem da Matemática não ocorre só na escola. Os alunos aprendem muita Matemática muito antes de chegarem a uma sala do 1º ciclo e continuam a aprender no seu meio, a par do que aprendem na escola. (Ponte & Serrazina, 2000, p. 105)

Reconhece-se, hoje em dia, que a natureza das interações entre os alunos e dos alunos com o professor é fundamental para a qualidade das aprendizagens. Para os alunos desenvolverem os conhecimentos matemáticos e as capacidades indicadas nas orientações curriculares, será necessário que o professor crie um ambiente dinâmico na sala de aula e que os alunos se habituem a que as suas respostas sejam sempre fundamentadas e que não sejam apresentadas sem justificação, mesmo que incorretas. Os alunos devem aprender praticando e os seus argumentos deverão ser convincentes, rigorosos, gerais e resistentes e estarem interligados por relações lógicas (ME-DGIDC, 2007). Com as situações problemáticas os alunos têm a oportunidade de ler, escrever e discutir ideias onde o uso da linguagem matemática se vai tornando gradualmente natural (Ponte & Serrazina, 2000). Van de Walle *et al.* (2010) focam que o aluno deve ser o interveniente mais importante na educação matemática e que o professor tem de promover o desenvolvimento da confiança e da compreensão enquanto *faz* matemática. O professor formaliza procedimentos para cada situação envolvendo o aluno na construção do seu próprio conhecimento. Estes autores sugerem ainda que ensinar matemática através da resolução de problemas exige que o professor fomente um ambiente matemático motivador e estimulante. Por outro lado Davis e Hersh (1995) reforçam que este ambiente incitador tipo *Lakatosiano* permite um desenvolvimento do raciocínio matemático e por outro lado a possibilidade de combinar representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas) e que:

> Em vez de uma matemática esqueletizada e fossilizada, ele [Lakatos] apresenta a matemática crescendo a partir de um problema e uma conjetura, com uma teoria adquirindo forma sob os nossos olhos, no calor do debate e da discordância, a dúvida cedendo lugar à certeza e em seguida a novas dúvidas. (p. 20)

Em síntese, a forma de pensar o ensino da Matemática tem vindo a alterar-se ao longo dos anos, tendo o professor deixado de ser o orador principal da aula e o aluno um recetor passivo.

Orientações curriculares para o ensino da matemática

A disciplina da Matemática é fundamental para o desenvolvimento da sociedade, tendo um forte caráter formativo e contribuindo para a atualização e formação ao longo da vida de qualquer indivíduo. O currículo em vigor envolve sempre um propósito educativo, um conjunto de conteúdos e um contexto e resulta da convergência de diversas práticas, exercidas por diferentes atores, em diferentes momentos, sendo por isso complexo, dinâmico e multifacetado. O currículo de Matemática deve ser coerente, organizando de forma integrada as principais ideias matemáticas. A gestão do currículo é um processo de construção que envolve a sua elaboração, implementação e avaliação.

Ponte e Serrazina (2000) referem que o currículo da matemática escolar tem sofrido muitas alterações importantes ao longo do tempo, tendo a sua evolução sido muito significativa. Nos anos 90 surgiram programas baseados nas principais orientações curriculares internacionais e que deram especial relevo à resolução de problemas, no entanto nas práticas dos professores continuou a evidenciar-se a resolução de exercícios. A publicação de novas orientações curriculares para a matemática escolar em 2001, com o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001), e em 2007, com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007), constituíram um marco fundamental na educação matemática. Passou-se a valorizar no processo de ensino e aprendizagem da

Matemática a resolução de problemas, como objetivo, como metodologia e como processo, e também o desenvolvimento de atitudes, valores, capacidades e conhecimentos. De um modo geral, no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) refere-se que:

> A educação matemática tem o objetivo de ajudar a desocultar a Matemática presente nas mais variadas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a matemática. (p. 58)

Este documento, para além de tentar promover o desenvolvimento de diversas competências, gerais e específicas, realça a necessidade de diversificação das experiências de aprendizagem dos alunos, bem como dos recursos utilizados. As finalidades para o ensino da Matemática encontram-se organizadas de acordo com as necessidades da sociedade e as suas exigências.

Atualmente vive-se um período de forte mudança curricular no contexto do ensino básico em Portugal, com a implementação do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007). Este documento constitui um reajustamento dos Programas de Matemática do 1.º, 2.º e 3.º ciclos em vigor desde a década de 90, tendo como forte referência o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001). O processo de generalização deste novo Programa de Matemática ocorreu no ano letivo 2009/2010, abrangendo assim a turma envolvida neste estudo. As grandes alterações evidenciadas neste documento verificam-se ao nível da estrutura e da linguagem nele utilizada, comum aos três ciclos do ensino básico. As Finalidades, os Objetivos Gerais e as Orientações Metodológicas definidas implicam igualmente a estruturação do ensino e da aprendizagem da Matemática de forma articulada entre todos os ciclos.

Numa primeira análise verifica-se que as finalidades do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) apontam para a necessidade de promover nos alunos a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e para o desenvolvimento da capacidade de integração e mobilização de conceitos em diversos contextos, bem como o desenvolvimento de atitudes positivas em relação à disciplina, aprendendo a apreciá-la e a desenvolver a atividade matemática de forma autónoma. As finalidades para o ensino e a aprendizagem da Matemática espelhadas neste documento são um reflexo dos diversos papéis que esta ciência desempenha na sociedade e no 1.º ciclo do ensino básico são consideradas de caráter prático, formativo, cultural e de cidadania. Estas finalidades são concretizadas através de objetivos gerais do ensino da Matemática, associados: a conhecimentos básicos; à importância da compreensão; a processos matemáticos - como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação, as representações e as conexões; a atitudes relativas à relação dos alunos com a Matemática e à forma como apreciam a disciplina (Ponte, 2009).

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) dá maior visibilidade a capacidades que, apesar de serem referidas nos documentos curriculares anteriores, não estavam associadas a uma abordagem transversal e articulada. As três capacidades transversais indicadas no Programa têm como objetivo dar destaque a processos matemáticos fundamentais: a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos (Ponte, 2009). Pretende-se, por um lado, que os alunos compreendam os dados, objetivos e condições de um problema, interiorizem e formulem estratégias de resolução adequadas e desenvolvam a capacidade de analisar criticamente os resultados obtidos. No que refere ao raciocínio matemático procura-se que os alunos estabeleçam relações entre ideias e conceitos matemáticos e sejam capazes de construir cadeias argumentativas. No âmbito da comunicação, são mencionadas as vertentes oral e escrita, esperando-se que os alunos organizem o seu discurso e os seus registos e que ouçam e interpretem a informação com que são confrontados.

Outro aspeto que se destaca neste Programa é a ênfase dada à abordagem da Álgebra desde o 1.º ciclo. Este tema não era considerado um tema autónomo nos programas anteriores (ME-DGEBS, 1990, 1991). Com esta mudança curricular, a Álgebra está presente desde o 1.º ciclo, integrada no tema Números e Operações e também na Geometria, e como tema autónomo no 2.º e 3.º ciclos, sendo dado especial enfoque ao desenvolvimento do pensamento algébrico, associado a duas vertentes, a generalização e a simbolização. O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) aponta como objetivos gerais de aprendizagem, em relação à Álgebra, que os alunos: sejam capazes de explorar e investigar regularidades; compreendam a noção de proporcionalidade direta e usem o raciocínio proporcional; sejam capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas. Este estudo visa a resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões, com alunos do 1.º ciclo, promovendo o desenvolvimento do pensamento algébrico, adequando-se assim às indicações do Programa de Matemática do Ensino Básico que sublinha a importância da compreensão de padrões, da representação e análise de situações matemáticas usando símbolos algébricos para o desenvolvimento do pensamento algébrico (ME-DGIDC, 2007).

As *Metas de Aprendizagem no 1.º ciclo do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2010), para a disciplina de Matemática, baseiam-se no Programa em vigor já que é o documento orientador para os professores que norteia toda a organização e planificação do seu ensino, constituindo uma referência para a avaliação. As Metas de Aprendizagem estão organizadas a partir dos quatro temas matemáticos do Programa: Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados. Para o 1.º ciclo foram traçadas duas etapas para os anos de escolaridade 1.º-2.º anos e 3.º-4.º anos. As capacidades transversais são também destacadas como um domínio onde se referencia a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

A evolução da matemática e os problemas apresentados pela sociedade em geral foram contribuindo para que o currículo de Matemática fosse sofrendo estas alterações, apontando-se atualmente para um ensino centrado na resolução de problemas, orientado por experiências de aprendizagem ricas e diversificadas que proporcionem aos alunos a integração de conhecimentos e de recursos, bem como momentos significativos de discussão e reflexão (Barbosa, 2010).

A importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática

As mais recentes mudanças curriculares apontam para o desenvolvimento nos alunos da capacidade para usar de forma competente a matemática no seu quotidiano e, em particular, a capacidade de resolver problemas, partilhando as suas descobertas, discutindo ideias e conceitos matemáticos e fundamentando os seus raciocínios. A resolução de problemas é geralmente salientada como uma componente muito importante na aprendizagem da matemática e ao mesmo tempo como uma forma de envolver os alunos na atividade matemática e naturalmente na construção do seu conhecimento (Barbosa, 2010).

A ideia da resolução de problemas na sala de aula surgiu primeiramente com Polya que apontou a resolução de problemas como um grande objetivo da matemática escolar, destacando que se trata de uma capacidade que, como qualquer outra, pode ser desenvolvida através de imitação e prática, já que se aprende a resolver problemas resolvendo problemas. Neste sentido, Polya apresentou uma heurística de resolução de problemas específica para a Matemática, procurando contribuir para a organização do pensamento e para a compreensão das operações mentais implicadas, e propôs quatro etapas na resolução de qualquer problema: a compreensão do problema, a definição de um plano, a execução do plano estruturado e a verificação da solução (Ponte & Serrazina, 2000). Para uma boa interiorização destes procedimentos será necessário compreender e usar várias estratégias, propriedades e relações matemáticas, no entanto a experiência tem um papel muito importante, ou seja, os alunos devem ter a possibilidade de resolver muitos problemas.

As ideias de Polya representam uma inovação relativamente às perspetivas sobre a resolução de problemas existentes até então e mantêm-se atuais, tendo mesmo servido de base ao trabalho de muitos educadores e investigadores matemáticos. Na década de 80 surgiram diversos documentos curriculares como *Agenda para a Ação* (NCTM, 1980) e *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988) que destacaram a resolução de problemas como o centro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Destacam-se ainda investigadores como Kantowski, Schoenfeld e Fernandes que retomaram o modelo proposto por Polya, perspetivando um ensino através da resolução de problemas e um ensino de heurísticas, desvalorizando a necessidade do domínio de algoritmos e procedimentos rotineiros para só mais tarde resolver problemas. Estas ideias tiveram uma forte influência nos programas de Matemática da década de 90, bem como nas orientações curriculares mais atuais, onde se valoriza o trabalho não rotineiro, associado à resolução de problemas.

Perante a questão *O que é um problema?* Poder-se-iam apresentar muitas definições, de acordo com as perspetivas de vários autores e documentos. Schoenfeld

(1992) inclusivamente refere que se pedirem a sete matemáticos para explicarem o que é um problema é possível que se obtenham nove definições diferentes. Para Polya (1980, referido em Palhares, 2004) quando se tem um problema, significa procurar uma ação adequada para atingir um objetivo claramente definido mas não imediatamente alcançável. Este autor ainda refere que se não houver dificuldade, não há problema. Já Kantowski (1974, referido em Vale & Pimentel, 2004) assegura que um indivíduo está perante um problema quando se depara com uma questão a que não consegue dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver, utilizando os saberes disponíveis. De acordo com o que é sugerido no *Currículo Nacional do Ensino Básico*, os problemas:

> são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução e não exercícios, geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que apenas se aplica um algoritmo que conduz diretamente à solução. (ME-DEB, 2001, p. 68)

Para além de destacarem o processo de chegada à solução, Boavida *et al.* (2008) sublinham ainda a distinção entre exercício e problema, facto que poderá variar com os conhecimentos dos alunos:

> tem-se um problema quando se está perante uma situação que não pode resolver-se utilizando processos conhecidos e estandardizados; quando é necessário encontrar um caminho para chegar à solução e esta procura envolve a utilização do que se designa por estratégias. Caso contrário, isto é, se a situação pode ser resolvida utilizando processos *para nós* conhecidos, repetitivos ou mecanizados, que conduzem diretamente à solução, estamos perante um exercício. Deste modo, ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe. (p.15)

Dada a relevância curricular da resolução de problemas e a sobrevalorização por parte de muitos professores da resolução de exercícios, é importante fazer a distinção entre estes dois tipos de tarefas. Para Ponte e Serrazina (2000), uma questão pode ser um problema para um aluno se ele não conseguir encontrar a solução usando procedimentos rotineiros. Em contrapartida, quando o aluno tem uma forma rápida de encontrar a solução, sabendo à partida qual o processo a aplicar, a tarefa não será um problema, mas sim um exercício. Considerando estas características, acrescenta-se que uma questão poderá constituir um exercício ou um problema para um aluno, de acordo com os seus conhecimentos. Segundo Fernandes (2007):

> Os alunos devem compreender que a resolução de problemas não é uma tarefa de aplicação de algoritmos ou fórmulas mas que ela deve assentar num plano que envolva os alunos num processo de elevado nível de complexidade cognitiva onde estejam presentes os processos de representar, relacionar e comunicar. Assim, os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios, uma nova aventura para os alunos nas quais, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução. (pp. 15-16)

Boavida *et al.* (2008) salientam que, para que advenha uma boa aprendizagem de um ensino centrado na resolução de problemas, é fundamental que os problemas tenham as seguintes características: a) sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível; b) sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; c) possam ter mais do que um processo de resolução; d) possam integrar vários temas. Estes autores acautelam ainda que, quando se fala em resolução de problemas no ensino da Matemática, pensa-se em problemas que têm um enunciado definido e estruturado, uma e apenas uma solução e um processo de resolução pré-determinado que conduz à resposta certa ou errada. Contudo, destacam que um problema pode ser colocado num sentido mais aberto, suscitando nos alunos a procura de diferentes métodos e caminhos e não apenas de uma resposta.

As situações problemáticas podem servir diferentes propósitos e implicar diversos procedimentos, neste sentido, para que o processo de ensino – aprendizagem decorra num ambiente propício e favorável ao aluno e, numa tentativa de clarificar e adequar os problemas aos objetivos de aprendizagem delineados Charles e Lester (1986, referidos por Vale & Pimentel, 2004) utilizaram a seguinte categorização, que se adequa ao 1.º ciclo: (1) *problemas de um passo*, solucionados através de uma das quatro operações básicas da aritmética; (2) *problemas de dois ou mais passos*, solucionados com aplicação direta de duas ou mais das quatro operações básicas da aritmética; (3) *problemas de processo*, solucionados através de uma ou várias estratégias de resolução não rotineiras; (4) *problemas de aplicação*, são os que requerem a recolha de dados reais e tomadas de decisão sobre os mesmos. Neles são aplicadas uma ou mais operações e uma ou várias estratégias de resolução; e (5) *problemas tipo puzzle*, que necessitam de um *flash*, normalmente visual, para obter a solução.

Quando se coloca os alunos perante situações problemáticas, em particular alunos do 1.º ciclo, para melhor os orientar na sua exploração, Vale e Pimentel (2004) referem que devem ser utilizadas diversas estratégias tais como: descobrir um padrão – procurar uma regra ou uma lei de formação; fazer tentativas/fazer conjeturas; trabalhar do fim para o início; utilizar uma dedução lógica/fazer eliminação; transformar num problema mais simples; fazer uma simulação/dramatização/experimentação; usar desenhos, diagramas, gráficos ou esquemas; utilizar uma lista organizada ou uma tabela. Van de Walle *et al.* (2010) referem ainda que o recurso a materiais manipuláveis, estruturados ou não estruturados, é um meio facilitador da aprendizagem e da construção do conhecimento, contribuindo também para a compreensão das ideias e relações presentes num dado problema.

A resolução de problemas em matemática tem um peso curricular expressivo, podendo proporcionar aprendizagens significativas. O *Currículo Nacional do Ensino Básico* destaca a importância do envolvimento dos alunos na construção e aquisição de ideias e conceitos matemáticos, através da resolução de problemas, referindo que:

> A resolução de problemas coloca o aluno em atitude ativa de aprendizagem, quer dando-lhe a possibilidade de construir noções como resposta às interrogações levantadas (exploração e descoberta de novos conceitos) quer incitando-o a utilizar as aquisições feitas e a testar a sua eficácia. (ME-DEB, 2001, p. 170)

Por sua vez, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) salienta três capacidades consideradas transversais a toda a aprendizagem da matemática, figurando entre elas a resolução de problemas. Quando se analisa este documento constata-se o papel central e fundamental que é atribuído à resolução de problemas, destacada como uma capacidade fundamental, na medida em que poderá potenciar nos alunos a aquisição de competências de ordem superior, ao lidar com problemas matemáticos, com problemas em contexto da vida real, levando-os inclusivamente a abordar outros domínios e à aprendizagem de diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Por outro lado, pensar em estratégias para a resolução de problemas ajuda a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas e também na consolidação de capacidades já aprendidas, criando um meio propício ao desenvolvimento de novas ideias matemáticas.

É importante sublinhar que as perspetivas sobre um ensino da matemática centrado na resolução de problemas são diversificadas, destacando-se o ensino *para*, *sobre* e *através* da resolução de problemas (e.g. NCTM, 2007; Schoenfeld, 1992). No ensino *para* a resolução de problemas os alunos aprendem conteúdos e procedimentos matemáticos para posteriormente aplicarem na resolução de problemas que envolvem essas ferramentas. Isto implica que o professor escolha cuidadosamente as tarefas a propor para evitar a mecanização de processos. No ensino *sobre* a resolução de problemas o professor deve orientar a atividade dos alunos, deixando-os explorar possíveis caminhos, discutindo estratégias e resultados. Esta perspetiva teve grande influência das ideias de Polya. O ensino *através* da resolução de problemas tem características diferentes já que, neste caso, a resolução de problemas constitui uma forma de questionamento mais do que uma tarefa, encara-se a resolução de problemas como um meio para a aprendizagem, o contexto através do qual os alunos constroem conhecimento (Barbosa, 2010). Considerando as atuais orientações curriculares esta última perspetiva é aquela que mais se adequa ao tipo de trabalho previsto para os alunos.

O papel do professor no desenvolvimento de competências próprias da resolução de problemas é fulcral. Esta ideia vem também salientada no modelo proposto por Van de Walle *et al.* (2010) que destaca três fases para uma aula centrada na resolução de problemas. Esta abordagem descreve a postura do professor ao longo das diferentes fases da resolução de um problema, *antes* da tarefa, *durante* a resolução e *depois* da resolução, evidenciando ideias compatíveis com o que se pretende num ensino *através* da resolução de problemas. Na primeira fase, *antes*, o professor deve procurar ativar os conhecimentos prévios necessários, certificando-se que o problema é entendido. Na segunda fase, *durante* a resolução do problema, deixa-se os alunos trabalhar sem interferir, o professor deve ouvir atentamente o que os alunos dizem, formular sugestões e questões apropriadas, se necessário, ou extensões que sejam úteis para a resolução. E na terceira, *depois*, promove-se a discussão na aula envolvendo ao alunos em grande grupo, o professor deve ouvir as ideias, sem avaliar, e por fim sintetizar as principais ideias e se possível identificar problemas futuros.

Em síntese, na resolução de problemas, o aluno deverá utilizar conhecimentos e dominar técnicas que se tornem significativas e o professor, como moderador, deve estimular a partilha de diversas estratégias na procura de caminhos diferentes, para atingir o resultado final (ME-DEB, 2001). O professor deve ainda proporcionar aos seus alunos ambientes de aprendizagens ricos, que sejam desafiantes, conduzindo à descoberta, envolvendo atitudes que estimulem a experimentação e a comunicação (Boavida *et al.*, 2008). Assim, a resolução de problemas possibilita aos alunos, a descoberta e construção de conhecimento matemático, permitindo a mobilização de saberes e aprendizagens, desenvolvendo capacidades e atitudes positivas, quer em relação à Matemática quer à vida quotidiana. Destaca-se ainda que o professor também deve ser um bom resolvedor de problemas para que consiga transmitir ao aluno essa curiosidade investigativa. A resolução de problemas constitui uma oportunidade única para que os alunos verifiquem a importância da matemática na vida quotidiana e desenvolvam um maior interesse por esta área do conhecimento (Barbosa, 2010).

Os Padrões na matemática

A visão da Matemática como ciência dos padrões tem suscitado a realização de diversos estudos que procuram compreender a importância dos padrões na aprendizagem. O trabalho inerente à exploração de padrões, através da análise de propriedades e relações de forma intuitiva, da reflexão sobre casos particulares, da formulação de conjeturas e consequente validação de resultados, contribui para uma aprendizagem mais significativa.

Esta secção começa com a discussão das perspetivas de vários autores acerca do significado do conceito de padrão em Matemática, já que se trata de um termo tão abrangente. Nas secções seguintes é feita uma análise do papel dos padrões em termos curriculares, refletindo posteriormente na sua relação com a resolução de problemas e com a generalização.

O conceito de padrão

Na literatura sobre padrões não existe uma definição formal consensual sobre este conceito. No entanto, vários matemáticos apresentam propostas de definição que partilham algumas ideias semelhantes.

Segundo Devlin (2002) a Matemática é a ciência dos padrões, refletindo assim a ideia de transversalidade dos padrões, o que sugere que, mais do que um tópico da Matemática, constituem uma qualidade associada a esta ciência. É uma forma de admirar e compreender o mundo em que vivemos, tanto a nível físico, como biológico e até mesmo sociológico, bem como o mundo escondido das nossas mentes, tornando visível o que é invisível ao olhar.

Uma das noções mais frequentemente associadas ao estudo de padrões é a sua associação aos frisos ou padrões de papel de parede, salientando a ideia de repetição (Sawyer, 1955, referido em Barbosa, 2010). Para Davis e Hersh (1995) o propósito da matemática é de facto descobrir a regularidade onde parece vingar o caos e tirar de lá a estrutura e a invariância da desordem e da confusão. Nesta perspetiva, Orton (1999) refere que o conceito de padrão está frequentemente relacionado com a procura da ordem, sendo possível identificar regularidades nas formas tanto como nos números. Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca e Pimentel (2011) referem que o conceito de padrão vai muito para além daquilo que imaginamos quando ouvimos este termo. Usualmente, quando se pensa em padrão, é associado ao contexto dos padrões visuais ou dos frisos, como os que aparecem nos papéis de parede e nos tecidos. No entanto, como se pode constatar com algumas das definições apresentadas, esta é uma perspetiva bastante redutora do significado de padrão. Devlin (2002) apresenta uma abordagem muito mais abrangente ao afirmar que:

> O que o matemático faz é examinar 'padrões' abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à sua volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. Com o objetivo de transmitir o conceito moderno de matemática, este livro aborda seis temas genéricos, abrangendo padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e de mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia). (p. 9)

Este autor destaca a presença de padrões de diferentes tipos no universo que nos rodeia. É possível encontrá-los em diversos elementos matemáticos, na natureza, na arte, na música, nos movimentos, entre outros. Barbosa (2010) salienta que a procura de padrões ajuda a compreender e a explicar os fenómenos e as possíveis relações entre eles, processo este intrínseco ao da atividade da inteligência do Homem. Desta maneira, o cientista tenta perceber o mundo que o rodeia e o matemático procura entender a estrutura, os processos, as regras, isto é, os padrões.

Constata-se assim que a natureza do termo *padrão* é multifacetada e complexa, facto que fundamenta a dificuldade em abarcar todas as perspetivas e contextos em que possa ser reconhecido e, por essa razão, o conceito de padrão tem-se revelado bastante fluido, com definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida (Vale *et al.*, 2011). Segundo Barbosa (2010) há efetivamente uma grande diversidade de definições e de termos associados ao tema dos padrões e, com base na literatura, apresentam-se, na Tabela 2, alguns dos termos que se consideram mais relevantes para este estudo e a respetiva definição (adaptado de Barbosa, 2010).

Tabela 2

Definição de termos associados ao conceito de padrão.

Termo	Definição	Referências
Sequência	Conjunto de elementos matemáticos ordenados de acordo com uma regra.	Frobisher *et al.*, 1999
Padrão numérico	Sequência na qual os elementos matemáticos são números.	Frobisher *et al.*, 1999
Padrão visual	Sequência na qual os elementos são objetos, figuras ou símbolos.	Frobisher *et al.*, 1999 Vale *et al.*, 2011
Padrão de simetria	Um objeto ou configuração que possui simetria é constituído por partes equivalentes que podem ser trocadas sem alterar a aparência global.	Frobisher *et al.*, 2007
Padrão de repetição	Padrão com um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente.	Vale *et al.*, 2011
Padrão de crescimento	Cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior.	Vale *et al.*, 2011

Friso	Padrão de repetição que envolve formas que podem ser colocadas indefinidamente ao longo de uma superfície.	Frobisher *et al.*, 2007

De facto o termo *padrão* pode ser usado com diferentes significados e em diferentes contextos constituindo uma poderosa ferramenta para *fazer* matemática. Há alguns elementos que são fundamentais quando se faz referência a padrões, como as ideias de mudança, repetição e prolongamento. Quando se fala em padrões estes podem ser descritos quanto à forma como podem ser repetidos ou prolongados, independentemente dos objetos que lhe estão associados (Barbosa, 2010). Apesar da grande diversidade de elementos e contextos associados à procura de padrões, neste estudo considera-se que um padrão é um qualquer arranjo de números ou formas, onde são visíveis regularidades suscetíveis de serem continuadas. Dependendo das oportunidades de exploração e descoberta de padrões propostas, os alunos terão de procurar a regra de formação, formular uma lei geral e deste modo chegar a uma generalização (Alvarenga, 2006).

Os padrões no currículo de Matemática

Nas mais recentes orientações curriculares, nacionais e internacionais, é notória a relevância atribuída aos padrões, que atravessam os vários temas do currículo de Matemática. O papel dos padrões é fundamental no ensino e na aprendizagem da Matemática, contribuindo não só para o desenvolvimento de atitudes positivas nos alunos, mas também para a construção de um conhecimento matemático mais profundo e duradouro. Orton e Orton (1999) defendem esta perspetiva afirmando que os padrões contribuem, entre outros aspetos, para: a construção de uma imagem mais positiva da Matemática, atraindo e motivando os alunos porque apelam à sua criatividade; o estabelecimento de conexões matemáticas; o desenvolvimento da capacidade de classificar e ordenar informação; uma melhor compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive; o desenvolvimento de diferentes capacidades e competências matemáticas. Através dos padrões é possível perceber a forma como os alunos interpretam as diferentes relações e estruturas em estudo, através da identificação de regularidades em diferentes contextos.

Atualmente verifica-se a relevância atribuída aos padrões nas propostas curriculares de vários países. A nível internacional, no documento *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1989) é proposta para os níveis de escolaridade K-4 a norma *Padrões e Relações* que defende que a exploração de padrões potencia o desenvolvimento do poder matemático dos alunos, possibilitando também que apreciem a beleza da Matemática. Essencialmente destaca a importância de identificar, descrever e generalizar padrões. Num documento mais recente da mesma organização, *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), é salientada uma norma comum a todos os níveis de escolaridade, a Álgebra, na qual são referidos quatro grandes objetivos que realçam o trabalho com padrões e a sua ligação à álgebra: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e analisar a mudança em vários contextos. Neste âmbito, os alunos devem ser capazes de estudar padrões numéricos e geométricos e representá-los matematicamente através de palavras ou símbolos. A análise da estrutura do padrão é também referida, para que os alunos compreendam o significado de variação e mudança, contribuindo para o desenvolvimento de generalizações. Mais recentemente, no documento *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics* (NCTM, 2006) são igualmente encontradas referências claras ao trabalho com padrões, destacando-se a diversidade da estrutura e dos contextos (e.g. repetição, crescimento; numéricos, geométricos, lineares, não lineares) e a descoberta de propriedades e relações matemáticas, sendo que este tipo de trabalho deverá ter início desde o ensino pré-escolar.

Em Portugal há vários documentos curriculares que apresentam referências claras ao estudo de padrões, desde os primeiros anos.

As *Orientações Curriculares para o Ensino Pré-escolar* (ME-DEB, 1997) mencionam a exploração de padrões salientando uma estreita ligação ao desenvolvimento do raciocínio lógico, propondo experiências com padrões repetitivos e não repetitivos, bem como padrões de natureza rítmica. Segundo Palhares e Mamede (2002) as características que estes padrões apresentam podem ser muito variadas, contemplando por exemplo cor, som, posição, forma e outras, o que permite o aumento das oportunidades de exploração, ao combinar a estrutura do padrão com o tipo de elementos ou objetos que envolve. Para Threlfall (1999) existem duas razões para introduzir padrões de repetição no final do ensino pré-escolar, a primeira relaciona-se com o facto de estes padrões funcionarem como uma base familiar e concreta para explorar outros conteúdos e a segunda razão tem a ver com o desenvolvimento do pensamento algébrico, já que o trabalho com padrões de repetição servirá, no futuro, de suporte para a aprendizagem da Álgebra ou para a introdução de símbolos.

O *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) destaca diversas especificidades do ensino da Matemática, entre elas a importância do desenvolvimento de competências como a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, assim como pensar matematicamente, investigando situações problemáticas, procurando regularidades, fazendo e testando conjeturas e formulando generalizações. Todos estes aspetos encontram-se em vários temas deste documento, nomeadamente *Números e Cálculo*, *Geometria* e *Álgebra e Funções*, vincando bem a noção de transversalidade dos padrões na Matemática e nos diferentes níveis de ensino da educação básica. No campo dos *Números e Cálculo* considera-se a exploração de padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o desenvolvimento do prazer em explorar relações numéricas. No domínio da *Geometria* foca a importância de explorar padrões geométricos e o desenvolvimento de propriedades e relações geométricas. Finalmente, no domínio *Álgebra e Funções* é importante o estudo dos padrões evidenciado pela predisposição para procurar padrões e regularidades e formular generalizações em diferentes situações principalmente em contextos numéricos.

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) salienta que, quando os alunos ingressam na escolaridade obrigatória trazem já alguns conhecimentos informais no âmbito da Matemática, provenientes das suas vivências do quotidiano e das suas experiências no ensino pré-escolar, que devem ser aprofundados e formalizados ao longo do ensino básico, os padrões não são exceção. Há uma estreita ligação entre a exploração de padrões e a Álgebra e, apesar de este não ser um tema matemático destacado pelo Programa para o 1.º ciclo, há muitos indicadores do trabalho com padrões noutros temas matemáticos presentes neste documento. De uma forma global, o Programa de Matemática foca o propósito de os alunos saberem “procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas” e que podem “observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética” (ME-DGIDC, 2007, p. 14). No tema *Números e Operações* são referidos termos como padrões, regularidades, sequências, regra, lei de formação e sucessões. Alguns exemplos assentam na investigação de regularidades numéricas em sequências e tabelas de números e a elaboração de sequências segundo uma lei de formação. No tema *Geometria e Medida* aparecem referências a padrão, sequência, frisos, pavimentações e configurações. Por fim, no tema *Organização e tratamento de dados* sugere-se a procura de regularidades na realização de várias experiências. Este documento tem assim várias referências aos padrões, de forma transversal, entre temas e entre ciclos, contemplando objetivos não só no campo da álgebra mas também nos restantes temas contemplados.

Apesar da ideia de transversalidade é inevitável a associação dos padrões à Álgebra e ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Vários autores defendem que é necessário introduzir precocemente o pensamento algébrico através do estudo de padrões (Warren & Cooper, 2006). As orientações formuladas pelo NCTM (2007) apontam para o trabalho de vários aspetos com o propósito de desenvolver o pensamento algébrico, estando mais uma vez em destaque a relação com os padrões: 1) compreender padrões, relações e funções; 2) representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; 3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e 4) analisar a mudança em vários contextos. Segundo Ponte (2006) no pensamento algébrico atende-se não só aos objetos mas também às relações entre eles, recorrendo a diferentes representações e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstrato, devendo para isso privilegiar-se o estudo de relações e regularidades. Blanton e Kaput (2005) defendem a integração da álgebra nos níveis mais elementares referindo que promove o desenvolvimento conceptual de uma matemática mais complexa no pensamento das crianças, permitindo que observem e articulem generalizações e aprendam a expressá-las de forma simbólica. Kaput (2008, referido por Canavarro, 2009) indica dois aspetos essenciais do pensamento algébrico: a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais; e o raciocínio e ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados. Smith (2008, referido por Canavarro, 2009) refere que o primeiro aspeto está relacionado com o pensamento representacional e o segundo com o pensamento simbólico. Blanton e Kaput (2005) sugerem transformar o pensamento algébrico numa orientação transversal de currículo o que iria: (1) promover hábitos de pensamento e de representação baseados na procura da generalização, sempre que possível; (2) implicar um tratamento dos números e das operações num contexto algébrico – prestando atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objetos formais para o pensamento algébrico; (3) promover o estudo de padrões e regularidades, logo a partir do 1.º ciclo. Os mesmos autores referem que, ao apelarem ao pensamento algébrico, os alunos cimentam ideias matemáticas, através da exploração de várias tarefas que envolvem o estabelecimento de generalizações por meio de cadeias argumentativas, sendo a álgebra uma ferramenta para expressar generalizações, sendo estas expressas por palavras ou simbologias matemáticas de acordo com a sua maturidade.

O grau de abstração que se exige do aluno julga-se ser um elemento determinante da dificuldade conceptual e do interesse educacional pelos padrões. Orton e Orton (1999) salientam ainda que muitos alunos manifestam ter grande dificuldade em trabalhar com letras em vez de números. A transição dos números para um maior grau de abstração parece ser um dos grandes desafios a nível da educação matemática, ou seja, a partir dos números dar sentido às letras. O trabalho com padrões pode ser um meio facilitador para abordar a temática da justificação em matemática e para ajudar a desenvolver nos alunos competências relativas ao pensamento algébrico. Para Canavarro (2009) o "reconhecimento daquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização" (p. 87). Vale (2009) salienta ainda que:

> A par do desenvolvimento do sentido do número, os alunos necessitam de ter experiências concretas através das quais possam constituir um significado para o pensamento algébrico. Experiências em aritmética são críticas para preparar o estudo da

> álgebra. No passado (e ainda no presente) o ensino da álgebra era abstrato e envolvia apenas manipulação de variáveis e números. (p. 1)

Quando são explorados os diferentes aspetos da Álgebra, estes repercutem-se transversalmente em todas as áreas, ajudando no desenvolvimento do conhecimento matemático, permitindo uma experiência matemática expressiva.

Segundo Borralho e Barbosa (2009) os padrões são a alma da Matemática e a interação destes com a Álgebra constitui um domínio de ordem superior que dá sustentabilidade ao desenvolvimento do pensamento algébrico e ao estabelecimento de conexões matemáticas. De facto pode-se afirmar que todo este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajudam a desenvolver a capacidade de abstração e contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico (ME-DGIDC, 2007). Tendo por base os documentos curriculares de referência, o uso de padrões constitui uma ferramenta pedagógica a que os professores podem recorrer para proporcionar aos alunos a desejável compreensão de vários tópicos matemáticos, como a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quando se estimulam os alunos a procurar/explorar padrões e a exprimi-los matematicamente, começam a entender como se aplicam ao mundo em que vivem e de que forma poderão observá-los à sua volta.

A resolução de problemas e a descoberta de padrões

A procura de padrões é uma estratégia fundamental na resolução de problemas que permite que os alunos vivenciem e experimentem a verdadeira atividade matemática e desenvolvam o conhecimento de novos conceitos, possibilitando que os professores proponham contextos interessantes para desenvolver o poder matemático dos alunos.

O currículo da matemática escolar deve levar os alunos a procurar e analisar os padrões que podem encontrar no mundo à sua volta e sobretudo descrevê-los matematicamente. Trabalhar com padrões torna os alunos mais capazes de resolver problemas com confiança e de relacionar novas situações com as suas experiências anteriores. O aluno vai adquirindo segurança no desenvolvimento do seu trabalho, adotando estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões de forma autónoma, responsável e criativa.

Efetivamente ao analisarmos as recomendações curriculares deparamo-nos com várias referências à importância dos padrões e ao facto de desafiarem os alunos a recorrer a capacidades de pensamento de ordem superior, das quais faz parte a resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2005). Em vários problemas de matemática os alunos são impulsionados a procurar padrões, aspetos que se repetem, que se mantêm invariantes. Assim, no âmbito da resolução de problemas, a pesquisa de regularidades emerge como uma estratégia a desenvolver e como consequência, os alunos começam a entender *a procura de padrões* também como uma poderosa ferramenta pedagógica de resolução de problemas que contribui para o raciocínio e para o estabelecimento de conexões matemáticas (Alvarenga, 2006).

Salienta-se ainda a exploração de padrões como uma das mais poderosas estratégias, destacadas nos métodos heurísticos de Polya, na resolução de problemas. Trata-se de uma abordagem intuitiva que envolve os alunos num contexto investigativo. O trabalho com padrões é para os alunos interessante e desafiador, pois na descoberta da ordem de um elemento da relação funcional que antes estava escondida, estará sempre presente a sensação de entusiasmo.

Pode-se dizer que *fazer* matemática envolve a procura de padrões, fomentando a mobilização de processos não rotineiros, como explorar, conjeturar, provar, modelar, simbolizar e comunicar (NCTM, 2007). Aqui entra o papel do professor que ao selecionar tarefas desafiantes, como situações problemáticas que envolvam a exploração de padrões, contribui para que os alunos estabeleçam conjeturas que precisam de ser validadas, desenvolvendo a argumentação. A análise dos processos de pensamento envolvidos na resolução de problemas abertos ou investigações, permite verificar que a procura de regularidades e a descoberta de padrões é um dos processos mais utilizados. À medida que os alunos trabalham e se envolvem em tarefas problemáticas com padrões, estas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre as diversas áreas da Matemática (Vale *et al.*, 2011) dando significado à

Matemática envolvendo-os em momentos de verdadeira atividade matemática, à semelhança dos investigadores matemáticos.

Padrões e generalização

As tarefas que envolvem a exploração de padrões podem potenciar o desenvolvimento de várias capacidades como descobrir relações, formular conjeturas, encontrar conexões e também generalizar. Alvarenga (2006) foca alguns aspetos do trabalho com padrões que implicam a mobilização destas capacidades: descrever um padrão; analisar um conjunto de números de modo a descobrir regularidades; completar um padrão; prolongar um padrão até ao termo seguinte ou até termos próximos; determinar o valor de termos particulares de um padrão; continuar um padrão para resolver um problema; inventar padrões seguindo uma dada estrutura; usar a lei de formação de um padrão para descrever um caso específico; articular expressões escritas ou simbólicas, representativas de um padrão; explicar a estrutura que originou um determinado padrão; usar um padrão para expressar relações. Vale *et al.* (2011) sugerem ainda que se proporcionem oportunidades de aprendizagem que envolvam: o recurso a diversas representações de um padrão, concretas ou pictóricas; a verificação da existência de regularidades; a descrição de um padrão oralmente ou por escrito; continuar um padrão; prever os termos que faltam numa sequência; fazer generalizações; e construir sequências. Generalizar, quer para termos próximos quer identificando uma regra, é portanto uma vertente fundamental quando se trata de estudar padrões. Na matemática escolar são constantemente referidos os padrões de repetição e de crescimento onde as ideias de repetição, mudança e extensão são o elemento principal (Smith, 2003, referido por Barbosa, 2010). O que daqui se pode inferir é que qualquer tipo de padrão é generalizável e suscetível de uma extensão.

Para Warren (2000) generalizar é um elemento-chave na Matemática e um objetivo orientador da aula de matemática, especialmente no desenvolvimento do pensamento algébrico. Pimentel (2010) reforça esta ideia e destaca a generalização como trave-mestra do pensamento algébrico. Torna-se assim necessário procurar compreender este processo cognitivo e aquilo que envolve. Segundo Radford (2006) a generalização expressa-se encontrando aspetos comuns em alguns termos dados como particulares, formando um conceito geral e descobrindo assim uma regra que se aplique a todos os termos da sequência. Na mesma perspetiva, Kaput (1999) refere que generalizar implica continuar a linha de raciocínio para além do(s) caso(s) particular(es), identificando a regularidade entre esses casos, ou transitar para um nível de raciocínio em que o foco deixa de estar nos casos e passa a centrar-se nos padrões, na estrutura, nas relações. Generalizar é uma capacidade inerente ao pensamento matemático, sendo um meio para a construção de novo conhecimento. Mason (1996, citado por Barbosa, 2010) destaca o seu valor no âmbito do processo de ensino e aprendizagem ao afirmar que "a generalização é o coração da Matemática. Se os professores não têm consciência da sua presença e não têm por hábito propor que os alunos generalizem e expressem as suas generalizações, então não está a ocorrer pensamento matemático" (p. 59).

O processo de generalizar é mais do que apenas notar o geral no particular. Contribui para o desenvolvimento pleno do raciocínio matemático, já que implica processos como averiguar casos específicos, conjeturar, argumentar. Entre outros estes processos estão inevitavelmente presentes nas várias fases que constituem o percurso para a generalização: (1) perceber um traço comum em alguns termos particulares; (2) formar um conceito geral; (3) generalizar a regularidade identificada para os termos da sequência; (4) determinar uma regra que seja aplicável a todos os termos.

O tema generalização tem sido investigado em diversas vertentes destacando-se entre elas a identificação de diferentes tipos ou níveis de generalização que, pela sua natureza, poderão influenciar o desempenho dos alunos. Stacey (1989, referida por Barbosa, 2010) faz a distinção entre generalização próxima e distante usando como critérios a ordem de grandeza do termo da sequência pedido e o tipo de estratégias envolvidas na sua descoberta. Quando se consegue determinar o termo solicitado de forma rápida, através de desenhos, como suporte facilitador do raciocínio, ou de um método recursivo, diz-se que a generalização é próxima. Quando tal não acontece e as abordagens previamente referidas dificilmente permitem a descoberta de um determinado termo de sequência, implicando a descoberta de uma regra geral, diz-se que a generalização é distante. O nível de generalização poderá assim influenciar o tipo de estratégias a utilizar pelos alunos que terão de avaliar a sua adequação em cada caso, sendo claro que os alunos evidenciam mais dificuldades na generalização distante do que na generalização próxima (Barbosa, 2010).

O processo de generalização não ocorre de imediato, vai sendo entendido gradualmente, levando a que os alunos iniciem com tentativas para entender os factos em vista para fazer analogias e por fim testar casos particulares. É comum os alunos evidenciarem dificuldades em generalizar padrões e poucos vão além do estabelecimento de conjeturas a partir de um número reduzido de casos e de testes de generalização no que se refere a exemplos particulares. Segundo Orton (1999) quando os alunos associam a sua generalização e a representação algébrica correspondente a dados fornecidos visualmente, terão uma maior compreensão das relações e uma maior apreciação do poder da álgebra. Efetivamente, esta ideia reforça mais uma vez a influência das experiências dos alunos no seu desempenho, sendo por isso fundamental que os professores proponham tarefas que fomentem não só representações numéricas mas também representações figurativas, quer concretas quer pictóricas (Becker & Rivera, 2005).

Segundo Threfall (1999) os padrões podem ser trabalhados com os alunos já no início da escolaridade obrigatória, com unidades pequenas e com poucas propriedades, aumentando gradualmente a sua complexidade no que refere à estrutura. Para este autor o trabalho continuado com sequências ajuda os alunos a desenvolver as suas capacidades de exploração de símbolos e de generalização. Borralho e Barbosa (2009) salientam a importância de se trabalhar a Álgebra e para os alunos a compreenderem devem ter contacto com experiências algébricas informais durante a escolaridade básica. Referem ainda que estas devem incluir a análise de padrões e relações e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos, experiências que podem ser proporcionadas desde os primeiros anos já que as crianças são capazes de pensar funcionalmente em idade precoce (Blanton & Kaput, 2005). O reconhecimento de regularidades em Matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização utilizando regras criadas pelos alunos, permitem que a aprendizagem da álgebra se processe gradualmente e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração, essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico (Vale *et al.*, 2011).

Padrões de Repetição

Threlfall (1999) define um padrão de repetição como um padrão no qual se reconhece uma unidade que se repete ciclicamente. Esta aplicação repetida e continuada de uma parte do padrão tem a designação de unidade de repetição. O que torna um padrão repetitivo é a sua estrutura periódica, marcada pelos elementos que se replicam. A introdução e exploração formal de padrões nos primeiros anos de escolaridade centram-se inicialmente neste tipo de sequências, as de repetição.

Rustigian (1976, referido por Barbosa, 2010) estudou o desempenho de crianças com idades entre os 3 e os 5 anos de idade aquando da exploração de padrões de repetição. Este autor concluiu que o contexto em que o padrão é apresentado, a complexidade da estrutura e a experiência dos alunos com padrões deste tipo podem condicionar o seu sucesso. Acrescenta que as crianças evidenciam uma série de procedimentos, de forma progressiva, na exploração destas sequências: não referem os elementos prévios, havendo uma escolha aleatória de novos elementos; repetem o último elemento; utilizam elementos prévios mas por outra ordem; utilizam uma abordagem simétrica, reproduzindo a sequência mas por ordem inversa; e, por último, continuam o padrão de forma adequada, olhando para a estrutura inicial como forma de confirmação.

Tendo como referência os estudos levados a cabo por Threlfall (1999), foi formulado um modelo de ordenação dos padrões de repetição, de acordo com o grau de dificuldade associado à sua estrutura (Palhares & Mamede, 2002):

- ABABABABABAB – considerado o mais simples;
- AAABBBAAABBB;
- AABBAABBAABB;
- AABAABAABAAB;
- AAABAAABAAAB;
- ABCABCABCABC;
- AAABBBCCCAAA;
- AABBCCAABBCC;
- ACCCBCCCACCC;

• AAABCAAABCAA;
• AABCAABCAABC;
• AABBCAABBCAA- considerado o mais difícil.

Palhares e Mamede (2002) realizaram um estudo sobre padrões de repetição, no âmbito da Educação Pré-escolar, com crianças com 4-6 anos de idade. Começaram por explorar padrões do tipo ABAB (considerado o mais simples), sendo a cor o critério de diferenciação, e todas as crianças conseguiram esta estrutura. Seguidamente foram propostos outros modelos, com o mesmo material, e esta diversificação acarretou grandes dificuldades, em particular o padrão do tipo ABABBABBB. A maioria das crianças continuou aleatoriamente essas sequências ou usou erradamente a estrutura inicial do tipo ABAB. De seguida, foi dada às crianças a oportunidade de criarem o seu próprio padrão. Mais uma vez surgiram propostas do tipo ABAB, outros criaram padrões simples como o AABB ou AABAAB. Este estudo evidenciou algumas das dificuldades que as crianças revelam na exploração de padrões de repetição, como a generalização da regra identificada na estrutura ABAB, cuja aplicação foi estendida a outras situações, mostrando dificuldade em criar outro tipo de padrões. Palhares e Mamede (2002) sugerem que as crianças copiem modelos a partir do que observam nos adultos, para deste modo conceberem e diversificarem os seus próprios padrões, através da formulação de uma regra e a sua aplicação de forma consistente. Espera-se que nesta faixa etária as crianças vão de um modo gradual atingindo a abstração através de explorações concretas, com materiais e representações icónicas, transitando para as representações simbólicas.

Warren e Cooper (2006) sugerem que a exploração de padrões de repetição siga uma sequência de tarefas com grau de complexidade crescente, para uma correta apropriação da estrutura de um padrão e para o desenvolvimento da capacidade de generalizar: copiar um padrão; continuar um padrão em diferentes direções, já que a continuação de um padrão para a esquerda envolve a reversibilidade do pensamento, podendo tornar-se mais difícil para os alunos; descobrir a unidade de repetição; completar um padrão e descobrir a unidade de repetição; inventar um padrão; representar um determinado padrão noutro contexto, potenciando o estabelecimento de conexões entre representações equivalentes do mesmo padrão e a compreensão de que a propriedade fundamental do padrão não se altera.

As estratégias dos alunos ao continuar um padrão de repetição em espaços limitados e espaços não limitados poderão ser diferentes, bem como o tipo de dificuldades apresentadas. Um estudo realizado por Ventura (2008, referida por Vale *et al.*, 2011) mostrou que várias crianças do pré-escolar evidenciaram dificuldades em reproduzir ou completar sequências em espaços limitados, como por exemplo grelhas, tabelas ou sequências com um número limitado de espaços para preencher. As dificuldades surgiram quando tinham que mudar de linha, ou quando o número de espaços não era múltiplo do comprimento da unidade de repetição, levando a que esquecessem a lei de formação inicial e continuassem o padrão por colunas, reiniciassem a sequência, sobrepusessem termos ou deixassem termos por preencher. Esta autora destaca por isso que as dificuldades são maiores na exploração de padrões em espaços limitados do que em espaços não limitados.

Como já se referiu, os alunos podem explorar este tipo de padrões desde muito cedo, sendo recomendável o recurso a diferentes tipos de representações e contextos. A identificação da unidade de repetição deve ser potenciada pelo professor que, para além da continuação do padrão, poderá incidir sobre a perceção da globalidade da estrutura promovendo desta forma a generalização (Vale *et al.*, 2011).

Padrões de Crescimento

Os padrões de crescimento podem ser descritos como arranjos de números ou formas que se prolongam com regularidade sendo que cada termo se altera de uma forma previsível em relação ao anterior (Moyer-Packenham, 2005, referido por Barbosa, 2010). Estes padrões são normalmente de mais difícil compreensão para os alunos em comparação com os de repetição (Warren, 2000). Esta situação poderá estar relacionada com o facto de se privilegiar nos primeiros anos as experiências com padrões de repetição, mas também porque em termos cognitivos os padrões de crescimento são mais complexos do que os de repetição.

Do mesmo modo que acontece nos padrões de repetição, nos padrões de crescimento também cada termo muda de forma previsível em relação ao termo anterior, prolongando-se de forma regular (Vale *et al.*, 2011), no entanto é de referir que estes promovem o desenvolvimento do pensamento relacional. Warren e Cooper (2006) defendem que o trabalho envolvendo padrões deve proporcionar, de forma gradual, a evolução dos padrões de repetição para os de crescimento, contribuindo assim para a transição do pensamento recursivo para o pensamento funcional.

Neste sentido, verifica-se uma tendência para que as crianças revelem menos dificuldade na exploração de padrões de repetição em relação aos de crescimento, pelas diferenças estruturais que apresentam. Este aspeto deve ser considerado pelos professores que devem apostar na exploração destes dois tipos de padrões, já que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático, tendo no entanto presente que são os padrões de crescimento que conduzem naturalmente os alunos ao pensamento funcional (Scandura, 1971, referido por Barbosa, 2010).

Num estudo com jovens alunos de 12-13 anos (Warren, 2005, referida por Branco, 2008) realizou uma abordagem da Álgebra assente na exploração de padrões de crescimento visuais para gerar expressões algébricas, solicitando aos alunos que identificassem uma relação funcional entre os termos e as suas ordens e que usassem essa generalização para gerar outro padrão para outras ordens. A investigadora refere que foram trabalhados aspetos relativos à continuação de padrões crescentes, tendo os alunos descrito os padrões em termos de linguagem posicional, utilizando a relação encontrada para prever e criar a figura para outras ordens. Este trabalho promoveu e desenvolveu nos alunos a utilização de linguagem matemática apropriada e o pensamento, já que descreveram e previram as figuras para qualquer ordem e usaram a reversibilidade de pensamento. Stacey (1989, referida por Barbosa, 2010) reconheceu quatro estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas com padrões de crescimento, em suporte visual: contagem, diferença, *whole-object* e linear. Na contagem, os alunos procediam ao cálculo do número de elementos no desenho representativo de um dado termo. Quando utilizavam a diferença verificavam quantos elementos aumentavam/diminuíam de um termo para o próximo, e quando pretendiam calcular os termos seguintes iam adicionando o mesmo número recursivamente ou então multiplicavam a diferença encontrada pela ordem do termo a encontrar. Na estratégia *whole-object*, os alunos utilizavam o conceito de múltiplo ou de proporcionalidade direta para calcular o número de elementos de determinado termo, a partir daqueles que já conheciam. E finalmente com o método linear os alunos reconheciam que na generalização do padrão eram necessárias a multiplicação e a adição, e que a ordem pela qual as operações eram realizadas também era importante. Refere ainda que frequentemente utilizavam mais do que um método para chegarem à solução.

Barbosa, Vale e Palhares (2008) efetuaram um estudo centrado na resolução de problemas em contextos visuais, com alunos do 6.º ano de escolaridade. Concluíram que a estratégia mais usada pelos alunos na generalização próxima foi a contagem dos elementos do termo pedido, por observação da sua representação icónica, e para as questões de generalização distante utilizaram essencialmente procedimentos explícitos identificando imediatamente uma regra. Os autores deste estudo destacaram ainda que o contexto visual que enquadrava os padrões foi fundamental para ajudar na contagem dos elementos bem como no reconhecimento visual da estrutura do padrão, encontrando mais facilmente uma relação funcional.

Ponte, Branco e Matos (2009, referidos por Cunha, 2010) mencionam que, ao trabalharem com sequências crescentes, os alunos podem recorrer ainda a outras estratégias para atingirem a generalização, recorrendo por exemplo à reta numérica. A utilização de setas para os elementos que fazem parte da sequência e a manipulação da reta permitem uma visualização que facilita a análise das relações entre os elementos do padrão.

Vale *et al.* (2011) desenvolveram uma proposta didática, de natureza exploratória e investigativa, constituída por um conjunto de tarefas envolvendo padrões que contemplam diversos tipos de abordagens e privilegiam o contexto figurativo, com o propósito de conseguir a flexibilidade de pensamento no âmbito da Álgebra. Esta sucessão de tarefas envolve, um trabalho gradual que privilegia, entre outros aspetos a exploração de padrões de repetição e de padrões de crescimento: 1) *Contagens visuais básicas* - reconhecimento de padrões para desenvolver a capacidade de ver instantaneamente (*subitizing*); 2) *Outras tarefas de contagens visuais* - reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem (e.g. associações para obter 5 ou 10, multiplicação em arranjos retangulares, simetria); 3) *Sequências* - descoberta de padrões e construção de generalizações em padrões de repetição e de crescimento; e 4) *Problemas* - construção por parte dos alunos das suas próprias sequências e/ou descoberta do padrão e generalização para estabelecer propriedades. Todas estas fases são atravessadas por uma capacidade unificadora que é generalização.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

Neste capítulo começa-se por apresentar e fundamentar as opções metodológicas inerentes a este estudo que recaem sobre uma abordagem de natureza qualitativa e um *design* de estudo de caso. É também realçado o papel da investigadora e são descritos alguns aspetos relevantes do contexto e dos participantes. Por fim, explicita-se como se processou a recolha de dados, fazendo referência às diversas fontes de informação, bem como às técnicas de análise e interpretação dos dados.

Opções Metodológicas

O objetivo principal deste estudo é analisar o modo como alunos do 1º ano resolvem problemas que envolvem a procura de padrões, procurando caracterizar as estratégias utilizadas, identificar as dificuldades apresentadas e perceber o impacto dos contextos das tarefas no desempenho dos alunos. Deste modo, optou-se por uma abordagem de tipo qualitativo, que se assume como particularista, permitindo analisar uma situação específica, como a deste estudo, que se supõe ser única em muitos aspetos. Com esta abordagem metodológica pretende-se conhecer em profundidade o *como* e os *porquês*, procurando descobrir o que há de mais essencial e característico no fenómeno a investigar (Ponte, 2002).

Estudos em educação salientam que a investigação qualitativa é, na maior parte das vezes, considerada naturalista, em virtude de o investigador aceder diretamente aos contextos onde os fenómenos a investigar ocorrem, demonstrando um forte interesse em recolher os dados no ambiente natural (Guba & Lincoln, 1985, referidos por Bogdan & Biklen, 1994), razão que também fundamenta a escolha de uma abordagem qualitativa neste trabalho. Esta opção permite ao investigador estudar as questões formuladas em profundidade e com detalhe (Patton, 2002) e ao mesmo tempo privilegiar os processos mais do que os resultados, o que culmina na descrição dos fenómenos observados e na procura de explicações para a sua ocorrência (Merriam, 1991).

Bogdan e Biklen (1994) associam à investigação qualitativa cinco características fundamentais: (1) na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, onde o investigador é o instrumento principal de recolha dos dados; (2) a investigação qualitativa é descritiva; (3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelos processos do que simplesmente pelos resultados ou produtos; (4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus resultados de forma indutiva; e (5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Refletindo sobre o contexto educacional, a investigação qualitativa dá-nos informação privilegiada sobre o processo de ensino-aprendizagem. Num estudo de natureza interpretativa e de acordo com Erickson (1986): a aula é encarada como um meio social e culturalmente organizado; o ensino (ação do professor) é unicamente um dos aspetos do meio de aprendizagem reflexiva; e a natureza e conteúdo das perspetivas de significado dos alunos e professores são fatores intrínsecos do processo educativo. Ainda segundo Erickson (1986), o objetivo da investigação neste paradigma situa-se no "significado humano da vida social e na sua clarificação" (p. 196). Estas conclusões mostram que a sala de aula é um espaço adequado para implementar uma investigação de cariz qualitativo uma vez que se trata de um contexto social rico, com potencial para interações de natureza diversa.

Dentro da abordagem qualitativa, optou-se por um *design* de estudo de caso. Esta escolha relaciona-se diretamente com a natureza das questões de investigação, com o grau de controlo sobre os fenómenos em estudo, com o tipo de produto que se visa obter e com o foco da investigação (Merriam, 1991). Neste estudo pretende-se dar resposta a questões de natureza explicativa e descritiva, o investigador não tem qualquer controlo sobre os fenómenos, tem como grande finalidade um produto com características descritivas e interpretativas e o enfoque está centrado em processos evidenciados por alunos do 1.º ano de escolaridade. Ponte (1994) refere que uma das principais características dos estudos de caso é o seu forte cunho descritivo, em que o investigador apenas pretende compreender e caracterizar a situação tal como ela é e não modificá-la. Este autor menciona ainda que este tipo de abordagem não é instrumental, isto é o investigador não tem controlo sobre os acontecimentos, não é sua intenção manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes. Também de acordo com Ponte (2002) é a essência das questões enunciadas que estabelece a natureza do objeto de estudo e dos dados que se vier a recolher. Segundo Martins (2007) o estudo de caso não tem por objetivo a generalização de resultados, visa antes conhecer o que há de único no objeto de estudo. Pode ainda dizer-se que o estudo de caso é uma investigação de natureza empírica, baseada em trabalho de campo ou análise documental, que estuda os fenómenos em contexto real, tirando partido de diversas fontes de evidência (e.g. entrevistas, observações, documentos). Estas características fundamentam a opção pelo estudo de caso qualitativo neste trabalho (Merriam, 1991; Yin, 2009).

Vários autores apresentam diferentes modalidades de estudos de caso, classificando-os de acordo com a sua especificidade. Neste estudo a escolha incidiu sobre a categorização proposta por Stake (2009) que distingue os estudos de caso em: intrínsecos, instrumentais e múltiplos. O estudo de caso intrínseco acontece quando o investigador tem como objetivo compreender melhor um caso particular, que se torna o enfoque da investigação, havendo um interesse fulcral em todos os aspetos e detalhes do caso em si. O estudo de caso instrumental é a escolha adequada quando se pretende efetuar uma introspeção sobre um assunto em particular, constituindo um meio para refinar uma teoria ou para proporcionar conhecimento sobre algo que não é exclusivamente o caso em si, funcionando assim como um instrumento para compreender outro(s) fenómeno(s). Por fim, o estudo de caso coletivo é aplicado quando se pretende que um conjunto de casos contribua, através da sua comparação, para um conhecimento mais profundo acerca de um determinado fenómeno, população ou condição. Considerando estas modalidades, o presente estudo integra-se na vertente de estudo de caso intrínseco já que se pretende estudar um determinado fenómeno num grupo específico de crianças.

Em síntese, neste estudo adotou-se uma metodologia de natureza qualitativa, na vertente de estudo de caso intrínseco, construído com base numa turma de cinco alunos do 1.º ano de escolaridade. Foram privilegiados métodos de recolha de dados diversificados, como a observação participante, registos áudio e vídeo e análise documental, mantendo em todas as fases da investigação o anonimato e confidencialidade dos alunos participantes.

O Papel da Investigadora

No ano letivo em que se realizou a investigação fui professora titular da turma na qual o estudo incidiu. Faziam parte deste grupo alunos do 1.º e do 4.º anos de escolaridade, no entanto o estudo centrou-se nos alunos do 1.º ano. Foi explicado aos restantes alunos o motivo da seleção dos colegas do 1.º ano e o que se pretendia com este trabalho. Os alunos entenderam e não se sentiram negligenciados tendo participado em alguns momentos de atividade, sempre que lhes foi solicitado. Além disso, estes alunos já apresentavam uma certa autonomia pelo que puderam trabalhar sozinhos nos espaços de tempo mais dedicados aos elementos que constituíram o estudo de caso.

Ao longo desta investigação exerci o duplo papel de professora e investigadora. Enquanto professora da turma estabeleci uma relação de proximidade com os alunos, o que permitiu construir um conhecimento global do grupo e de cada indivíduo em particular, contribuindo para o desenvolvimento de uma proposta pedagógica, constituída por dez tarefas centradas na exploração de padrões, adequada ao contexto e aos participantes. Estas tarefas foram apresentadas aos alunos num ambiente que estimulasse o desenvolvimento do trabalho, a formulação de questões, conjeturas e a argumentação dos raciocínios, de forma a permitir uma melhor compreensão do fenómeno em estudo. Como investigadora procurei compreender como os alunos mobilizavam os conhecimentos requeridos, identificando as estratégias utilizadas e as dificuldades sentidas. Considerando este duplo papel de professora e investigadora estive sempre presente e ativamente envolvida em todo o processo, o que permitiu compreender e dar resposta às questões formuladas neste estudo mas também a problemas emergentes da prática profissional, facto que enquadra este estudo numa investigação sobre a própria prática (Ponte, 1994).

Contexto do estudo e Participantes

Este estudo realizou-se durante o ano letivo 2010/2011, numa escola do 1.º ciclo do ensino básico do concelho de Viana do Castelo, com uma turma do 1.º ano de escolaridade, da qual era professora titular. Os alunos selecionados integravam uma turma mista com alunos do 4.º ano de escolaridade. O estudo incidiu sobre os cinco alunos do 1.º ano por um interesse pessoal da investigadora em compreender processos de pensamento associados à resolução de problemas com padrões desde os primeiros anos. Neste sentido, os cinco alunos do 1.º ano constituíram o caso a estudar, no entanto destaca-se que o estudo decorreu no contexto habitual da aula onde os alunos do 4.º ano estavam igualmente integrados, havendo momentos de integração total destes alunos nas atividades inerentes ao estudo e momentos de trabalho autónomo em paralelo.

Ao longo do primeiro período letivo teve início a fase de formalização do estudo tendo-se solicitado autorização ao Diretor do Agrupamento da Escola e ao respetivo Coordenador para implementar esta investigação. Posteriormente, realizou-se uma reunião com os Pais/Encarregados de Educação dos alunos da turma, com o intuito de clarificar o que se pretendia com esta investigação e apresentar as características globais do estudo, solicitando a sua autorização para a participação dos educandos. Os encarregados de educação mostraram-se recetivos ao desenvolvimento do projeto e todos assinaram as respetivas autorizações. Após o consentimento dos órgãos de gestão e dos encarregados de educação apresentei a proposta de trabalho aos alunos explicando o que se pretendia deles. Os alunos mostraram-se abertos a esta proposta e evidenciaram gosto em participar. Foi uma preocupação da investigadora a criação de um clima propício para que os alunos se sentissem à vontade, garantindo o anonimato e sigilo dos participantes envolvidos no estudo.

A recolha de dados teve início durante o primeiro período letivo, após o consentimento dos órgãos de gestão e dos encarregados de educação, começando por recolher dados que permitiram caracterizar o grupo e o contexto em que o estudo decorreu. Este processo continuou no segundo período com a implementação das tarefas, tendo-se efetuado registos áudio e vídeo destas sessões, com a anuência dos alunos, e realizado entrevistas individuais a cada um dos alunos que constituíram o caso, para melhor compreender a forma como pensaram. No que refere à implementação das tarefas privilegiei o período da manhã, no entanto, sendo professora titular da turma houve sempre alguma flexibilidade na gestão do tempo destinado à sua exploração. Sempre que possível as entrevistas foram realizadas no mesmo dia da tarefa ou durante essa semana para que não houvesse um desfasamento de tempo relevante.

Recolha de dados

Neste estudo optou-se por uma abordagem qualitativa numa modalidade de estudo de caso com o objetivo de compreender o modo como alunos do 1.º ano resolvem problemas que envolvem a exploração de padrões. Esta abordagem metodológica implica o recurso a múltiplas fontes de evidência, recolhendo dados de origem diferente de forma a analisar a sua convergência (Yin, 2009). As fontes de recolha de dados privilegiadas foram: a observação participante, a realização de entrevistas semiestruturadas, registos áudio e vídeo das sessões de trabalho realizadas na aula e uma diversidade de documentos.

Observação

Nos estudos de natureza qualitativa é comum recorrer a diversas fontes de recolha de evidências que se complementam com o propósito de triangular os dados, entre as quais está a observação. É uma das técnicas de recolha de dados que permite ao investigador estabelecer uma relação e um contacto pessoal mais estreito com os intervenientes no estudo e com o fenómeno a observar, contribuindo para uma perceção e interpretação mais aprofundadas do ponto de vista dos participantes e da realidade a investigar.

O tipo de observação que se efetua varia de acordo com o grau de envolvimento do investigador no contexto em estudo. Por um lado, pode assumir uma postura passiva, sem interagir com os sujeitos, limitando-se a observar aspetos significativos daquele ambiente, ou pode assumir um papel ativo participando diretamente nas atividades desenvolvidas, o que lhe permite um contacto direto com os sujeitos. Neste caso, estamos perante a observação participante que se define pela completa integração do investigador no contexto que se encontra a estudar, interagindo com os intervenientes, com o propósito de compreender detalhadamente a forma como vivenciam determinados fenómenos (Yin, 2009).

O modo de observar pode variar ao longo do tempo que dura o estudo. Assim, no início, o observador participante não intervém muito, espera que o aceitem e o integrem. À medida que o envolvimento ocorre a sua participação aumenta. No entanto, é necessário não se envolver demasiado para não perder de vista os seus objetivos iniciais. Numa investigação é fundamental manter a neutralidade para tentar compreender a dinâmica do contexto sem interferências. Grande parte do sucesso da observação participante advém de não causar perturbações ao ambiente onde o estudo ocorre (Bogdan & Biklen, 1994). Quando se decide observar determinados sujeitos ou fenómenos em contexto educativo é também importante que os outros alunos da sala não se sintam excluídos, facto que foi tido em consideração neste estudo já que se procurou integrar todos os alunos nas tarefas desenvolvidas. O investigador deve redigir notas de campo extensas, descrevê-las com detalhe no final da observação e não na frente dos sujeitos, se possível.

A proposta pedagógica associada a este estudo foi aplicada em contexto de sala de aula e o observador esteve sempre em contacto com os alunos, assumindo o duplo papel de investigador e professor, tendo recolhido informações através da observação participante. Para Bogdan e Biklen (1994) é este o melhor método de recolha de dados num estudo de caso de caráter interpretativo. Ao privilegiar a observação participante, o principal instrumento de recolha de dados foi a investigadora que também era a professora titular de turma. Este tipo de observação permite ter uma perceção mais consciente das perspetivas dos alunos, no entanto apresenta algumas limitações, nomeadamente a dificuldade em registar todos os fenómenos que ocorrem no contexto, e por isso foram complementados por formas de recolha de dados, como a recolha documental, entrevistas e gravações áudio e vídeo de cada uma das aulas. Durante as sessões de observação ia circulando pela sala de aula, tirando dúvidas e questionando os alunos, tendo havido uma preocupação no registo do que ia observando que era posteriormente sistematizado sob a forma de relatório (Anexo A). Depois de observadas as aulas foram formuladas questões que durante as entrevistas eram colocadas aos alunos-caso para clarificar respostas e compreender o seu envolvimento nas tarefas.

Entrevistas

A entrevista é a técnica de recolha de dados que melhor permite aceder ao que um determinado indivíduo pensa (Patton, 2002). Mertens (1998) reforça que é muito importante compreender e descrever um fenómeno do ponto de vista dos participantes no estudo. O diálogo que o investigador estabelece com os sujeitos pode permitir o acesso a opiniões, significados e processos cognitivos.

Numa investigação qualitativa, as entrevistas são normalmente utilizadas como complemento à observação, contribuindo para que o investigador aprofunde o seu conhecimento sobre o que está a estudar e aceda a informações e dados que não foi capaz de observar (Mertens, 1998). Bogdan e Biklen (1994) apontam ainda que numa investigação qualitativa as entrevistas podem assumir dois propósitos: (1) ser uma estratégia dominante na recolha de dados; e (2) serem usadas conjuntamente com a observação participante, com a análise de documentos e até com outras fontes de evidência. Nestes casos, ambos os propósitos são utilizados na recolha de dados descritivos sobre o sujeito, ajudando o investigador a interpretar ideias/aspetos do contexto em estudo.

As entrevistas qualitativas apresentam diferentes graus de estruturação, dependendo do controlo que o investigador pretende ter sobre as respostas dos participantes, variando entre entrevistas estruturadas e não estruturadas, havendo ainda uma situação intermédia associada às entrevistas semiestruturadas (Denzin & Lincoln, 1994). Nas entrevistas semiestruturadas há uma certa flexibilidade no que refere à ordem das questões e à sua formulação, permitindo deste modo que ocorra uma conversa em ambiente natural mas fazendo, ao mesmo tempo, uma recolha sistemática de dados relevantes para o estudo (Patton, 2002). O sujeito desempenha um papel primordial na definição do conteúdo da entrevista e na orientação das questões.

Considera-se que uma entrevista associada a um estudo qualitativo é boa quando é rica em evidências, abundante em palavras e detalhes e as transcrições estão cheias de dados exemplificados. O entrevistador estimula também o sujeito a ser claro e específico nos pormenores e detalhes acerca de situações já vividas. A flexibilidade é um fator igualmente importante nestas entrevistas e as respostas permitem analisar dados e até partilhar experiências, procurando compreender os diferentes pontos de vista dos sujeitos.

No presente estudo optou-se pela realização de entrevistas semiestruturadas com o objetivo de aceder às perspetivas dos sujeitos e perceber os raciocínios dos alunos-caso. As entrevistas foram complementadas com notas de campo, resultantes das observações das aulas, possibilitando um melhor enquadramento e compreensão da perspetiva dos alunos. As entrevistas ocorreram no mesmo dia da implementação de cada tarefa, quando a disponibilidade de tempo permitia, ou no dia seguinte à realização da tarefa, de modo a não se perder o fio condutor da atividade. Realizaram-se dez entrevistas individuais com cada um dos alunos que constituíram o caso, com a duração aproximada de vinte minutos. Para cada entrevista analisava previamente os registos do trabalho efetuado pelos alunos e analisava-os, complementando com a observação das gravações das sessões, para que deste modo pudesse escolher criteriosamente as questões orientadoras, tentando adequá-las aos requisitos do estudo e aos alunos em causa. Durante a entrevista era dada ao aluno a sua folha de registo para que pudesse explicar melhor as estratégias adotadas durante a tarefa. Todas as entrevistas foram gravadas em áudio para posteriormente serem transcritas na íntegra, facilitando a análise dos dados.

Gravações áudio e vídeo

Ao longo do estudo foram também efetuadas gravações áudio e vídeo das sessões de implementação e discussão das tarefas e das entrevistas com os alunos, com o objetivo de captar e compreender aspetos que pudessem passar despercebidos. Salienta-se porém que a utilização de gravações áudio e vídeo pode por vezes alterar o comportamento dos indivíduos, tornando assim fundamental a minimização dos efeitos das máquinas. Segundo Bodgan e Biklen (1994), os participantes começam a acostumar-se e a ficar indiferentes ao que está sempre presente e integrado, tornando-se familiar, situação que sucedeu com estes alunos. Foram gradualmente familiarizados com os instrumentos utilizados, o que contribuiu para que apresentassem um comportamento normal.

A utilização de gravações áudio e vídeo contribuiu para a fiabilidade da investigação, possibilitando o registo de alguns pormenores que passaram despercebidos na observação e que a investigadora não conseguiu acompanhar, uma vez que neste estudo desempenhou também o papel de professora da turma. Estes registos foram usados na implementação de todas as tarefas propostas, tendo-se captado atitudes, comportamentos, procedimentos utilizados aquando da resolução das tarefas, que não seria possível de outra forma, complementando assim as notas decorrentes da observação. Foi importante analisar estas gravações porque evidenciaram o registo fiel do ambiente vivido, podendo observar-se a discussão de estratégias de resolução adotadas, o modo como completavam ou aceitavam as ideias e métodos dos colegas e as interações entre eles.

Documentos

Na literatura são várias as referências a autores que salientam a importância da recolha de dados a partir da análise de documentos. Yin (2009) realça que a recolha documental deve ser utilizada em quase todo o tipo de estudos de caso porque permite validar e confirmar evidências emergentes de outras fontes de recolha de dados. Neste trabalho foram recolhidos e analisados documentos de natureza diversa, tais como:

Documentos produzidos pelos alunos, nomeadamente os registos referentes à resolução das tarefas propostas. Em cada tarefa os alunos produziram registos individuais, representando assim as suas ideias e processos de pensamento. Permitiram uma melhor compreensão da forma como chegaram aos resultados e conclusões, bem como a análise de algumas dificuldades.

Registos de natureza biográfica e relativos ao percurso escolar dos alunos (Ficha de avaliação dos alunos do Pré-escolar - Anexo B - e inquérito aos alunos utilizado no Agrupamento de escolas - Anexo C -. Estes documentos permitiram aceder a dados relativos ao percurso escolar durante a frequência do jardim de infância bem como recolher dados acerca das habilitações e profissões dos pais, idades dos alunos, número de irmãos e gosto pela frequência da escola. Possibilitaram a compilação de um conjunto de dados que contribuíram para a caracterização do contexto, da turma e de cada aluno.

Notas de campo. As notas de campo são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha” (Bodgan & Biklen, 1994, p. 150). Durante este estudo foram recolhidas diversas notas de campo, baseadas nas observações feitas durante a realização das tarefas. Para o efeito foi construído um guião de observação das sessões (Anexo A) que visava facilitar a reflexão sobre as reações dos alunos, o modo como se envolveram nas tarefas, comentários pertinentes, gestão do tempo, episódios relevantes. Desta forma, todas estas notas foram fundamentais para melhorar a qualidade escrita deste trabalho, de modo a orientar a estagiária/investigadora.

Globalmente, estes documentos foram de extrema importância uma vez que permitiram reunir um conjunto de dados que se complementaram, enriquecendo as evidências recolhidas ao longo deste trabalho.

Síntese

Esta investigação foi desenvolvida com recurso a múltiplas fontes de recolha de dados, que contribuíram de forma significativa para a compreensão do fenómeno em estudo. Na Tabela 3 apresenta-se uma descrição resumida dos métodos de recolha de dados aplicados neste estudo.

Tabela 3

Descrição dos métodos de recolha de dados.

Método de recolha de dados	Descrição
Observação	A investigadora assumiu o papel de observadora participante e foi o principal veículo de recolha de dados. Ao longo do estudo foi efetuado o registo de anotações referentes às observações, durante e após cada sessão, tendo sido criado um guião para facilitar e orientar este registo.
Entrevistas	Foram realizadas entrevistas semiestruturadas após a realização de cada sessão de exploração das tarefas, com o intuito de compreender de forma mais aprofundada o raciocínio dos alunos.
Gravações áudio e vídeo	Efetuou-se a gravação áudio e vídeo das sessões de exploração e discussão das tarefas e das entrevistas realizadas aos alunos, o que permitiu captar aspetos que poderiam complementar as observações.
Documentos	Foram analisados diversos documentos como: documentos produzidos pelos alunos, registos biográficos e de percurso escolar e notas de campo.

A seleção das tarefas

As tarefas foram construídas/selecionadas e adaptadas aos objetivos do estudo e aos alunos participantes, resultando num conjunto diversificado de propostas de natureza problemática envolvendo a exploração de padrões. Foi dada preferência a tarefas publicadas em documentos curriculares ou resultantes de estudos empíricos no âmbito da educação matemática, uma vez que já tinham sido alvo de validação. As tarefas delineadas inicialmente foram analisadas por professores do 1.º ciclo do ensino básico e por professores do ensino superior associados à formação inicial e contínua de professores, com experiência preponderante na investigação em educação matemática. Este painel analisou e teceu comentários no que refere à adequação das propostas ao nível de ensino e aos requisitos do Programa de Matemática do Ensino Básico. Este procedimento conduziu a adaptações de conteúdo, nomeadamente no que refere ao tipo de linguagem utilizada, ao número de questões efetuadas, ao tempo previsto para a sua exploração na sala de aula, tendo resultado numa proposta pedagógica constituída por dez tarefas que envolvem: continuar sequências de diferentes tipos, prever e identificar termos de uma sequência, inventar padrões, descrever padrões, resolver problemas através da identificação de um padrão.

As tarefas foram implementadas ao longo de um período de aproximadamente 3 meses, integradas nas planificações formuladas para a turma, tendo havido preocupação em contextualizar cada uma das propostas para que fossem significativas para os alunos. Na tabela 4 constam, de uma forma sintetizada, a identificação das tarefas, a calendarização e os principais objetivos que lhes estão associados.

Tabela 4

As tarefas

Tarefa	Data da Implementação	Objetivos da tarefa
Repetições divertidas	15/02/2011	- Efetuar contagens; continuar e completar padrões; reconhecer a sequência dos números naturais; relacionar termos segundo a sua orientação espacial; evidenciar reversibilidade do pensamento
A subir ou a descer?	22/02/2011	- Efetuar contagens; continuar e completar padrões; reconhecer a sequência dos números naturais; identificar as sequências dos números pares e dos números ímpares; relacionar termos segundo a sua orientação espacial
Baile de máscaras	11/03/2011	- Efetuar contagens; continuar e completar padrões; criar padrões; identificar relações numéricas; identificar posições pares e ímpares
Convites para a festa	18/03/2011	- Efetuar contagens; continuar e completar padrões; identificar relações numéricas; identificar posições pares e ímpares; evidenciar reversibilidade do pensamento
Jogar com o nome próprio	23/03/2011	- Efetuar contagens; continuar um padrão num espaço limitado; reconhecer regularidades em sequências visuais.
Números coloridos	01/04/2011	- Efetuar contagens de 2 em 2, de 3 em 3, de 5 em 5, de 10 em 10; identificar relações numéricas; reconhecer relações visuais.
Degrau a degrau	27/04/2011	- Efetuar contagens; identificar regularidades num padrão de crescimento; compreender a noção de variação.
Muro organizado	04/05/2011	- Efetuar contagens; continuar e completar padrões; reconhecer a sequência dos números naturais; identificar a variação num padrão de crescimento.
Saltos de gato	20/05/2011	- Efetuar contagens; decompor o número cinco; reconhecer diferentes representações do número cinco.
Abraços amigos	26/05/2011	- Efetuar contagens; identificar um padrão.

Para cada tarefa houve uma fase inicial de leitura e interpretação, visto tratar-se de um grupo do 1.º ano de escolaridade, para clarificar possíveis dúvidas por parte dos alunos. Em algumas das tarefas propostas foram utilizados materiais manipuláveis de natureza diversa com o intuito de facilitar a exploração e compreensão da estrutura dos padrões.

Calendarização do estudo e procedimentos

O estudo decorreu entre outubro de 2010 e dezembro de 2011. A preparação para este estudo teve início em outubro de 2010. Numa primeira fase foi definido o propósito do estudo, bem como os objetivos associados, tendo-se procedido à recolha de bibliografia adequada à temática a investigar. Simultaneamente, foram elaboradas tarefas e estruturados materiais, sujeitos a validação por parte de um painel de especialistas. Depois de formalizadas as autorizações para a implementação do estudo junto dos órgãos de gestão do agrupamento (Anexo D), escola (Anexo E) e pais/encarregados de educação (Anexo F), procedeu-se à recolha de vários documentos que permitiram caracterizar o contexto e os alunos. Procedeu-se ainda à seleção e análise da ordem de aplicação das tarefas, enquadrando-as nas planificações delineadas para a turma.

Em fevereiro de 2011 iniciou-se o trabalho de campo seguindo um ciclo que contemplou: a implementação das tarefas, gravação das respetivas sessões em vídeo, redação de notas de campo, análise dos registos efetuados pelos alunos, seguida das entrevistas gravadas em áudio e visualização de todas as gravações. Para cada tarefa foram seguidos os mesmos procedimentos. Todas as aulas foram gravadas para facilitar a análise de dados contribuindo, juntamente com as notas de campo e a ficha de resolução da tarefa, para a estruturação das entrevistas aos alunos. Após a realização das entrevistas procedia-se à discussão de cada tarefa em grande grupo. Esta fase decorreu entre fevereiro e maio de 2011.

Finalmente procedeu-se à escrita da dissertação, efetuando uma revisão bibliográfica final. Na tabela 5 encontra-se a calendarização sistematizada das diferentes fases do estudo.

Tabela 5

Calendarização das diferentes fases do estudo e respetivos procedimentos.

Datas	Fases do Estudo	Procedimentos
outubro de 2010 a janeiro de 2011	Preparação do estudo	Definição do problema e objetivos Recolha bibliográfica Elaboração das tarefas Adequação das tarefas
	Formalização do estudo	Pedido de autorização aos órgãos de gestão da Escola Pedido de autorização aos Encarregados de Educação Apresentação do estudo aos alunos Caracterização do contexto e da turma
	Escolha das tarefas	Seleção das tarefas e análise da ordem de implementação
fevereiro a maio de 2011	O estudo em ação	Implementação das tarefas e gravação das sessões em vídeo Redação de notas de campo Visualização das gravações e análise dos registos dos alunos; Realização das entrevistas e gravação em áudio Análise de dados
maio a dezembro de 2011	Redação da dissertação	Continuação da análise de dados Escrita da dissertação Revisão bibliográfica final

Análise dos dados

Tendo-se optado por um estudo de natureza interpretativa, um dos grandes objetivos passava pela elaboração e apresentação de descrições e interpretações dos dados recolhidos, de forma a dar resposta ao problema em estudo e às respetivas questões de investigação. Para isso iniciou-se todo um processo de análise qualitativa que segundo Bogdan e Biklen (1994):

> é o processo de busca e organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (p. 205)

Neste estudo a análise de dados iniciou-se em paralelo com o processo de recolha de dados. Começou-se por recolher documentos de natureza biográfica, de modo a caracterizar a turma e cada um dos alunos que constituíram o caso, contribuindo ainda para avaliar a adequação das tarefas formuladas. Após a implementação e exploração da primeira tarefa, foram realizadas as primeiras entrevistas aos alunos-caso, tendo por base a leitura e análise dos registos destes alunos e das gravações da respetiva aula. Este ciclo foi repetido para todas as tarefas da proposta pedagógica, sendo que para cada uma se procedeu à transcrição integral das entrevistas e das sessões vídeo gravadas. Este processo cíclico permitiu cruzar evidências recolhidas através dos vários métodos já referidos, contribuindo para o enriquecimento das descrições, complementando a informação, e para a triangulação dos dados.

Após a conclusão da recolha de dados procedeu-se à leitura integral de todas as evidências recolhidas, lendo novamente os registos produzidos pelos alunos, as notas de campo e as transcrições das entrevistas e das sessões de implementação das tarefas. Com este procedimento procurou-se enriquecer as descrições já feitas ao longo da recolha de dados. No final de cada tarefa foi ainda elaborada uma síntese dos resultados mais significativos. O estudo de caso foi sendo construído através de uma análise descritiva dos aspetos considerados relevantes para o estudo e assentou no trabalho desenvolvido pelos cinco alunos do 1.º ano de escolaridade.

A construção de categorias de análise relacionou-se diretamente com os objetivos do estudo, em particular as questões de investigação, e com a revisão de literatura efetuada antes da recolha de dados e foi sendo refinada ao longo do processo de recolha e análise dos dados.

No final da análise de dados, por forma a sintetizar os principais resultados, foram descritos os aspetos mais relevantes, diretamente relacionados com as questões do estudo, fundamentados na literatura. Para garantir a validade do estudo recorreu-se a estratégias como a triangulação de dados, comparando as evidências resultantes de várias fontes de recolha de informação, o envolvimento prolongado no contexto (Patton, 2002), facilitado pelo facto de ser professora da turma e a observação persistente (Lincoln & Guba, 2000). Nos estudos qualitativos, o investigador preocupa-se com a apresentação e a descrição detalhada dos resultados e dos pressupostos fundamentais da investigação, para que outros possam analisar possibilidade de transferência para outros contextos ou situações (Lincoln & Guba, 2000; Yin, 2009). A descrição feita na análise de dados dá uma visão clara de como todo o estudo se desenrolou, apresentando simultaneamente a discussão dos resultados, o que permite avaliar o significado que a investigação teve para a investigadora. Todas estas características são fulcrais para garantir que um estudo garanta credibilidade e seja aceite como válido mediante os resultados obtidos.

CAPÍTULO IV – CONTEXTO DO ESTUDO

Neste capítulo pretende-se contextualizar o estudo, descrevendo aspetos relevantes relacionados com os participantes e as tarefas implementadas. Começa-se por apresentar uma caracterização geral da turma na qual decorreu o estudo, aprofundando posteriormente a descrição das principais características dos alunos que constituíram o estudo de caso. Para finalizar, procura-se apresentar de forma sucinta as tarefas implementadas neste estudo, focando, entre outros aspetos, a tipologia dos padrões, as competências mobilizadas e os materiais que lhes servem de suporte.

Caracterização geral da turma

Participaram neste estudo cinco alunos do 1.º ano de escolaridade, integrados numa turma mista composta também por alunos do 4.º ano de escolaridade. Os alunos do 4.º ano, apesar de participarem ativamente na resolução de algumas tarefas mais transversais, não constituíram objeto de estudo porque os objetivos desta investigação estavam centrados em alunos do 1.º ano, sendo por isso específicos desse nível de ensino. No entanto, como o estudo decorreu no ambiente natural de sala de aula torna-se pertinente compreender o contexto de trabalho na sua plenitude.

A escola onde se realizou este estudo, situa-se num meio rural, que dista cerca de 14Km da sede do concelho de Viana do Castelo. Relativamente à situação socioprofissional dos pais dos alunos da turma verifica-se que 67% pertencem ao setor secundário, 22% ao setor terciário e 11% ao setor primário que inclui os desempregados. Em relação às mães verifica-se que 33% situam-se no setor secundário, 33% no setor terciário e 34% no setor primário que inclui desempregadas e domésticas. Pode-se referir que na maioria dos casos a escolha recai numa agricultura de subsistência, limitando-se ao cultivo dos quintais ou pequenos terrenos junto às habitações. É ainda de salientar que se encontra implantada nesta freguesia uma importante indústria de papel e celulose que em muito contribui para a economia da freguesia e até mesmo para a escola, patrocinando e apoiando economicamente determinadas atividades dos alunos, colmatando algumas necessidades básicas dos alunos e das respetivas famílias.

Em traços gerais, a turma era constituída por nove alunos, cinco deles do 1.º ano e quatro do 4.º ano. No início do estudo todos os alunos do 1.º ano tinham seis anos de idade, sendo que dois eram meninos e três meninas. Salienta-se ainda o facto de todos terem frequentado o Jardim de Infância antes de ingressarem na escolaridade obrigatória. No grupo do 4.º ano, dois eram meninos e duas meninas, todos com nove anos, não havendo retenções a assinalar. Os alunos do 4.º ano tinham já uma certa autonomia, sendo capazes de trabalhar de forma independente num período de tempo considerável, permitindo assim um maior acompanhamento do grupo de alunos do 1.º ano por parte da professora. Foi-lhes explicado o âmbito do trabalho e, por isso, não se sentiram negligenciados pelo facto do enfoque estar nos alunos mais novos, tendo-se mostrado muito compreensivos e inclusivamente integrado o trabalho em situações que se mostraram adequadas.

A Tabela 6, sintetiza alguns dos dados sóciodemográficos e de contexto familiar, relativos aos nove alunos da turma, recolhidos no início do ano letivo através de um questionário implementado no Agrupamento onde a escola está inserida. Os nomes atribuídos aos alunos são fictícios por forma a proteger o seu anonimato.

Tabela 6

Dados sóciodemográficos e do contexto familiar

Alunos/Pais	Idade Pai	Idade Mãe	Profissão Pai	Profissão Mãe	Habilitações Literárias Pai/Mãe		Irmãos	Quer ser
André – 1º ano	36	34	Carpinteiro	Empregada fabril	6º Ano	6º Ano	1	Carpinteiro
Mónica – 1º ano	34	32	Empreiteiro	Empregada limpeza	6º Ano	6º Ano	1	Modelo
Teresa – 1º ano	40	37	Pedreiro	Empregada fabril	6º Ano	6º Ano	1	Veterinária
Tomé – 1º ano	29	28	Desempregado	Empregada fabril	9º Ano	9º Ano	1	Mecânico
Vera – 1º ano	34	34	Carteiro	Comerciante	12º Ano	12º Ano	0	Veterinária
Horácio – 4º ano	37	38	Eletricista	Desempregada	9º Ano	12º Ano	1	Arquiteto

José – 4º ano	39	38	Pintor	Doméstica	4º Ano	4º Ano	1	Mecânico
Maria – 4º ano	43	40	Pedreiro	Doméstica	6º Ano	6º Ano	1	Atriz
Sandra – 4º ano	32	29	Empregado balcão	Empregada limpeza	12º Ano	6º Ano	1	Médica

A informação apresentada na Tabela 6 permite compreender melhor alguns aspetos associados ao contexto familiar dos alunos da turma. Os pais são jovens e quase todos apresentam uma ocupação laboral. Em relação às habilitações literárias variam entre o 4.º e o 12.º anos, predominando o 6.º ano de escolaridade.

Os alunos que constituem esta turma são bastante interventivos e participam com entusiasmo nas atividades propostas em todas as áreas. É uma turma heterogénea no que respeita às idades mas também às atitudes, aos comportamentos e ao desenvolvimento cognitivo. O facto de os alunos do 1.º ano se conhecerem desde o tempo de frequência do jardim de infância contribuiu para que se relacionassem e se conhecessem bem, tendo sido bem acolhidos pelos alunos do 4.º ano que evidenciam uma atitude protetora e os ajudam nas tarefas do dia a dia na sala de aula, funcionando quase como tutores. Como são todos da mesma freguesia há uma ligação forte entre todos os alunos o que facilitou muito o trabalho efetuado com os alunos do 1.º ano.

Este estudo realizou-se no âmbito da área da Matemática, tendo sido adaptado ao grupo do 1.º ano, no entanto foi frequentemente alargado a todos, tendo havido muita entreajuda. Para os alunos mais novos, a Matemática foi uma descoberta constante que os uniu na partilha e na procura das soluções dos problemas propostos.

Caracterização dos alunos participantes

O estudo de caso foi construído com base no trabalho desenvolvido pelos alunos do 1.º ano desta turma. Este grupo era constituído por cinco alunos, três meninas (Mónica, Teresa e Vera) e dois meninos (André e Tomé), que frequentaram o jardim de infância juntos durante os três anos que precederam o ingresso no 1.º ciclo. Todos os alunos viviam com os pais na freguesia onde a escola está inserida. Relacionavam-se bem uns com os outros e demonstraram um espírito colaborativo sempre que surgia algum constrangimento na vida diária, tanto na escola como fora dela, o que poderá estar relacionado com a cumplicidade que traziam do ensino pré-escolar. Estão bem integrados na comunidade escolar, são alegres, responsáveis e curiosos. Em geral, todos têm alguém em casa que os ajuda e os apoia nos trabalhos diários e, por norma, ocupam os seus tempos livres a brincar, ver televisão e a jogar computador. Sem exceção, responderam que gostam mais de estar na sala de aula do que em casa. Quando acontecem as pausas letivas é comum perguntarem "quando começam as aulas?". Neste grupo, três alunos (André, Mónica e Teresa) deslocam-se para a escola na carrinha da junta de freguesia, custeada pelos pais, uma aluna (Vera) em carro próprio dos pais e um aluno (Tomé) vem a pé, acompanhado pelo irmão, que também frequenta a escola, e pela avó. Em relação às expectativas e conceções referentes à Matemática revelaram que " é importante para a vida" (Mónica), "é muito importante para se ter uma profissão" (André) e três alunos (Teresa, Tomé e Vera) não emitiram a sua opinião. Estes alunos reconheciam a importância de se ter conhecimentos matemáticos e que estes eram uma mais-valia para a vida como cidadãos, bem como, sujeitos no exercício da sua vida profissional. Os alunos que não emitiram uma opinião por escrito, verbalizaram que era necessário estudar muito para conseguir ter um curso e que a matemática era necessária para fazer "contas".

Devido à turma ter tão poucos alunos no 1.º ano de escolaridade e também à especificidade do problema em estudo, optei pelo trabalho individual na realização das tarefas podendo assim aceder mais facilmente a estratégias pessoais e a possíveis dificuldades. Por outro lado, destaca-se que estes alunos revelaram globalmente uma atitude curiosa e interessada por tudo que fosse novidade e aderiram ao trabalho com grande expectativa e motivação. Tendo apresentado uma descrição generalizada destes cinco alunos, e uma vez que o seu trabalho serviu de base à construção do caso, é também importante fazer um apontamento mais aprofundado sobre cada um deles, apresentando algumas características pessoais e sobre a sua relação com a escola e a Matemática em particular.

O André vive com os pais e o seu irmão mais velho na freguesia onde a escola está inserida. Filho de um carpinteiro e de uma empregada fabril, referiu gostar de um dia ser carpinteiro tal como o pai. O André é um aluno muito simpático, responsável, atento e empenhado. Para ele estudar é "um dever". Quando lhe são colocadas questões, tenta sempre responder e demonstra muita vontade em aprender. Quando não sabe, questiona sempre até obter a resposta pretendida. Nos seus tempos livres gosta de ver televisão (desenhos animados) e de jogar no computador. O André tem uma boa relação com a Matemática e mostra-se motivado quando trabalha a Matemática porque esta tem muitos "jogos divertidos". Este aluno dizia muitas vezes que "quem sabe ler, sabe fazer Matemática".

A Mónica vive com os pais e uma irmã mais velha na freguesia onde estuda. Filha de um empreiteiro e de uma empregada de limpeza, tem por aspiração ser um dia modelo. A Mónica é uma aluna simpática, muito meiga, responsável, atenta e sempre foi olhada pelos colegas com admiração porque interliga os conhecimentos com facilidade e responde com uma certeza espantosa. Para ela estudar é "interessante". Também gosta muito de ajudar os colegas sempre que precisam. Nos seus tempos livres gosta de brincar e ver televisão (desenhos animados). A Mónica demonstra muita curiosidade e um à vontade extraordinário na disciplina de Matemática estabelecendo de uma forma natural conexões entre os conhecimentos adquiridos.

A Teresa vive com os pais e um irmão mais velho na freguesia onde estuda. Filha de um pedreiro e de uma empregada fabril, pretende ser veterinária. A Teresa é uma aluna que apresenta algumas dificuldades em adaptar-se a novas situações, no entanto envida esforços para as ultrapassar. Quando por vezes é contrariada chora mas, passado pouco tempo, normaliza. É uma aluna um pouco tímida mas quando se sente mais à vontade é bastante faladora e um pouco distraída. Para ela estudar é "interessante". Nos seus tempos livres gosta de ver televisão (desenhos animados). A Teresa gosta muito de contar e de fazer grupos de dez elementos, é um dos seus passatempos favoritos. Não sendo uma aluna muito empenhada, diz que gosta de andar na escola para "aprender".

O Tomé vive com os pais e um irmão mais velho na freguesia onde está a escola. O pai está desempregado e a mãe é empregada fabril. Já o Tomé aspira um dia ser mecânico. É um aluno que gosta de trabalhar sozinho e solicita sempre ajuda quando não compreende o que é solicitado. Para ele estudar é “interessante”. Como aluno revela muitas lacunas mas é persistente e trabalhador. Nos seus tempos livres brinca e vê televisão (desenhos animados). O Tomé é um aluno inseguro mas no entanto muito trabalhador, sempre pronto a receber novos desafios, embora nem sempre os consegue terminar. Em relação à Matemática revelou mais facilidade em interiorizar conhecimentos e aplicá-los durante a realização das tarefas.

A Vera vive com os pais na freguesia onde estuda. É filha única. Filha de um carteiro e de uma comerciante, aspira um dia ser veterinária. Esta aluna é muito tímida e insegura, mas ao longo do tempo tem vindo a revelar-se uma aluna aplicada e interessada nas tarefas matemáticas. Para ela estudar é um “dever”. A Vera é uma aluna insegura mas com o evoluir das situações matemáticas foi revelando capacidades que a motivavam a prosseguir. Nos seus tempos livres gosta de brincar e de ver televisão (desenhos animados).

As tarefas

Nesta secção é apresentada uma caracterização das tarefas propostas no estudo, descrevendo a sua estrutura, os objetivos associados a cada uma e os materiais utilizados. A sequência de tarefas selecionadas constitui um conjunto diversificado de propostas que envolvem a procura de padrões e, na maioria das questões, a sua resolução não depende da utilização de um procedimento rotineiro, possibilitando múltiplas abordagens e justificações, facilitando a recolha de um conjunto diversificado de dados. Esta sequência inclui dez tarefas que contemplam objetivos como: continuar e completar sequências, de repetição e de crescimento, numéricas e visuais; identificar e verbalizar regularidades; criar padrões; identificar um determinado padrão noutro contexto; estabelecer generalizações para termos próximos e distantes; e resolver situações problemáticas através da estratégia descobrir um padrão.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) faz referência à utilização de materiais manipuláveis como um recurso indispensável no ensino e aprendizagem da Matemática, porque envolve ativamente os alunos dos primeiros anos de escolaridade, respeitando as diferenças individuais, favorecendo o ritmo particular de aprendizagem de cada aluno, aumentando a motivação. A utilização de materiais facilitou a exploração individual e a interação entre o grupo. O modo como manusearam o material permitiu que os alunos se questionassem e expressassem naturalmente as suas reflexões. De seguida apresentam-se algumas particularidades de cada uma das tarefas aplicadas neste estudo.

Tarefa 1 – Repetições divertidas

Na tarefa 1 (Anexo G) pretende-se que os alunos continuem e completem padrões de repetição, em contextos visuais e numéricos, em diferentes direções, contemplando estruturas como: ABAB, AABAAB, ABBABB e ABCABC. Esta proposta tem um caráter fechado já que apenas se pede aos alunos que completem os espaços em branco. No que respeita aos objetivos de aprendizagem envolvidos, para além de continuar e completar sequências, destacam-se: efetuar contagens; reconhecer a sequência dos números naturais; relacionar termos segundo a sua orientação espacial. Nos casos em que os alunos são motivados a continuar o padrão para a esquerda está ainda em jogo a reversibilidade do pensamento, sendo expectável que manifestem mais dificuldades nestes casos.

Esta tarefa é oportuna para iniciar o estudo empírico dos padrões com alunos do 1.º ano porque é atrativa visualmente e permite que gradualmente interiorizem o conceito de sequência, recorrendo a representações icónicas e simbólicas, bem como à linguagem corrente para verbalizarem o seu raciocínio.

Tarefa 2 – A subir ou a descer?

A tarefa 2 (Anexo H) apresenta algumas semelhanças com a anterior, no entanto o enfoque está agora nos padrões de crescimento. Os alunos devem continuar e completar sequências de crescimento em diferentes contextos, visuais e numéricos. Como a literatura refere que os alunos apresentam mais dificuldades com padrões de crescimento do que com padrões de repetição (Warren, 2000) será importante comparar as reações dos alunos nesta tarefa por comparação com a anterior. Como principais objetivos envolve, entre outros: efetuar contagens; reconhecer a sequência dos números naturais; identificar as sequências dos números pares e dos números ímpares; relacionar termos segundo a sua orientação espacial.

Para continuar cada uma das sequências o aluno terá de recorrer a diferentes tipos de representações, quer icónicas quer simbólicas, identificando a variação que ocorre entre termos consecutivos. Considerando o nível de ensino a que se destina, a forma como pensarem será traduzida pelas suas representações complementadas com argumentos verbais.

Tarefa 3 – Baile de máscaras

A tarefa 3 (Anexo I) tem subjacente um padrão de repetição do tipo ABAB. Trata-se de uma situação contextualizada, acompanhada da representação visual dos primeiros cinco termos da sequência. As questões apelam à generalização próxima, através da descoberta do termo seguinte, do 9.º termo e do 15.º, mas também à generalização distante sendo solicitado o 30º termo. Pede-se ainda aos alunos que criem o seu próprio padrão com os elementos que têm disponíveis. Deste modo, são identificados como principais objetivos: efetuar contagens; identificar relações numéricas; identificar posições pares e ímpares.

Os alunos terão oportunidade de manipular material concreto, recorrendo à manipulação e colagem de figuras (máscaras) para facilitar a representação e até a visualização da disposição dos elementos da sequência. No entanto, é ainda possível associar cada um dos termos a uma ordem par ou ímpar, atingindo neste caso um nível de abstração superior já que esta relação permite identificar um termo em qualquer posição. Com esta tarefa pretende-se ainda perceber até que ponto os alunos serão capazes de criar padrões e qual o grau de complexidade subjacente a esses padrões.

Tarefa 4 – Convites para a festa

À semelhança da tarefa anterior, a tarefa 4 (Anexo J) envolve também um padrão de repetição desta vez do tipo ABCABC. Trata-se também de uma situação contextualizada, acompanhada da representação visual dos seis primeiros termos da sequência. As questões levam os alunos a continuar padrões, em diferentes direções, abrangendo a generalização próxima, através da descoberta dos três termos seguintes e do 12.º termo, e a generalização distante com a descoberta do 22.º termo. A partir deste problema são integrados objetivos como: efetuar contagens; identificar relações numéricas; reversibilidade do pensamento.

Para resolver esta tarefa os alunos podem manipular as imagens que constituem a sequência e colá-las para facilitar a representação. Os alunos podem ainda associar os termos à respetiva ordem, indicando uma determinada posição sem continuar a sequência, identificando por exemplo grupos de três. As respostas podem ser fundamentadas através de representações icónicas, como as imagens, e simbólicas, complementadas pela comunicação oral.

Tarefa 5 – Jogar com o nome do próprio

A tarefa 5 (Anexo K) tem implícito um padrão de repetição envolvendo as letras do nome próprio do aluno. É uma tarefa que envolve uma representação visual que se prevê atrativa para os alunos. É pedido aos alunos que criem o seu próprio padrão com as letras do nome, continuando a sequência num espaço limitado representado por uma grelha, permitindo que interpretem e explorem as respetivas regularidades. Neste caso é importante comparar as reações dos alunos perante a utilização da grelha, e de que forma condiciona o seu raciocínio, e numa situação em que continuam sequências linearmente. Com a construção deste padrão visual, os alunos poderão desenvolver a capacidade de organizar informação, a criatividade e o sentido estético ao continuarem o padrão, pintando cada letra do seu nome com cor diferente. Os alunos devem ainda ter a perceção da existência de representações diferentes do mesmo padrão, quando os nomes têm o mesmo número de letras.

Tarefa 6 – Números coloridos

Na tarefa 6 (Anexo L) é apresentada uma tabela com os primeiros cem números naturais. Os alunos terão de identificar padrões numéricos associados aos múltiplos de 2, múltiplos de 3, múltiplos de 5 e múltiplos de 10. Essa identificação poderá suscitar uma regularidade que poderá ser visual, já que se solicita que pintem cada uma das sequências e, ao fazer isto, os alunos poderão identificar um padrão associado à disposição visual dos números na tabela.

A resolução desta tarefa permite o reconhecimento de relações numéricas e a sua associação à disposição dos números, sensibilizando os alunos para uma possível exploração e argumentação de caráter visual.

Tarefa 7 – Degrau a degrau

A tarefa 7 (Anexo M) tem implícito um padrão de crescimento, representado por uma sequência de escadas. Será disponibilizado material manipulável (cubos de encaixe) para facilitar a construção dos termos e a identificação da estrutura do padrão.

Esta tarefa envolve, para além da descoberta da regularidade associada ao padrão: contagens, noção de número ímpar e número par, organizar dados em tabelas. Pretende-se que os alunos consigam continuar o padrão, usando o material como recurso, sejam capazes de descrever a estrutura das escadas e estabeleçam uma relação entre o número de degraus e a ordem das escadas, mostrando reversibilidade do pensamento. Os alunos poderão recorrer a diferentes tipos de representações (ativas, icónicas, simbólicas), podendo usar o material em todas as questões, transformar a informação dada visualmente em números identificando uma relação numérica ou até explorar estas relações numa tabela.

Tarefa 8 – Muro organizado

Pode-se afirmar que a tarefa 8 (Anexo N) tem subjacente dois tipos de padrões de crescimento, um visual, representado pela disposição visual dos tijolos, e um numérico, associado à sequência dos números naturais escrita nos tijolos. Na resolução desta tarefa os alunos terão oportunidade de trabalhar com o material *Cuisenaire*, com barras do mesmo comprimento, de forma a facilitar a construção do muro e a representação do mesmo na folha de registo.

Neste caso, os alunos poderão usar um raciocínio de tipo recursivo para determinar os termos solicitados, calculando todos os anteriores, ou identificar uma regra que lhes permita identificar de imediato esses termos.

Tarefa 9 – Saltos de gato

Na tarefa 9 (Anexo O) apresenta-se uma situação problemática que envolve a descoberta de um padrão como principal estratégia de resolução. Os alunos devem identificar diferentes maneiras de decompor o número 5. Para encontrar todas as soluções é imperativo que os alunos usem um raciocínio organizado, encontrando assim um padrão de contagem.

Será referido que poderão utilizar diferentes tipos de estratégias, escolhendo entre fazer cálculos, desenhos, esquemas ou palavras para encontrarem a solução. Desta forma, poderão descobrir o padrão decompondo de forma organizada o número 5 na adição de várias parcelas usando o 1 e o 2, fazendo esquemas representativos dos saltos, possivelmente com cores diferentes, ou até simular os saltos com material concreto.

Tarefa 10 – Abraços amigos

Na tarefa 10 (Anexo P) é proposta outra situação problemática que potencia a descoberta de um padrão. As questões formuladas têm como propósito que os alunos possam estender as relações descobertas para um determinado conjunto a um conjunto maior, identificando e aplicando a regularidade.

Para resolver este problema os alunos poderão utilizar desenhos ou esquemas, materiais para simularem os abraços, dramatizações entre si, listas organizadas ou tabelas, entre outras estratégias Tal como em outras tarefas pretende-se evidenciar a conexão da Matemática com o quotidiano, através de uma situação que facilmente poderia ser vivida pelos alunos.

CAPÍTULO V – ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo é feita uma análise detalhada do trabalho desenvolvido pelos cinco alunos do 1.º ano, durante a resolução das tarefas propostas ao longo do estudo. Optou-se por apresentar esta análise dividida pela sequência de implementação das tarefas, descrevendo pormenorizadamente todas as fases de exploração, as estratégias utilizadas pelos alunos e as dificuldades por eles evidenciadas, considerando, sempre que pertinente, a relevância dos contextos para os raciocínios apresentados.

Tarefa 1 - Repetições divertidas

A tarefa foi implementada da parte da manhã e teve a duração de sensivelmente meia hora. Os alunos estavam sentados, como habitualmente, nas mesas dispostas em forma de U. No início da sessão a câmara de filmar foi colocada num tripé registando toda a atividade, com o foco centrado nos alunos do 1.º ano. A câmara de filmar não os constrangeu nem suscitou comportamentos desadequados, tendo passando despercebida.

O ambiente de sala de aula era de curiosidade porque nunca tinham participado num estudo desta natureza. Para facilitar a introdução da tarefa, foi explorado um texto no dia anterior, intitulado *Os números*, que fazia referência a números que brincavam uns com os outros num jogo da macaca (Anexo Q). As casas do jogo estavam marcadas com desenhos de frutos. Cada fruto representava um número, que era atribuído pelos alunos mediante conhecimento prévio da sequência dos números num jogo da macaca. Na tarefa, da mesma forma, cada símbolo apresentado, representava um número que era repetido ao longo da sequência, permitindo aos alunos identificar o desenho em falta para a completar. Pretendia-se estabelecer uma perspetiva de continuidade bem como a interdisciplinaridade, permitindo aos alunos verificarem que matemática é uma área transversal. Neste dia, depois das rotinas habituais, iniciou-se a aula fazendo uma retrospetiva do dia anterior e fazendo a ponte para a introdução da tarefa, através da exploração do texto. Após esta análise foi apresentada a tarefa que, depois de distribuída pelos alunos e após a escrita da data e do nome, foi lida por mim alínea a alínea.

Nesta primeira tarefa pretendia-se que os alunos continuassem e/ou completassem um conjunto diversificado de sequências de repetição, preenchendo os espaços em branco. Coloquei algumas questões à turma, como: "O que são os espaços em branco?"; "Para que servem?"; "O que significa escrever entre?". Observei atentamente todos os passos dos alunos na resolução da tarefa e como trabalhavam em silêncio. Circulei pela sala de aula para ver se precisavam de alguma orientação, mas não foi necessário.

Analisando o trabalho dos alunos, constatei que observavam cada uma das sequências e verbalizavam os seus elementos para decidir o termo que se seguia ou que se encontrava antes. Apenas uma aluna, a Teresa, revelou dificuldades na última questão, no entanto conseguiu, após alguma insistência, completar a sequência. Na minha opinião, esta situação deveu-se ao facto de ter de continuar a sequência para a esquerda, tendo necessidade de continuar primeiro para a direita e só depois em sentido contrário, o que envolve a reversibilidade do pensamento. Globalmente, os cinco alunos conseguiram reconhecer a estrutura repetitiva dos padrões e completá-los, verbalizando cada um deles de modo a facilitar a identificação dos termos pedidos. Por vezes apontavam com o dedo, sozinhos no seu lugar, para cada um dos elementos para não se perderem, mas não falavam em voz alta. Demonstraram ter interiorizado cada uma das sequências, mencionando a ordem dos termos a serem colocados.

Após a implementação da tarefa, os alunos referiram que gostaram muito de fazer este trabalho e a Mónica disse que foi "muito bonito". No entanto, tenho a destacar que a participação dos alunos na discussão e até ao nível do questionamento não foi significativa, talvez devido ao facto de ainda não estarem habituados a este género de trabalho.

Na parte da tarde realizei as entrevistas com os alunos. Todas as entrevistas foram gravadas em áudio. Os alunos encararam as entrevistas com alguma expectativa mas adaptaram-se bem às circunstâncias e colaboraram. Todos foram entrevistados para que se pudesse perceber a forma como pensaram e as dificuldades que sentiram. Os alunos sentiram-se à vontade na resolução da tarefa, quer nas sequências visuais quer nas sequências não visuais, não tendo sido evidenciadas dificuldades dignas de destaque. Nas sequências em que se pedia que completassem para a esquerda revelaram ter interiorizado a estrutura de cada padrão, tendo começado por analisar o padrão para a direita, aplicando posteriormente a regra em sentido contrário, evidenciando assim, nestes casos, reversibilidade do pensamento.

No dia seguinte realizou-se a discussão da tarefa em grande grupo. Também esta sessão foi gravada, desta feita em vídeo. Comecei por escrever o enunciado no quadro para depois os alunos completarem. Todos os alunos foram ao quadro, cada um na sua vez. Completaram cada sequência e explicaram o porquê de fazerem daquele modo. Depois eu perguntava ao grupo se concordava e se havia outra forma de resolver. Todos opinaram e deram o seu contributo. O André frisou, para que não restassem dúvidas, "é assim que tem de ser feito". Sentiram-se felizes por poderem participar de forma ativa no desenvolvimento deste trabalho.

Os alunos compreenderam facilmente a estrutura dos padrões de repetição apresentados e não evidenciaram dificuldades na sua exploração, facto que pode ser explicado por já terem tido experiências com padrões deste tipo no jardim de infância. A comunicação na sala de aula é um indicador no processo de ensino e aprendizagem e uma condição para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos. Neste sentido, os alunos expressaram-se por escrito aquando da realização da tarefa e oralmente na entrevista e na discussão em grande grupo, facilitando deste modo a compreensão do seu raciocínio. Verifiquei ainda que, à exceção de um caso, os alunos não manifestaram dificuldade em continuar as sequências nos dois sentidos, para a direita ou esquerda revelando conhecimentos já consolidados.

Síntese

Esta tarefa incluía padrões de repetição com estruturas diferentes: padrões do tipo ABAB considerados os mais simples de identificar/explorar; padrões do tipo AABAAB cujo nível de complexidade é superior à estrutura anterior do tipo ABCABC ainda mais complexos para os alunos (Palhares & Mamede, 2002). Apesar de se distinguirem graus de dificuldade distintos aos padrões utilizados na tarefa, os alunos mostraram-se confiantes e responderam positivamente ao desafio proposto, continuando e completando corretamente cada uma das sequências.

As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução desta tarefa passaram pela verbalização de cada sequência, facilitando a identificação da unidade de repetição, a contagem dos elementos envolvidos, apontando com os dedos para cada um deles aquando da verbalização. Por norma, continuaram as sequências para a direita e só depois para a esquerda, invertendo a ordem dos elementos na unidade de repetição.

Em geral, não foram identificadas dificuldades no que refere à exploração das sequências, quer na sua continuação para a direita ou para a esquerda, destacando-se neste último caso a hesitação de apenas uma aluna, também não se destacam dificuldades em padrões com estruturas de complexidade diferente, bem como na natureza dos contextos, visual e não visual.

Na perspetiva de Threlfall (1999) os padrões de repetição devem ser estudados e explorados por alunos no início do ensino básico, começando com sequências com unidades de repetição pequenas e poucos atributos, que podem ir aumentando progressivamente a sua complexidade. Como se pode verificar, a tarefa adequou-se ao grupo que não evidenciou dificuldades de destaque na sua resolução. Explicaram e justificaram verbalmente os seus raciocínios, tendo identificado a estrutura subjacente a cada sequência. Em geral, ao longo deste trabalho, os alunos mostraram-se recetivos e expectantes, participando ativamente no trabalho que lhes foi solicitado.

Tarefa 2 - A subir ou a descer?

A tarefa foi implementada no período da manhã e teve a duração de sensivelmente 40 minutos. Para introduzir a tarefa realizou-se no recreio da escola, no dia anterior, o jogo da dança das cadeiras. A situação foi simulada com todos os alunos para que toda a turma pudesse seguir o jogo e simultaneamente interiorizar o padrão. Selecionou-se este jogo para que observassem que o número de cadeiras ia progressivamente diminuindo à medida que um dos elementos abandonava o jogo. No dia da resolução da tarefa foram relembradas as regras do jogo, tendo sido feita a síntese do que sucedeu. A finalidade do jogo da dança das cadeiras era para que identificassem um padrão de crescimento, associado à ordem decrescente dos números, porque de uma maneira geral os alunos sentiam dificuldade no cálculo mental e na escrita dos números.

Os alunos trabalharam individualmente e a disposição das mesas estava em forma de U. A tarefa foi-lhes apresentada através da leitura por alíneas, conforme a sequência das questões. Perguntei se havia dúvidas, responderam que não. Circulei pela sala de forma a acompanhar o trabalho de cada um dos alunos, tentando analisar se tinham percebido o que se pretendia.

Na primeira questão pretendia-se que os alunos completassem padrões de crescimento, em contexto numérico, preenchendo os espaços em branco. Após a leitura, os alunos mostraram-se agradados e confiantes e passaram logo ao registo. Na alínea a), constataram que a sequência era crescente e na alínea b) era decrescente. Na resolução destas questões utilizaram o cálculo mental, a contagem pelos dedos, falando baixinho como se conversassem com os números. Quando confrontados com estas duas questões da tarefa, os alunos ficaram muito interessados e acharam que seria divertido. A reação às duas alíneas foi semelhante, tendo identificado na alínea a) os números como sendo pares e na b) ímpares, variando por isso de dois em dois. Na entrevista, a Vera salientou o facto de a primeira sequência ser "a crescer de dois em dois" e a segunda ser "sempre menos dois". Na alínea b), desta primeira questão, o Tomé evidenciou algumas dificuldades na identificação do termo que se seguia ao 9. Ele percebeu que os números estavam dispostos por ordem decrescente, no entanto estava a contar mais dois como se fosse crescente, talvez influenciado pela sequência anterior. Quando viu o número cinco é que entendeu que não estava a pensar corretamente, daí ter apagado o que tinha escrito, que era o número onze. Para resolver a tarefa, os alunos observaram os números e contaram, alguns mentalmente, e outros pelos dedos de dois em dois (Vera e Tomé). Observei que ficaram com a noção de ordem, crescente e decrescente, tendo identificado as regularidades.

Na segunda questão foi-lhes pedido para desenharem mais dois elementos em quatro sequências de crescimento, apresentadas em contexto visual. Nesta altura, e depois de ter sido lido o enunciado, a Mónica disse de imediato que ali estava "tudo a crescer". Registei a perspicácia da aluna e a sua destreza de pensamento. A Mónica percebeu instantaneamente que eram padrões de crescimento, mesmo estando apresentados visualmente. Os alunos não revelaram dificuldades na resolução das alíneas apresentadas com exceção da alínea d), na qual evidenciaram dificuldades na reprodução/representação do desenho. Tomando como referência o trabalho da Vera, a aluna apagou por duas vezes as figuras que tinha desenhado, antes de apresentar a resposta final. Na entrevista, ficou bem claro que as dificuldades sentidas pela Vera relacionaram-se com a representação e não com a identificação dos termos:

Professora: Por que apagaste?
Vera: Porque não conseguia desenhar.
Professora: Mas tu sabias o que era pedido?
Vera: Sim.
Professora: Ora, diz o que ias desenhar?
Vera: Ia desenhar primeiro quatro triângulos e depois cinco.
Professora: E depois conseguiste?
Vera: Sim.

Como se pode constatar, esta aluna evidenciou dificuldades na representação dos termos de uma sequência pictórica/visual, assim como o Tomé, no entanto compreenderam a estrutura das mesmas e conseguiram descrever os dois termos seguintes.

Na resolução da alínea b) desta segunda questão, os alunos associaram os símbolos associados a cada termo à sequência dos números naturais o que lhes permitiu continuar o padrão. Destaca-se porém que alguns alunos associaram a representação à disposição convencional dos dados, como o Tomé, e outros preocuparam-se apenas com a quantidade de pintas, como a Teresa.

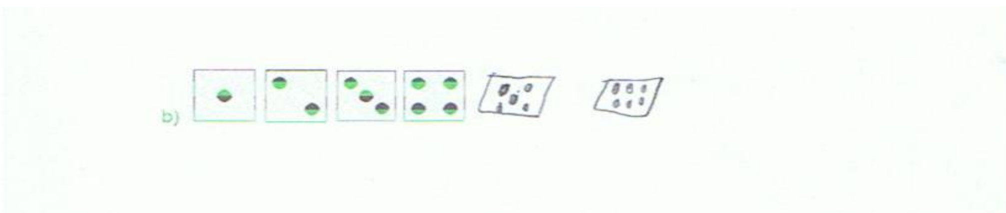


Figura 1. Resolução da questão 2b) pelo Tomé (Tarefa 2).

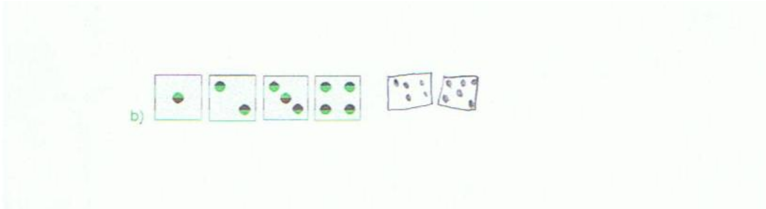


Figura 2. Resolução da questão 2b) pela Teresa (Tarefa 2).

Na 2ª questão da tarefa, ao contrário do que sucedeu na 1ª questão e também na tarefa anterior (Tarefa 1), não foram definidos espaços para representar os termos seguintes. Por essa razão, na alínea c) e para estes alunos o primeiro termo correspondeu a uma estrela e um coração, o segundo termo correspondeu a duas estrelas e dois corações e assim sucessivamente. Nenhum aluno interpretou a sequência de outro modo. Desta forma, para os alunos os dois termos seguintes corresponderam a três estrelas, três corações, quatro estrelas e quatro corações. Todos entenderam o que era pretendido e registaram corretamente o que foi solicitado. Para melhor se perceber a resolução dos alunos, apresentam-se dois exemplos dos trabalhos realizados.

Figura 3. Resolução da questão 2c) pela Mónica (Tarefa 2).

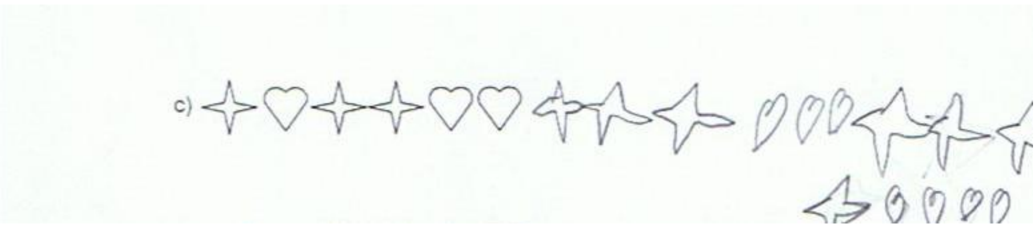


Figura 4. Resolução da questão 2c) pelo André (Tarefa 2).

Tarefas desta natureza, como as tarefas 1 e 2, poderão potenciar a capacidade de generalizar nos alunos, mesmo que para termos próximos.

Professora: No ponto dois, alínea a), depois de desenhares as duas figuras pedidas, quantos elementos teria a figura seguinte?
Tomé: Teria seis.
Professora: Porquê?
Tomé: Porque está a crescer … (silêncio) é mais um [casa].
Professora: E se tivesse mais outra figura, quantos elementos teria?
Tomé: Teria sete.
Professora: Então, diz-me como achas que é a regularidade?
Tomé: É sempre mais um [casa].

O aluno foi capaz de generalizar para termos próximos usando uma regra recursiva, identificando a variação de um termo para o seguinte.

No dia seguinte, ocorreu a discussão em grande grupo que se revelou muito positiva porque os alunos estavam mais expansivos e faladores. O Tomé e a Vera foram os que evidenciaram, de alguma forma, alguma dificuldade no sentido de argumentar o que tinham realizado. A sessão terminou com uma síntese das ideias principais, realizada em conjunto, pela professora e pelos alunos, promovendo o desenvolvimento da comunicação matemática. Relembrou-se o que caracterizava as noções de par e ímpar, como completar sequências prestando atenção ao solicitado e como as representar de forma convencional (no caso dos dados). Nesta tarefa verifiquei que os alunos mobilizaram diversos conhecimentos matemáticos, no entanto alguns revelaram dificuldades na representação icónica, visto que desenhar não fazia parte dos seus hábitos de trabalho mais comuns.

Síntese

Esta tarefa não implicou grandes dificuldades para os alunos. Em geral, conseguiram completar e/ou continuar as sequências efetuando contagens, através dos dedos ou mentalmente, ou identificando a estrutura do padrão pela disposição dos elementos visuais, descobrindo a variação. A dificuldade mais evidente nesta tarefa relacionou-se com a representação de alguns termos de determinadas sequências por terem de obedecer a estruturas visuais mais rígidas. Apesar disso, os contextos visuais foram atrativos para os alunos, contribuindo para a identificação das regras, mesmo que de forma recursiva, já que frequentemente recorreram à sua descrição nas explicações que deram.

Destaca-se que um mesmo padrão pode ser interpretado de modos diferentes pelos alunos, levando a que nem sempre o continuem da mesma maneira, no entanto neste caso não aconteceu.

Apesar desta tarefa envolver padrões de crescimento e de a literatura referir que são cognitivamente mais complexos do que os de repetição (Warren, 2000), não foi aqui evidente que os alunos sentissem essa mudança da tarefa anterior para esta.

Tarefa 3 - Baile de máscaras

A tarefa foi implementada no período da manhã, até ao intervalo, e teve a duração de cerca de 90 minutos. Esta tarefa surgiu no âmbito do trabalho dos alunos para o cortejo carnavalesco do Agrupamento, para o qual tiveram de elaborar máscaras e adereços, tendo como suporte a história infantil *O macaco de rabo cortado*, da autoria de António Torrado. Esta história vinha a ser trabalhada, de forma gradual, nas diferentes áreas curriculares, de acordo com o Plano Nacional de Leitura. Para além dos conteúdos matemáticos a trabalhar na tarefa, pretendia-se também que esta fosse implementada de uma forma lúdica, integrando a época carnavalesca e o ambiente que se vivia na escola.

Nesta sessão os alunos trabalharam individualmente e as mesas de trabalho estavam dispostas, como habitualmente, em forma de U. Foi-lhes disponibilizado material manipulável, em quantidade suficiente, para recortar, manipular e colar no registo das respostas às diferentes questões da tarefa. Os alunos receberam, numa folha, várias imagens correspondentes a máscaras de dois tipos, ursos e homens do espaço, idênticas às do enunciado.

Na alínea a) solicitou-se aos alunos que continuassem o padrão de repetição colando a máscara seguinte. Nenhum dos alunos teve dúvidas na resposta, referindo que primeiro era o urso e depois o homem do espaço, e todos identificaram o padrão como sendo de repetição. Este raciocínio evidenciou-se, por exemplo, na explicação da Mónica:

> Professora: Como sabes que era o homem do espaço?
> Mónica: Vi que a seguir ao urso era o homem do espaço.
> Professora: E se tivesses mais um espaço que imagem vinha a seguir?
> Mónica: Era o urso.
> Professora: Explica então como vês este padrão?
> Mónica: Está sempre a repetir, urso, homem do espaço, urso, homem do espaço.

A Mónica relacionou a posição das máscaras, salientando que máscara se seguia à anterior, verbalizando um padrão do tipo ABAB. Também o André referiu que através da observação conseguia identificar qual era a máscara necessária para continuar o padrão, no entanto apresentou uma argumentação diferente.

Professora: Como chamas a este padrão?
André: É um padrão de repetição.
Professora: Diz-me como fizeste para continuar?
André: Eu vi que o urso é primeiro e é ímpar.
Professora: E o homem do espaço?
André: É sempre par.

O André explicou que ao começar a contar percebeu que o número um é um número ímpar e era o urso, o número dois era o homem do espaço e este número era par e portanto associou sempre número ímpar ao urso e o número par ao homem do espaço.

Na resolução da alínea b) observei diferentes formas de raciocínio. Alunos a contarem um a um por cima das imagens da alínea a), como o Tomé, continuando a sequência até ao 9º termo, que colou no espaço correspondente. A Vera contou apenas as duas primeiras imagens da mesma alínea não tendo usado o material disponível para manipular, o que levou a que colasse a imagem errada. O André foi o único aluno a utilizar o material manipulável de que dispunha para realizar a tarefa. Este aluno copiou a sequência inicial, usando as imagens, e continuou a acrescentar as máscaras que eram necessárias até chegar à imagem pretendida que era a 9ª. A Mónica e a Vera não acertaram esta questão e como as alunas não registaram a resposta em linguagem corrente, questionei-as para perceber como tinham pensado.

Professora: Por que colaste a imagem do homem do espaço? [na alínea b)]
Mónica: Eu já vi que colei mal.
Professora: Porquê?
Mónica: Era o urso. Eu contei mal.
Professora: Explica lá melhor?
Mónica: Porque ao começar a contar nas máscaras da alínea a), eu conto um, dois, três, quatro.
Professora: E porque começas assim?
Mónica: É que o primeiro é ímpar. O nove é ímpar.
Professora: Porque dizes que é número ímpar?
Mónica: Porque termina em 9 e os outros são o sete, o cinco, o três e o um.

Apesar de se ter precipitado na resolução da tarefa, a Mónica revelou, na entrevista, possuir noções de paridade, ao relacionar o tipo de máscara com a ordem que ocupa na sequência. No entanto, na resolução da tarefa não usou esta regra nem se socorreu do material para continuar a sequência, preferindo contar nas imagens acessíveis na primeira questão. Já a Vera evidenciou dificuldades em explicar porque colou a imagem errada na alínea b).

> Professora: Por que colaste esta imagem?
> Vera: (Silêncio) Contei.
> Professora: Contaste! Explica melhor para eu entender?
> Vera: Comecei a contar, um, dois, três, quatro, cinco, seis, … e nove. (Ela contava por cima das imagens da alínea a).
> Professora: E, contaste bem?
> Vera: (Silêncio)
> Professora: Ora conta lá de novo para eu ver melhor?
> Vera: (Começou a contar) Agora dá o homem do espaço.
> Professora: E se fosse no 11º lugar?
> Vera: Era o homem do espaço.

A Vera contou as máscaras da alínea e quando chegou à sexta imagem voltou à primeira continuando a contar sempre seguido. A Vera estava com dificuldades em conseguir descobrir a imagem correta. Não tinha bem a noção da sequência porque como não construiu a sequência inicial, continuando a acrescentar as máscaras seguintes até atingir a nona máscara, errou e sentia-se um pouco desorientada. Na entrevista só com alguma insistência da minha parte, fazendo-a analisar a construção da sequência com o material, é que conseguiu entender a estrutura da sequência. Esta aluna não usou o material manipulável disponível para construir a sequência na sessão de resolução da tarefa.

Na alínea c) a Teresa e o Tomé não acertaram na resposta, que era a máscara do urso. Ambos colaram a máscara do homem do espaço. Ao explicar o modo como pensaram os alunos responderam de forma semelhante.

> Professora: Por que colaste a imagem do homem do espaço?
> Teresa: Porque contei.
> Professora: Explica melhor para eu perceber?
> Teresa: Comecei no urso e depois o homem do espaço.
> Professora: Conta de novo para eu ver?
> Teresa: Um, dois, três, quatro, … treze, catorze, quinze. [usa os dedos]
> Professora: Então, que máscara é?
> Teresa: É o urso.
> Professora: Colaste bem?
> Teresa: Não. Enganei-me a contar.

O Tomé utilizou, para esta alínea, a mesma estratégia que usou nas duas alíneas anteriores, contando por cima das máscaras, induzindo-o em erro, situação que não sucederia se tivesse utilizado o material. O Tomé foi um dos alunos que durante a aula não manuseou o material disponível para trabalhar a sequência. Estes dois alunos apesar de entenderem a noção de número ímpar e par não foram capazes de generalizar e aplicar a regra a esta sequência. O André, apesar de ter identificado inicialmente as posições pares e ímpares e a associação ao tipo de máscara fê-lo apenas localmente, já que voltou a copiar a sequência com o material até à máscara que aparecia em décimo quinto lugar e colou-a no espaço disponível na folha de trabalho. A Mónica e a Vera voltaram a utilizar a mesma estratégia das alíneas anteriores, contando em cima das máscaras da alínea a).

Na alínea d) o termo solicitado é ainda mais distante. A Teresa e o Tomé voltaram a apresentar uma resposta errada. Mais uma vez não usaram o material para responder a esta alínea, voltaram a contar em cima das máscaras da alínea a). Na entrevista copiaram a sequência da alínea a) e depois acrescentaram as máscaras até atingir a trigésima. Verificaram que tinham colado a máscara errada. Apesar de não terem utilizado o material pretendido para chegarem ao resultado, o que seria a estratégia mais prática, conseguiram identificar a máscara correta sem no entanto identificar qualquer tipo de regra. Os restantes alunos aplicaram as estratégias que tinham vindo a usar descobrindo o termo pedido.

Na alínea e) todos os alunos foram capazes de inventar um padrão de repetição que depois foi completado por outro colega, tendo utilizado o material que tinham à sua disposição. Em geral, apresentaram padrões com estruturas diferentes. A Teresa (Figura 5) e o André (Figura 6) inventaram um padrão com máscaras do tipo ABBABB, evidenciando um nível de complexidade razoável.

Figura 5. Resolução da questão 1e) pela Teresa (Tarefa 3).

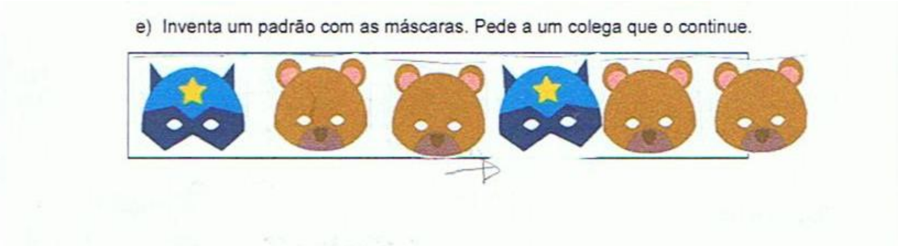


Figura 6. Resolução da questão 1e) pelo André (Tarefa 3).

O Tomé construiu um padrão com uma estrutura algo similar à da Teresa e do André, do tipo AABAAB.

Figura 7. Resolução da questão 1e) pelo Tomé (Tarefa 3).

A Vera criou um padrão com uma estrutura diferente dos anteriores do tipo AABBAABB.

Figura 8. Resolução da questão 1e) pela Vera (Tarefa 3).

O padrão criado pela Mónica foi do tipo ABAB e surgiu por cópia da sequência que observou no enunciado. Para além da estrutura apresentada ser a mais simples (Palhares e Mamede, 2002), a aluna não foi criativa tendo usado a referência que conhecia já do enunciado.

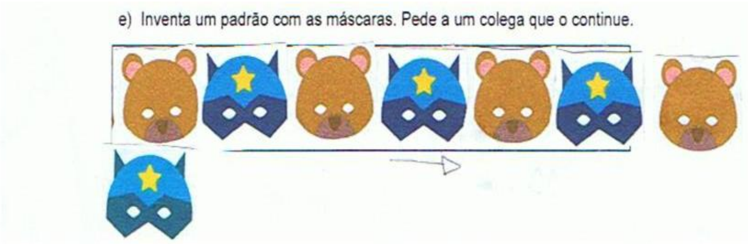


Figura 9. Resolução da questão 1e) pela Mónica (Tarefa 3).

Cada um dos alunos trocou o seu trabalho com outro colega para que este continuasse a sequência iniciada. Todos continuaram as respetivas sequências, colando as máscaras e não evidenciaram dificuldades.

No dia seguinte foi realizada a discussão geral na turma. Neste dia os alunos estavam particularmente recetivos. A Teresa foi das alunas que mais se destacou pela coerência dos seus conhecimentos. Fez a ligação entre as ordens pares e ímpares e as máscaras homem do espaço e urso. Ela generalizou dizendo que sempre que aparecia um número ímpar era a máscara do urso e quando surgia um número par era sempre a máscara do homem do espaço. A aula terminou com uma síntese das principais ideias aprendidas, realizada em conjunto pelo professor e alunos promovendo a comunicação oral. Nesta tarefa foi importante trabalhar conteúdos matemáticos específicos, aliado a uma exploração visual e atrativo com material manipulável, procurando padrões.

Síntese

É importante mencionar que na realização desta tarefa, e para construir a sequência, os alunos dispuseram de material manipulável construído propositadamente para o efeito, no entanto apenas um aluno o utilizou para resolver as diferentes alíneas, tendo-se refletido na resolução da tarefa. Este aluno foi o único a resolver corretamente todas as questões, o que pode indiciar que o recurso ao material poderia ser útil permitindo uma visualização mais concreta da estrutura da sequência.

Apesar de alguns alunos terem identificado uma relação entre as posições ímpares e pares e o tipo de máscara, usaram essa relação apenas localmente, não foram capazes de generalizar para qualquer termo, já que nas suas estratégias privilegiaram um raciocínio de tipo recursivo. Vários alunos recorreram à contagem por cima da sequência de imagens resultantes da resolução da primeira questão. Esta estratégia de contagem conduziu frequentemente ao erro. Mas mesmo com esta estratégia houve quem conseguisse a resposta correta. O material foi também aplicado no sentido recursivo servindo para prolongar a sequência até ao termo solicitado.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos centraram-se em identificar a regra associada a este padrão, o que levou à utilização de estratégias que nem sempre se revelaram adequadas, dificuldades que se tornaram maiores à medida que a ordem do termo aumentava. Nem todos os alunos conseguiram generalizar que uma das máscaras correspondia aos números pares e a outra correspondia aos ímpares no momento da resolução da tarefa. No entanto no período das entrevistas todos eles manifestaram esse entendimento.

Os alunos foram capazes de criar padrões, todos de repetição mas com estrutura e níveis de complexidade diferentes.

As noções de paridade já tinham sido lecionadas anteriormente mas penso que, nesta fase, os alunos não foram capazes de as aplicar neste contexto.

Tarefa 4 - Convites para a festa

A tarefa foi implementada ao início do período da manhã e os alunos trabalharam individualmente. Todos dispunham de material manipulável, correspondente às imagens apresentadas na sequência, em número maior do que necessário, para recortarem, manipularem e colarem. Devo salientar que todos os alunos recorreram ao material disponibilizado na resolução da tarefa. O tema *Carnaval* já vinha a ser trabalhado pela turma, no âmbito da planificação anual, tendo-se aproveitado este facto para contextualizar a tarefa. A sua resolução demorou sensivelmente 90 minutos.

Na alínea a) propunha-se que os alunos continuassem um padrão do tipo ABCABC por mais três termos. Todos o fizeram de forma bem sucedida, colando as respetivas imagens nos devidos lugares, ou seja, bruxa, boneco de neve e abóbora. Na folha de registo apresentada, notei que os alunos analisaram a estrutura da sequência inicial, copiando-a para a mesa de trabalho, colocando as imagens sequencialmente nos respetivos lugares e ao mesmo tempo verbalizavam-na. Os alunos não evidenciaram dificuldades em reproduzir a sequência com este material manipulável e continuá-la. Um dos elementos da turma referiu mesmo que era um padrão de repetição, salientando que contou um a um os seus elementos, viu o que faltava e colou, verificando a sequência no final através da verbalização dos termos, pondo assim em evidência a unidade de repetição.

Na alínea b) solicitava-se que identificassem o símbolo que apareceria em 12º lugar. Nesta alínea, a Mónica contou por cima das imagens que já tinha dispostas e posteriormente continuou até chegar ao número doze. O André fez o mesmo tendo referido que contou as imagens, baixinho, e só de olhar já sabia. Todos os alunos foram bem sucedidos na resolução desta questão tendo apenas como recurso a visualização das imagens, continuando a sequência através de um raciocínio de tipo recursivo. Os alunos copiaram a sequência do enunciado e continuaram-na até ao 12º termo (Figura 10). Posteriormente colaram a imagem do termo encontrado nessa posição na folha de registo e não foram nesta fase capazes de identificar uma regra que os conduzisse à resposta sem recorrer à construção da sequência.

Figura 10. Continuação do padrão até ao 12º termo (Tarefa 4).

Na alínea c) todos os alunos usaram a mesma estratégia, tendo optado novamente por continuar a sequência dispondo as imagens pela ordem suscitada pela estrutura ABCABC. Inicialmente, alguns dos alunos, como a Mónica e a Teresa evidenciaram alguma dificuldade na compreensão do problema proposto. No entanto, o recurso ao material disponível permitiu-lhes visualizar a sequência e perceber o que procurar.

Professora: Quando estavas a resolver esta alínea vi que ficaste aflita. Porquê?
Teresa: Pensei que não sabia fazer.
Professora: E então, como fizeste?
Teresa: Coloquei todas as figuras seguindo a ordem e consegui.
Professora: E tens a certeza que fizeste bem?
Teresa: Contei e tinha sete bonecos de neve e colei-os.

Esta aluna precisou de um reforço positivo porque tinha bloqueado o seu pensamento, com a mudança da estrutura desta questão face às anteriores. Com a manipulação do material e a experimentação venceu a inércia que estava a sentir e foi capaz de compreender o que se procurava descobrir, continuando a sequência até encontrar sete bonecos de neve.

Esta questão em particular poderia suscitar diferentes respostas, dependendo da forma como os alunos interpretassem a unidade de repetição. Obtendo os sete bonecos de neve, poderiam considerar a existência de seis ou de sete abóboras. No entanto, a resposta dada pelos alunos, através da colagem das imagens (bruxa, boneco de neve e abóbora) foi seis abóboras, parando quando atingiram o sétimo boneco de neve. Todos interpretaram da mesma maneira, não sentiram necessidade de completar a unidade de repetição com os três elementos.

Na alínea d) todos conseguiram identificar o elemento que aparecia na 22ª posição da sequência, que era a bruxa, mas não foram capazes de fazer uma previsão, antes de utilizarem o material manipulativo. Dispuseram as imagens, seguindo a estrutura ABCABC, parando no 22º termo. Verificaram então qual era o símbolo nessa posição através da continuação da sequência, não tendo sido capazes de identificar uma regra, tal como tinha sucedido nas questões anteriores.

Professora: Como fizeste para saber a resposta?
Tomé: Contei um a um por cima.
Professora: Então qual é a figura?
Tomé: É a bruxa.

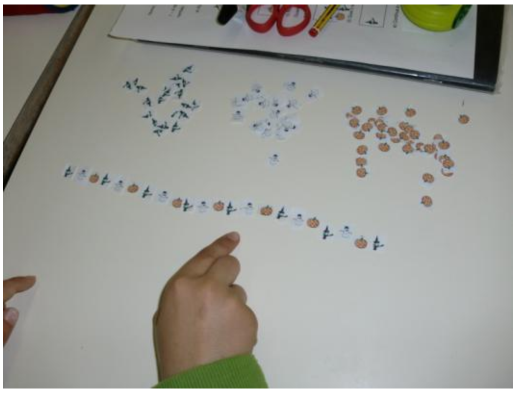


Figura 11. Continuação do padrão até ao 22º termo pelo Tomé (Tarefa 4).

Na alínea e) os alunos evidenciaram diferentes reações e dificuldades. A Vera colocou, nos espaços em branco, as imagens da direita para a esquerda, abóbora, boneco de neve e bruxa e por fim colou-as. Mostrou que tem bem presente a noção de lateralidade e demonstrou reversibilidade do pensamento, ao completar corretamente o padrão para a esquerda interiorizou a estrutura da sequência, mencionando a ordem dos elementos a serem colocados nos espaços, fazendo a leitura ao contrário. A Teresa começou a contar da direita para a esquerda, falando baixinho e apontando as imagens nos respetivos lugares, dispondo-as corretamente, colando-as, à semelhança da Vera. A Mónica revelou algumas dificuldades na distribuição das imagens da direita para a esquerda, acabando por trocar a abóbora pelo boneco de neve. Na entrevista, a aluna não conseguiu explicar o raciocínio utilizado, tendo sido necessário reconstruir a sequência com o material, e com alguma orientação da professora.

Figura 12. Continuação do padrão apresentado para a esquerda pela Mónica (Tarefa 4).

O Tomé e o André começaram da esquerda para a direita, colocando as respetivas imagens nos espaços em branco, bruxa, boneco de neve e abóbora. Voltaram a verificar e a olhar novamente para comprovarem se a sequência estava correta. Por fim colaram as imagens no lugar correspondente. A estratégia privilegiada por estes alunos foi a tentativa e erro, tendo por base o conhecimento que já tinham da estrutura deste padrão.

No dia seguinte promoveu-se uma discussão em grande grupo para que os alunos pudessem expor e debater as suas ideias, verbalizando como se poderia resolver cada alínea, descrevendo a forma como pensaram. Discutiu-se em particular o modo como continuaram o padrão na alínea c), tendo colado a abóbora no final da sequência. O André disse de imediato que só pedia sete bonecos de neve e também não pedia para continuar. Este aluno expressou o pensamento geral da turma, porque efetivamente foi o que todos pensaram. Ao longo da discussão, descobriram outras regularidades que não foram evidentes na sessão anterior. A Teresa concluiu que a abóbora aparecia na sequência de três em três posições. A Vera referiu ainda que umas vezes a abóbora aparecia numa posição ímpar e noutras numa posição par. O André salientou que a abóbora aparecia sempre depois do boneco de neve. A aula terminou com uma síntese das principais ideias que emergiram na exploração desta tarefa, realizada em conjunto pela professora e pelos alunos, promovendo o desenvolvimento da comunicação matemática.

Síntese

Nesta tarefa o material manipulável colocado à disposição dos alunos foi um elemento facilitador para a construção e compreensão da estrutura do padrão. Comparando com a tarefa anterior, neste caso valorizaram a utilidade deste recurso e a sua manipulação e visualização facilitaram o raciocínio. Todos os alunos recorreram ao material manipulável, quer para as generalizações próximas, quer para as mais distantes, os alunos copiaram a sequência desde o início e foram acrescentando as peças necessárias até alcançarem o termo solicitado. Mais uma vez privilegiaram o raciocínio recursivo replicando os elementos da unidade de repetição, sendo incapazes de identificar uma regra que lhes permitisse encontrar de imediato os termos. Pode-se, no entanto, referir que na sessão de discussão em grande grupo foram surgindo alguns contributos por parte dos alunos que reportavam a propriedades matemáticas que poderiam conduzir à formulação de regras explícitas associadas ao processo de generalização.

Tarefa 5 - Jogar com o nome próprio

A tarefa foi implementada, como habitualmente, no início do período da manhã. Os alunos trabalharam individualmente e estavam particularmente ansiosos pois sabiam que tinham mais um desafio para resolver. Revelaram dinamismo e vontade em desempenhar um papel ativo e participativo no processo de ensino e aprendizagem. Para a resolução desta tarefa dispunham de lápis de cor, para colorirem as quadrículas na folha de registo. Pretendia-se que os alunos contactassem com a exploração de padrões em tabelas, evidenciando assim a continuação de sequências num espaço limitado e com mudança de linha.

Na alínea a) os alunos eram convidados a escrever as letras do seu nome nas quadrículas, sempre seguido até preencher completamente a grelha. Perante esta proposta os alunos mostraram-se surpreendidos e ansiosos, dizendo "que nunca tinham feito nada igual". Todos preencheram a grelha, repetindo sequencialmente as letras do seu nome, dando continuidade à sequência sempre que tinham de mudar de linha. Não houve quebras, nem reiniciar da sequência, o que se pode atribuir à conexão que aqui se estabeleceu com o código escrito da Língua Portuguesa. Apesar de ser um tipo de registo diferente do habitual, os alunos compreenderam facilmente o objetivo e preencheram a grelha sem qualquer dificuldade, efetuando o registo linearmente.

Na alínea b) a Teresa e o Tomé não perceberam que era a primeira letra do nome que era para pintar da mesma cor até não ter mais nenhuma igual. Voltei a explicar de novo referindo que era a letra inicial que se pintava da mesma cor e que quando fossem pintar as outras letras do nome, tinham de as colorir com cores diferentes e foi só aí que entenderam e começaram a trabalhar. Os alunos já revelavam expectativas quanto ao que iriam obter, querendo discutir os resultados uns com os outros. A curiosidade e a motivação foram evidentes ao longo desta tarefa, crescendo à medida que resolviam cada alínea.

Na alínea c), ao ser-lhes pedido que identificassem um padrão na grelha, e de acordo com o que observaram na sua folha, o André e o Tomé referiram "é às escadinhas", ideia reforçada na entrevista do André:

> Professora: Explica porque escreveste que "é às escadinhas"?
> André: Porque fica uma letra em baixo e outra em cima mas ao lado.
> Professora: E como vês isso?
> André: Porque repete sempre assim.

A Mónica e a Teresa também afirmaram "é uma escada":

> Professora: Podes-me dizer como ficou o teu padrão?
> Teresa: Ficou uma escada?
> Professora: Porque dizes isso?
> Teresa: Fica sempre uma para baixo.
> Professora: Que aspeto tem ele assim?
> Teresa: Tem o T sempre em escada a descer.
> Professora: Como classificas o teu padrão?
> Teresa: É um padrão de repetição de letras.
> Professora: Explica melhor o que queres dizer?
> Teresa: É o meu nome Teresa que está sempre a repetir.

A aluna queria dizer que as letras do seu nome se repetiam ao longo da grelha e ficavam sempre dispostas na diagonal. Por fim, a Vera descreveu que o padrão "é uma coluna ao alto", já que em cada coluna aparecia sempre a mesma letra. O contexto visual nesta tarefa estimulou a verbalização das ideias e a descrição da estrutura dos padrões em cada grelha. As entrevistas foram cruciais para tentar compreender de forma mais aprofundada algumas destas descrições

Na alínea d) quase todos conseguiram associar o seu padrão com o de outro colega, exceto a Vera que disse que não havia ninguém com um padrão igual ao seu, o que efetivamente era verdade. Para que conseguissem visualizar o trabalho dos colegas, as fichas de trabalho foram dispostas em cima da mesa para que todos pudessem observar o que tinham feito e que estruturas eram iguais. A Mónica e a Teresa referiram que o seu padrão era igual porque os seus nomes tinham o mesmo número de letras (relembra-se que estes nomes são fictícios e podem não corresponder ao número de letras do nome real dos participantes). O André e o Tomé disseram que o padrão deles era igual, no entanto esta situação foi mal avaliada porque o número de letras do nome de um e de outro não é o mesmo. Na entrevista referiram que a sua resposta resultou apenas de olhar e que não contaram as letras, sendo o aspeto visual do padrão formado semelhante. Não é possível colocar aqui o registo gráfico da tarefa dos alunos para proteger o anonimato das crianças. Esta questão permitiu que os alunos se apercebessem da existência de representações diferentes associadas ao mesmo padrão, variando as letras mas não a disposição visual das mesmas.

Na alínea e) solicitou-se que pintassem cada uma das letras diferentes com uma cor específica. A Mónica, o Tomé e o André referiram que o padrão formado era um padrão de repetição, enquanto que a Teresa referiu que na sua tabela estava um padrão colorido e a Vera identificou o seu trabalho como um padrão só não referiu que era de repetição. A Mónica acrescentou ainda que o trabalho "ficou muito colorido" e que era "belo" o que tinha realizado, apelando ao sentido estético da tarefa. Foi muito gratificante verificar que conseguiam escrever o que observavam e que emitiam uma observação por escrito. O André salientou que o trabalho foi muito bonito. Perguntei porquê e respondeu "que dava para escrever e pintar".

No dia seguinte foi realizada a correção e discussão geral na turma. Foi novamente notória a preocupação dos alunos ao preencher a tabela para que não faltasse nenhuma letra do nome e também em não deixar nenhuma quadrícula em branco. Através da partilha de ideias no coletivo, cada um enriqueceu o seu saber e ficou também a conhecer melhor os referentes do outro estabelecendo ligações com o conhecimento matemático. Neste dia os alunos estavam particularmente recetivos à discussão. Nesta tarefa, o desafio era também os alunos reconhecerem que o padrão formado iria depender do número de letras do nome de cada um. Com esta reflexão os alunos desenvolveram a sua autonomia e confiança na participação no seu processo de aprendizagem.

Síntese

Mais uma vez os alunos foram recetivos à tarefa proposta e envolveram-se na descoberta de padrões num contexto diferente dos anteriormente explorados. Esta tarefa destaca-se pelo aspeto visual que atraiu muito os alunos, influenciando o tipo de argumentos que apresentaram. Mostraram-se agradados com o resultado do seu trabalho porque surgiram diferentes tipos de padrões criados com o nome deles.

As maiores dificuldades que os alunos apresentaram incidiram na explicação dos resultados apresentados no final da tarefa e a nível visual tiveram dificuldade em visualizar as diferenças e semelhanças encontradas comparando os seus padrões. Fator relevante para compreenderem que mantendo a estrutura de um padrão podem usar-se representações diferentes. Apesar da dificuldade evidenciada por alguns alunos compreenderam que neste caso essa associação dependia do número de letras dos nomes.

No que refere à exploração dos padrões numa grelha, sendo um espaço limitado poderia motivar a aplicação de diferentes estratégias e a emergência de algumas dificuldades. Os alunos preencheram as quadrículas com o seu nome até ao final da linha e retomavam na linha seguinte continuando a sequência, completando o nome até o terminar, usando uma cor diferente para cada letra do nome. Os alunos não revelaram dificuldade em continuar o padrão neste espaço.

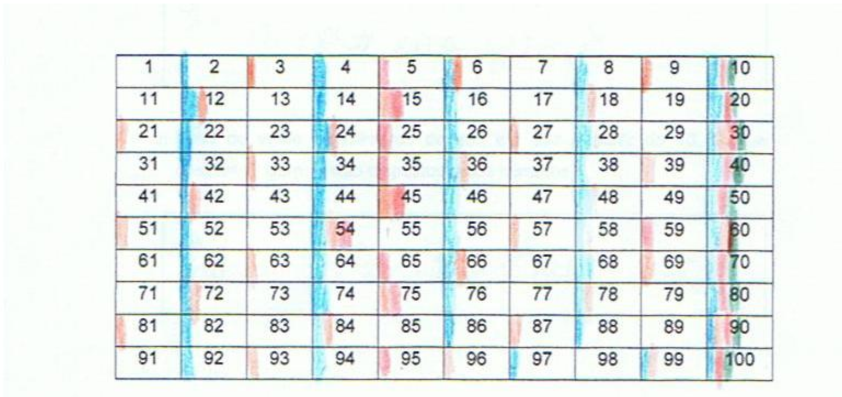
Tarefa 6 - Números coloridos

A tarefa foi implementada no início do período da manhã e os alunos trabalharam individualmente. Todos dispunham de lápis de cor para colorirem as quadrículas da tabela. Mais uma vez estavam na expectativa sobre o que lhes seria pedido na tarefa pois sabiam que certamente teria uma componente de desafio associada. Ao contactar com a tarefa, a Mónica referiu que esta também incluía uma tabela, comparando-a com a tarefa anterior. O Tomé salientou ainda que esta era maior e que tinha “mais quadradinhos”.

Na alínea a) era pedido aos alunos que pintassem de azul os números de dois em dois, a partir do número 2. Todos os alunos foram capazes de preencher a tabela como solicitado exceto o Tomé que no final da tabela contou os números de três em três. Salienta-se no entanto que, em geral, os alunos não encontraram dificuldades no preenchimento da tabela aquando da mudança de linha continuando a sequência solicitada. No caso do Tomé, apesar de ter respondido que os números pintados estavam dispostos em colunas e que eram números pares, errou o preenchimento da última linha porque se enganou na contagem.

Professora: Aqui no 94, se contares mais dois, quanto fica?
Tomé: Fica 96.
Professora: E 96 mais dois?
Tomé: É 98.
Professora: E 98 mais dois?
Tomé: Fica 100.
Professora: Se é assim, porque escreveste outros números?
Tomé: (Silêncio). Enganei-me.
Professora: Explica melhor o que queres dizer?
Tomé: Contei mal pelos dedos.

A identificação da disposição dos números por colunas e do facto de serem pares poderia ter facilitado o preenchimento da tabela por generalização, no entanto o aluno privilegiou a contagem pelos dedos, tendo contado mais um nos dois últimos números antes do número cem.



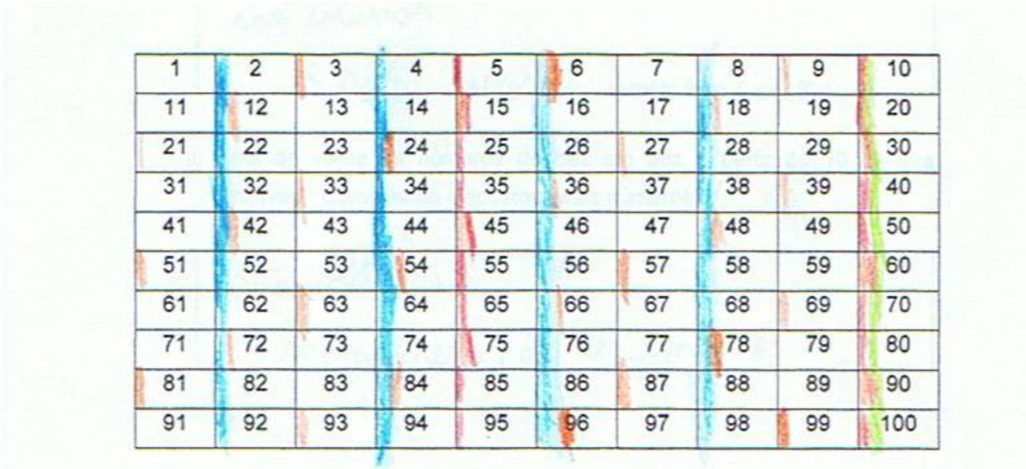
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 13. Tabela preenchida pelo Tomé (Tarefa 6).

A Teresa também se destacou por não ter pintado nesta fase as quadrículas correspondentes aos múltiplos de 10.

Professora: Porque é que não pintaste estas casas?
Teresa: (Silêncio e admirada).
Professora: Porquê, queres responder?
Teresa: Não vi. Esqueci-me.
Professora: Sabes dizer porque te esqueceste?
Teresa: (Silêncio).

A aluna não conseguiu responder à questão, porque possivelmente na altura da resolução não associou os múltiplos de dez à sequência dos números pares, no entanto os dados recolhidos não permitiram assegurar que foi o que efetivamente aconteceu. Depois desta observação notei que ela sabia que teria de pintar os múltiplos de 10 e respondeu que os números pintados eram pares, sendo esta a única aluna que não os identificou na tarefa como sendo números pares.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 14. Tabela preenchida pela Teresa (Tarefa 6).

Nenhum dos alunos se apercebeu durante a resolução que os números pares estavam dispostos em colunas pelo que continuaram a contagem de dois em dois até ao final. Assim a disposição visual dos números na tabela não foi utilizada para facilitar o seu preenchimento.

Na alínea b) pedia-se aos alunos para pintarem os números de três em três, a partir do número três. Nesta alínea todos preencheram a grelha corretamente. Todos, à exceção da Teresa, responderam que observavam os números obtidos dispostos "em escada". Quando se pediu a caracterização deste conjunto acrescentaram que "eram de três em três" e a Teresa escreveu "é aos saltinhos de três em três". Da mesma forma que na alínea anterior não foi utilizada a disposição visual dos números para preenchimento da tabela.

A Mónica reparou que ao pintar com a cor laranja o número seis a quadrícula apresentava duas cores, voltando a salientar a quadrícula doze e as restantes. Foi a única aluna a realçar este pormenor dos múltiplos comuns.

Na alínea c) era solicitado aos alunos que pintassem de vermelho os números de cinco em cinco, a partir do número cinco. O Tomé voltou a errar a contagem, tal como na primeira questão, tendo desta vez acontecido a meio da tabela e na casa "85".

Professora: Conta cinquenta mais cinco?
Tomé: Dá cinquenta e cinco.
Professora: Cinquenta e cinco mais cinco?
Tomé: É sessenta.
Professora: Então porque pintaste a outra casa?
Tomé: Enganei-me.
Professora: Conta oitenta mais cinco?
Tomé: Oitenta e cinco.
Professora: Porque não pintaste a casa?
Tomé: Esqueci-me.

O aluno demonstrou que sabia contar mas precipitou-se e errou ao pintar as casas e teve consciência disso. Para além do Tomé, a Vera também se esqueceu de pintar a quadrícula sessenta. Quanto à disposição destes números surgiram várias descrições: "Os números são às colunas" (Vera); "É uma coluna de cinco em cinco" (André); "São de cinco e em zero" (Tomé); "É de cinco em cinco. Umas vezes é cinco e outras é zero" (Mónica); "São colunas e são números de cinco em cinco" (Teresa).

Ao contrário do observado nas alíneas anteriores a disposição visual dos números em colunas foi uma estratégia utilizada por alguns alunos para a sua identificação em detrimento da contagem dos números de cinco em cinco. É possível identificar argumentos baseados na disposição visual dos números e outros que fazem referência a propriedades dos números.

Na alínea d) os alunos deveriam pintar de verde os números de dez em dez, a partir do número dez. Esta foi a questão que, na minha opinião, menos dificuldades suscitou aos alunos. Todos pintaram as quadrículas corretamente e referiram: "São de dez em dez e são às colunas" (Vera); "É uma coluna ao alto" (André); "São de dez em dez e termina no zero" (Tomé); "É de dez em dez. Uma coluna, é sempre zero" (Mónica); São colunas e são números de dez em dez" (Teresa).

Mais uma vez se destacou o impacto da disposição visual dos números mas também a identificação de propriedades comuns. A maior parte dos alunos identificou que os múltiplos de dez estavam representados na última coluna não tendo recorrido à contagem de dez em dez para resolução da alínea, baseando-se na disposição dos números na coluna.

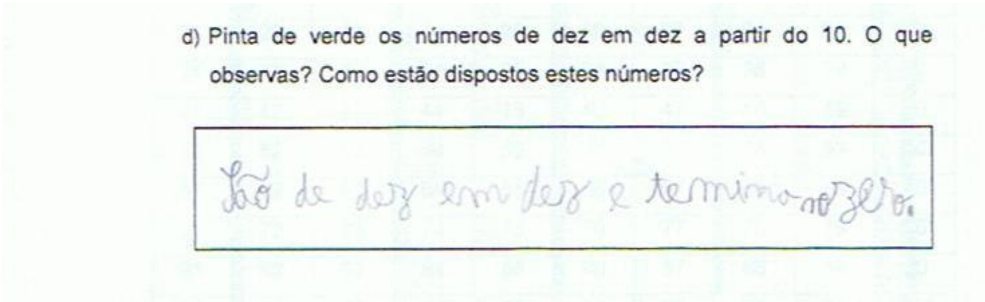


Figura 15. Tabela preenchida pelo Tomé (Tarefa 6).

No dia seguinte realizou-se a discussão geral na turma. No quadro foi desenhada a tabela com os respetivos números nas quadrículas. Os alunos foram um a um pintar, com a cor correspondente. O André resolveu a alínea a) sem recorrer à contagem pelos dedos. Fez mentalmente e salientou que estava a pintar os números pares e que estes terminavam em zero, dois, quatro, seis e oito. Referiu que os números estavam ao alto como se fosse uma coluna. Foi aqui capaz de generalizar. Na alínea b) foi a vez da Teresa pintar os números de três em três. Efetuou a contagem pelos dedos corretamente. Estavam três dedos da mão esquerda separados. Nesta altura de verificação no quadro, a Mónica referiu que nesta contagem os números alternavam entre pares e ímpares. Revelou que tem bem interiorizada a noção de paridade. Na alínea c) foi a Mónica pintar as casinhas da tabela de cinco em cinco. Salientou que os números aqui também eram ímpares e pares. Também informou que o algarismo das unidades terminava umas vezes no número cinco e noutras no zero. Na resolução da tarefa foi a única que referiu estes conhecimentos por escrito. Na alínea d) foi o Tomé ao quadro pintar de verde os números de dez em dez. Referiu que os números ficavam numa coluna e que o algarismo das unidades era sempre o zero. Pintou sempre de seguida sem recorrer à contagem pelos dedos. Ao fazer tudo seguido e sem contar, ele conseguiu generalizar percebendo que estavam dispostos na mesma coluna.

Síntese

Com esta nova tarefa aumentou a predisposição e motivação dos alunos dentro da sala de aula. Globalmente todos os alunos concluíram a tarefa conseguindo ultrapassar as dificuldades sentidas com a implementação das estratégias adequadas. Com o avançar das questões é notória a evolução dos alunos a nível de raciocínio permitindo-lhes chegar a algumas conclusões pertinentes. Nesta tarefa o fator "cor" foi um elemento atrativo e facilitador para o raciocínio dos alunos na exploração da tabela. A discussão geral efetuada no dia seguinte foi um momento de partilha que os ajudou a consolidar conteúdos trabalhados na tarefa. Mais uma vez a oportunidade de trabalharem em tabela lhes permitiu chegar à generalização através da visualização da disposição dos elementos integrando este facto com propriedades numéricas. Os alunos conseguiram ver um padrão para os múltiplos de 2, 3, 5 e 10, dispostos na tabela, referindo também a distinção entre números pares e números ímpares.

Algumas das dificuldades identificadas prenderam-se com erros de contagem ao preencher integralmente a tabela com recurso a esta estratégia. Nestes casos os alunos não foram capazes de generalizar uma regra, aplicando um raciocínio recursivo baseado na variação proposta em cada caso.

Tarefa 7 - Degrau a degrau

Para a realização desta tarefa foi disponibilizado aos alunos material manipulável (cubos de encaixe) com o objetivo de facilitar a construção das escadas. Numa fase inicial, os alunos manipularam livremente o material, mostrando-se agradados e surpreendidos. Os cubos de encaixe eram muito atrativos e apelativos, contribuindo para uma maior motivação dos alunos nesta fase de experimentação (Figura 16). Estavam tão motivados que só falavam no que iriam construir a seguir. Posteriormente mostravam uns aos outros o que tinham construído e comparavam as suas produções.

Figura 16. Manipulação livre dos cubos de encaixe (Tarefa 7).

A tarefa foi proposta no início do período da manhã neste clima de euforia. Os alunos trabalharam individualmente e todos dispunham de vários cubos de encaixe para construírem as escadas da sequência.

Na alínea a) era solicitado aos alunos que construíssem a escada seguinte depois de terem construído as quatro primeiras escadas, observadas no enunciado da tarefa. Na resolução desta alínea os alunos construíram a escada pedida recorrendo aos cubos de encaixe. A reprodução das primeiras quatro escadas com recurso ao material fornecido não suscitou dificuldades aos alunos porque tiveram por base os modelos apresentados no enunciado. A construção dos primeiros termos da sequência tornou mais fácil a compreensão da estrutura do 5º termo, a escada solicitada, tendo todos os alunos sido bem sucedidos nesta descoberta. Todos os alunos iniciaram a construção das escadas de cada termo pela base, contando o número de cubos, decrescendo até ao topo. Para o termo seguinte acrescentavam um cubo a cada nível da escada, tendo referido este facto oralmente, "é sempre mais um em baixo". Só depois tentaram registar no papel.

Alguns alunos sentiram muitas dificuldades na passagem da representação ativa, com o material, para a representação icónica, nomeadamente o André e o Tomé. Estes alunos apagaram várias vezes o seu desenho, tendo conseguido representar a escada na sua folha de registo após várias tentativas. O André inclusivamente escreveu na folha de trabalho "muito difícil desenhar" e o Tomé referiu o mesmo no final da sessão. Os alunos entenderam a questão tendo como única dificuldade o registo da representação icónica. Todos sabiam o que iam desenhar mas o registo tornou-se difícil para os dois alunos acima citados.

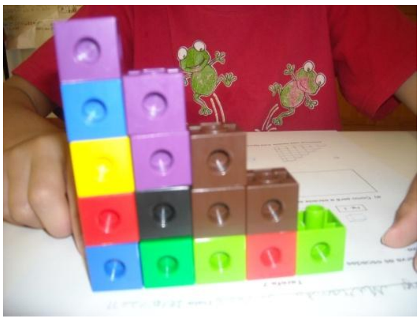
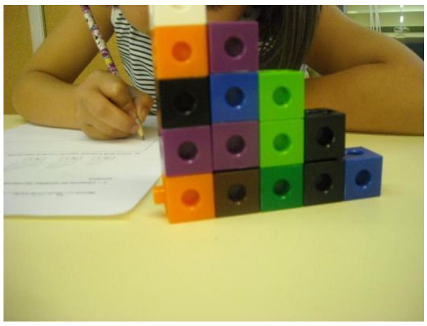



Figura 17. Construção da 5ª escada (Tarefa 7).

Na descrição da escada, na alínea b), o Tomé disse logo de imediato que a figura tinha "seis cubos por baixo, cinco cubos por cima, quatro por cima do cinco, três por cima do quatro, dois por cima do três e um por cima do dois". O aluno referiu que para baixo era sempre a aumentar um. Esta figura tinha vinte e um cubinhos e foi identificada como a figura seis por todos os alunos. O Tomé decompôs a figura em partes disjuntas e aplicou um raciocínio recursivo identificando que seria “sempre mais um” até à base, o que o ajudou nas alíneas seguintes. Por comparação com as escadas anteriores verificou que esta seria a figura seguinte, ou seja, a 6. Os restantes alunos identificaram a figura e quantos cubos tinha, mas não verbalizaram o pensamento durante a sessão de observação, no entanto fizeram-no durante a entrevista individual, descrevendo-a da mesma forma que o Tomé, utilizando uma estratégia com um número decrescente de cubos a partir da base. Nenhum aluno revelou dificuldade nesta fase.

Na resposta à alínea c) verifiquei que todos os alunos recorreram às figuras/construções anteriores, contando os respetivos cubos de forma a preencherem a tabela. Para saberem quantos cubos tinha a sétima escada (Figura 18), construíram-na primeiro com os cubos de encaixe a partir da escada cinco, aumentando os cubos necessários, ou seja duas linhas, uma com seis cubos e outra com sete.

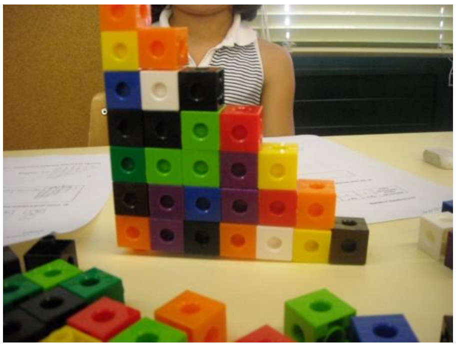


Figura 18. Escada com sete cubos de encaixe na base (Tarefa 7).

Estes alunos evidenciaram raciocínio recursivo ao construir o 7º termo a partir do 5º, revelando que era sempre mais um cubo do que no patamar anterior. Conseguiram compreender o modo como a mudança de ordem influenciava as diferentes figuras. Revelaram-se bem organizados ao utilizarem o material concretizador. A Teresa foi a única que desmanchou a escada cinco e construiu de novo até chegar à escada sete. Nesta alínea não era pedido que desenhassem a figura sete, mas todos o fizeram na folha de registo. Todos os alunos construíram a escada 7 com os cubos para preencherem a tabela. Destaca-se que trabalharam exclusivamente num contexto visual que serviu para efetuarem as contagens. A disposição dos valores na tabela foi encarada como uma forma de registo, sem que contribuísse para a descoberta da variação, em contexto numérico, de um termo para o seguinte.

Na questão seguinte era solicitado que respondessem a que ordem correspondia na sequência uma construção com 36 cubos. A Mónica referiu de imediato que se acrescentava mais uma linha na base com oito cubos, fazendo de seguida a construção para verificar. Os outros alunos também fizeram a construção, contando as peças uma a uma. Voltaram a usar um raciocínio recursivo para fazer uma nova construção, não conseguiram libertar-se do material e identificar uma relação numérica para identificar a escada pedida.

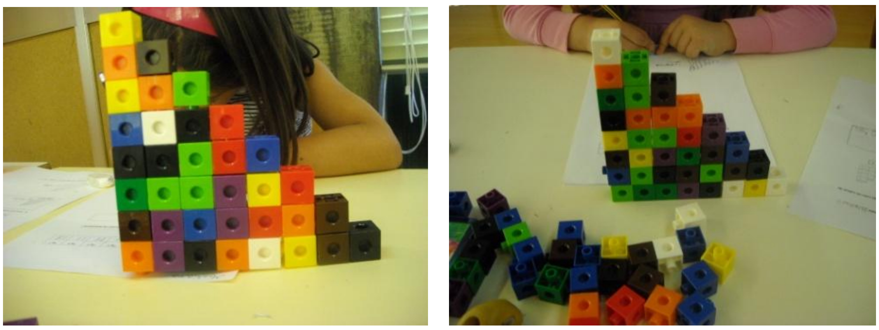


Figura 19. Construção da 8ª escada (Tarefa 7).

Nesta alínea, tal como nas anteriores, também desenharam a figura solicitada. Na entrevista, a Mónica deixou antever a formulação de uma regra para qualquer ordem.

Professora: Explica-me como vês esta figura?
Mónica: Olho para baixo e conto.
Professora: Contas como?
Mónica: Conto a começar por baixo até cima.
Professora: Descreve melhor para eu perceber?
Mónica: Em baixo tem seis, por cima leva cinco, depois são quatro, depois três, a seguir dois e no fim é um.
Professora: E se fosse a figura sete?
Mónica: Olho para baixo e sei que vão ser sete.
Professora: Porquê sete?
Mónica: Porque é sempre mais um, a partir da figura um.
Professora: Porque dizes assim?

Mónica: Porque na figura um tem um por baixo, na dois tem dois, na três tem três, na quatro tem quatro, na cinco tem cinco, na seis tem seis, na sete tem sete e na oito vai ter oito.
Professora: Então como dizes que vai ser a sequência?
Mónica: Por baixo vai ser sempre mais um.

A Mónica identificou uma regra para qualquer escada, como se pode concluir das suas observações, evidenciou perspicácia na observação das figuras, relacionando o número de degraus e a ordem da escada. Os outros alunos já sabiam que na base aumentava mais um cubo e partiam desse pensamento para a construção e contagem dos cubos.

No dia seguinte realizou-se a discussão geral, com todos os alunos a participarem ativamente. Os alunos foram ao quadro desenhar as figuras, explicando como se colocavam os cubinhos uns por cima dos outros até chegar ao último. Os alunos referiram que esta tarefa foi "muito gira" e que gostaram muito de "brincar" com os cubos. Os alunos salientaram que a parte preferida foi a construção das escadas com os cubinhos e não tanto o desenho porque na construção ficava tudo com muitas cores. Referiram ainda que através da construção viam logo o número de cubinhos.

Síntese

Todos os alunos conseguiram concluir de forma bem sucedida as várias questões da tarefa, de uma forma gradual. Alguns alunos revelaram dificuldades na transição para a folha de registo da escada construída com os cubos de encaixe. Esta dificuldade com representação icónica encara-se como normal porque são alunos que ingressaram este ano na escolaridade obrigatória. A tarefa revelou-se muito motivadora e atrativa devido ao material de apoio utilizado. O desenvolvimento da tarefa decorreu num ambiente motivador facilitando o entendimento e resolução das várias alíneas.

As estratégias utilizadas pelos alunos em cada questão revelaram-se adequadas, tendo optado sempre pelo recurso aos cubos de encaixe. Apesar do material ter atuado como um elemento facilitador na resolução da tarefa, os alunos não foram capazes de se libertar da sua utilização o que poderia ter condicionado o seu raciocínio. A maioria evidenciou estratégias recursivas na construção/identificação de cada escada, fazendo esta exploração a partir das que já conheciam, mas apenas uma aluna conseguiu identificar uma relação entre cada escada e a ordem que ocupa.

Tarefa 8 - Muro organizado

Esta tarefa envolve uma sequência numérica cujos termos estão espacialmente distribuídos de forma particular. Para a sua resolução foi disponibilizado material *Cuisenaire* que, numa primeira fase, foi manipulado livremente pelos alunos. Optaram por fazer construções diversificadas, revelando enorme satisfação, não só pelo contacto com o material, mas também porque já previam mais uma tarefa "divertida". Este material não constituía novidade para eles porque já era comum utilizá-lo nas aulas de Matemática. No entanto, mostraram-se agradados com a possibilidade de o poder utilizar pelas suas características apelativas. Nesta tarefa trabalharam só com uma cor, referente ao comprimento dois, que usaram para simbolizar cada tijolo.

Figura 20. Fase de manipulação livre do material Cuisenaire (Tarefa 8).

Na alínea a) todos os alunos usaram a mesma estratégia. Numeraram os tijolos seguindo a ordem crescente da sequência dos números naturais completando, sem dificuldades, os espaços em branco. As mudanças de linha não provocaram qualquer tipo de conflito no raciocínio dos alunos que continuaram a sequência sem problema.

Na alínea b) todos os alunos começaram por fazer a construção do muro com material *Cuisenaire*, com exceção da Teresa, que optou por desenhar, embora depois fizesse a construção para se certificar se tinha feito corretamente. Os restantes usaram a imagem do enunciado como modelo e construíram o muro com mais uma linha. Registaram o muro obtido, desenhando-o na folha do enunciado. Posteriormente numeraram os tijolos na folha, dando continuidade à sequência. Nesta altura a Teresa manifestou-se dizendo que esta tarefa era “parecida com a das escadas”. Na entrevista perguntei-lhe porque disse isto e ela respondeu que no muro, tal como nas escadas, na parte de baixo era sempre mais um tijolo. Nesta situação, a aluna usou um raciocínio recursivo ao evidenciar a variação, em contexto visual, de um muro para o seguinte. Os outros alunos também demonstraram ter compreendido essa relação. A Vera manifestou-se afirmando que “na fila leva seis tijolos porque na cinco tinha cinco e assim tenho que pôr seis”. Os restantes salientaram em geral que a fila “tinha seis tijolos”.

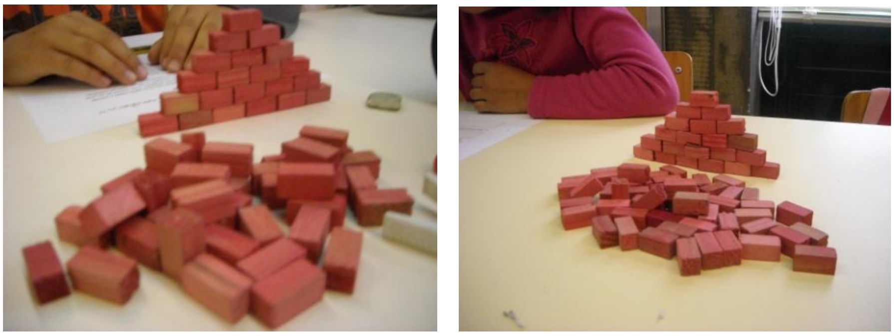


Figura 21. Construção do muro com seis filas (Tarefa 8).

Na alínea c) os alunos contaram, alguns apontando, outros silenciosamente, e responderam que o primeiro tijolo da sexta fila do muro era o número dezasseis. Seguiram a ordem da sequência dos números naturais, ziguezagueando. O André respondeu que era o número dezasseis porque o último tijolo da fila anterior tinha o número quinze. O Tomé escreveu que era o número dezasseis a seguir porque tinha contado as filas todas até chegar à que tinha acabado de construir. Nenhum aluno encontrou uma relação entre os primeiros tijolos de cada fila.

Na alínea d) utilizaram mais uma vez o material *Cuisenaire* na construção do muro, juntando-lhe mais uma fila, com exceção da Teresa que desenhou de imediato na folha do enunciado o tijolo 22 completando a fila. De seguida os restantes alunos registaram o modelo que tinham construído e numeraram os tijolos da sequência.

Figura 22. Construção do muro com sete filas (Tarefa 8).

Nesta alínea e na seguinte, a alínea e), conseguiram responder sem qualquer dificuldade, embora seguindo o mesmo método de contagem linha a linha, tendo identificado a variação na disposição das linhas do muro e a respetiva sequência numérica. Para chegarem ao último número preencheram todos os tijolos.

No final da sessão houve uma apreciação positiva por parte dos alunos acerca da tarefa explorada. O Tomé manifestou-se dizendo "eu gostei de fazer o muro", a Mónica referiu que "foi fácil" e o André também mencionou que "dava para desenhar, construir e escrever".

As entrevistas realizadas aos alunos não vieram acrescentar dados relevantes ao que se tinha passado na aula pelo que pude constatar pelo visionamento da mesma. Os alunos descreveram as representações pictóricas tal e qual já tinham feito na sessão e manifestaram que não tinham sentido dificuldades na sua reprodução. No dia seguinte realizou-se a discussão geral da tarefa havendo de imediato partilha do que tinham feito no dia anterior, referindo-se às construções efetuadas e aos resultados obtidos demonstrando satisfação por terem participado em mais esta tarefa. Como era habitual foram mostrar, individualmente e no quadro, o que tinham conseguido fazer nas diversas alíneas, fomentando o conhecimento e criando condições para a discussão entre eles.

Síntese

Nesta tarefa os alunos já evidenciaram uma maior abertura e à vontade na resolução das questões propostas. Nesta fase, já estavam mais familiarizados com este género de trabalho. Não revelaram dificuldades na representação icónica dos modelos, ao contrário da tarefa anterior. O material foi um elemento facilitador na resolução da tarefa permitindo-lhes manipular e visualizar mais facilmente os muros que tinham de construir e a identificação da variação da disposição das filas e por consequência a evolução da sequência numérica. Este tipo de material também contribuiu para que a tarefa se tornasse atrativa e interessante. Apenas uma aluna se libertou da utilização do material, sendo capaz de efetuar diretamente os registos na folha. O tipo de raciocínio utilizado pelos alunos foi de natureza recursiva, fazendo sempre alusão aos termos anteriores para descobrirem ou construírem os seguintes, através do material, desenhos ou contagens.

Tarefa 9 - Saltos de gato

A tarefa foi implementada depois do intervalo do período da manhã e os alunos trabalharam individualmente, como já era habitual. Mais uma vez revelaram muita curiosidade e entusiasmo perante este novo desafio, tentando perceber o que iria surgir na tarefa. Esta sessão teve uma duração de cerca de quarenta e cinco minutos, na qual os alunos tiveram oportunidade de usar material *Cuisenaire* para facilitar a resolução da situação problemática.

Nesta tarefa foi solicitado aos alunos que resolvessem um problema que envolvia a decomposição do número cinco de diferentes formas, usando os números um e dois, através dos possíveis saltos nos degraus da escada. Depois de feita a leitura em voz alta do enunciado, questionei a turma, perguntando como poderia o Tareco subir os cinco degraus sem saltar para trás, dando saltos de um ou dois degraus. Questionei também se haveria outras formas de ele saltar.

De imediato iniciaram a resolução. A Mónica começou de imediato a contar baixinho pelos dedos da mão esquerda e registava na folha do enunciado. Fez a decomposição do número cinco de forma organizada fixando uma ordem na utilização dos números. No registo da folha de trabalho ia registando as suas hipóteses, verificando a posição de cada número na decomposição. Na entrevista, questionei-a se tinha encontrado todas as hipóteses e respondeu que achava que sim, porque não encontrou mais nenhuma hipótese que desse os cinco degraus. Pedi-lhe que me dissesse como tinha resolvido a questão. Respondeu que ia contando com os dedos de uma mão e que os ia separando consoante a contagem que fazia e que ao mesmo tempo ia registando. A Mónica encontrou todos os casos e utilizou um pensamento organizado e sistemático. Explorou todas as combinações possíveis com os mesmos números, trocando a ordem dos mesmos na adição. Só esta aluna descobriu todas as soluções possíveis. Não utilizou o material *Cuisenaire*, optou por outro tipo de modelo (a mão) para simular os saltos, tendo conseguido visualizar os saltos no modelo pictórico fornecido.

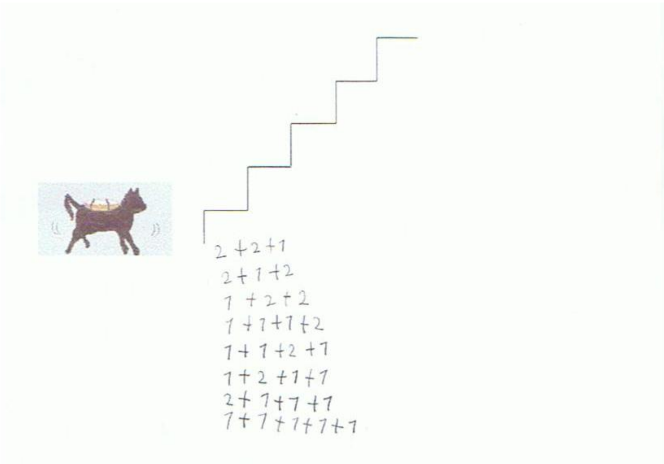


Figura 23. Resolução do problema pela Mónica (Tarefa 9).

A Vera começou por fazer arcos com o lápis de pau, simulando os saltos do gato e ia registando ao lado as expressões numéricas correspondentes, mas revelou dificuldades em concluir a tarefa. Como optou por fazer as representações dos saltos com uma só cor, ficou com um emaranhado de traços sobre os degraus que a impediu de encontrar todas as soluções.

Professora: Explica-me o que fizeste aqui?
Vera: Fiz arcos com o lápis.
Professora: Mas aqui já estão misturados uns com os outros?
Vera: (Silêncio).
Professora: Mas aqui ao lado está um registo numérico. Por que o fizeste?
Vera: Foi para eu contar.
Professora: Contar, explica-me melhor para eu perceber?
Vera: Era para eu contar pelos dedos e fazer a conta.

A Vera queria dizer que graficamente os arquinhos tinham ficado sobrepostos e não os conseguia contar. Então optou por fazer o registo de cada hipótese. A Vera não utilizou uma estratégia organizada e por essa razão não conseguiu identificar todas as possibilidades. Esta aluna, à semelhança da Mónica, também não utilizou o material disponível, usando antes uma representação pictórica.

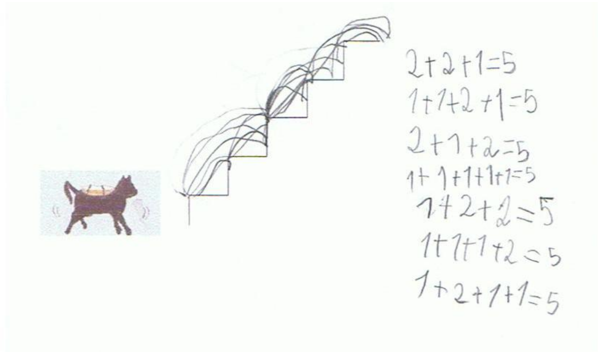


Figura 24. Resolução do problema pela Vera (Tarefa 9).

O André começou por manipular o material *Cuisenaire* fazendo vários agrupamentos e, de seguida, ia registando na folha os resultados alcançados. Esta estratégia foi útil até certa altura, porque depois acabou por se perder por não fazer uma exploração organizada das combinações. De repente abandonou esta estratégia, resolveu pegar em lápis de cor e representar os saltinhos na escada de acordo com o registo numérico que já tinha feito. Mas não acrescentou mais, justificando que não sabia mais.

Professora: Porque arrumaste o material *Cuisenaire*?
André: Porque não estava a conseguir.
Professora: Explica-me melhor?
André: Porque queria fazer de outra maneira.
Professora: E conseguiste?
André: Fiz o que tinha aqui (apontou o registo ao lado).
Professora: Achas que acabaste as hipóteses todas?
André: (Silêncio) Não sei mais.

O André revelou muita dificuldade em continuar e não encontrou todas as possibilidades. Só identificou cinco hipóteses, que começou por apresentar de forma organizada mas depois perdeu a linha de raciocínio. Ele pensou que já tinha encontrado todas as maneiras de decompor o número cinco, mas não encontrou forma de fundamentar essa conjetura.

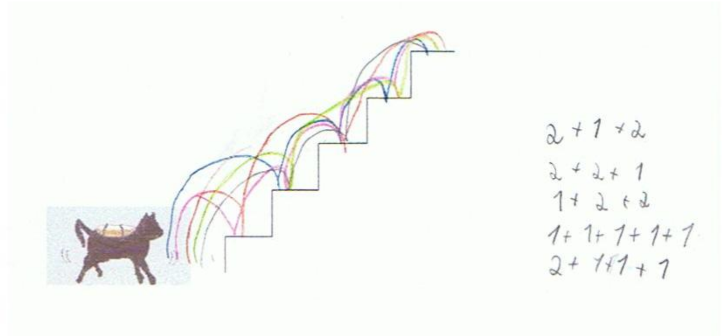


Figura 25. Resolução do problema pelo André (Tarefa 9).

O Tomé foi outro aluno que revelou algumas dificuldades, tendo identificado apenas 5 hipóteses. Inicialmente começou por manipular o material *Cuisenaire* criando alguns agrupamentos, que não registava e não sabia se estavam corretos. Seguidamente abandonou este método para utilizar os lápis de cor, para fazer os saltinhos às cores sobre os degraus da escada, e registava na folha ao lado, ao mesmo tempo que fazia um registo das expressões numéricas, no entanto não concluiu. Na entrevista o aluno mostrou-se bastante confuso, não conseguindo responder ao solicitado.

Professora: Porque deixaste de usar o material *Cuisenaire*?
Tomé: Porque não consigo.
Professora: Porque não consegues?
Tomé: Não consigo pensar.
Professora: Porque utilizaste os lápis?
Tomé: Porque assim faço os saltinhos.
Professora: Conseguiste fazer todos os saltos?
Tomé: (Silêncio)

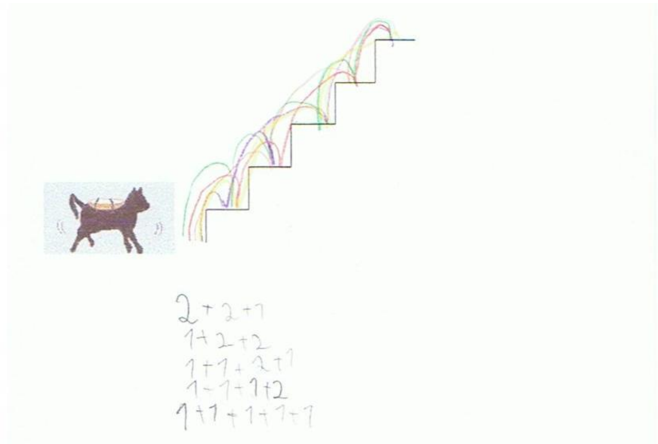


Figura 26. Resolução da questão problemática pelo Tomé (Tarefa 9).

A Teresa também não conseguiu encontrar as 8 soluções. Apresentou um raciocínio pouco organizado, situação que poderá ter dificultado a identificação de mais hipóteses. O facto de não ter usado o desenho e um raciocínio organizado fez com que encontrasse casos que não eram adequados. Esta aluna mostrou-se demasiado confusa não conseguindo perceber o que era solicitado e não conseguiu fazer um registo adequado, daí ter encontrado mais hipóteses que não estavam contempladas. Eu solicitei que fizesse o registo numérico de novo, para que o seu raciocínio fosse percetível. Esta aluna foi a que mais dificuldades revelou na apresentação do resultado.

Professora: Porque não usaste o material *Cuisenaire*?
Teresa: Porque não quis.
Professora: Porquê?
Teresa: (Não respondeu).
Professora: Explica-me porque não utilizaste os lápis de cor?
Teresa: Porque não quis.
Professora: Porquê?
Teresa: Fiz com os dedos.
Professora: Porquê?
Teresa: Porque conto melhor.

A Teresa revelou desinteresse pelo material apresentado para a resolução do problema, achando mais útil usar os dedos da mão. A estratégia escolhida pela aluna não foi a mais adequada, tendo apresentado erros de contagem e repetido soluções, e os seus registos revelam um pensamento desorganizado, entrave à descoberta de um padrão.

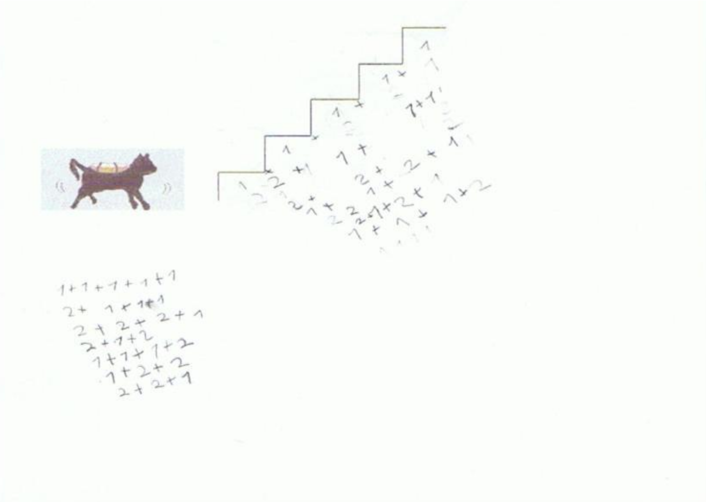


Figura 27. Resolução do problema pela Teresa (Tarefa 9).

Na discussão geral os alunos já se manifestavam sobre o que tinham feito e queriam partilhar as suas descobertas. No quadro foi desenhada a escada com o gato pronto para saltar. Nesta altura, o André pronunciou-se dizendo que "podia começar a saltar de um em um". Pedi-lhe que fosse então ao quadro fazer esse registo. De seguida, fez outro já incluindo o número dois. Questionei-o porque fazia assim. Respondeu que com o número um já não havia mais e que tinha de "meter" agora o número dois. A Mónica e o Tomé responderam que havia mais hipóteses com o número dois. Estes alunos foram ao quadro fazer o registo sugerido por eles. A Teresa foi registar outra hipótese que ainda incluía o número dois. A Vera e a Mónica terminaram a decomposição do número cinco. De seguida, fizeram na escada os saltos do gato Tareco com diferentes cores. Salientaram que assim viam melhor as possibilidades, ajudando-os na compreensão do problema e que ficava colorido.

Síntese

Na fase inicial de exploração da tarefa, os alunos utilizaram o material *Cuisenaire*, no entanto abandonaram-no após algumas tentativas, para recorrerem a registos com lápis de cor, que tornavam mais fácil a visualização dos saltos. O recurso a lápis normal e à mão como forma de contagem foram outras estratégias sugeridas pelo trabalho dos alunos. A Mónica foi a única a terminar a tarefa, apresentando uma lista organizada das possíveis hipóteses de saltos do gato Tareco.

As estratégias de resolução utilizadas pelos alunos centraram-se no desenho dos saltos, com cores diferentes e um registo das respetivas expressões numéricas, para facilitar a contagem e expressar o seu raciocínio, e a simulação dos saltos com os dedos da mão. Em geral, os alunos que evidenciaram dificuldades em apresentar todas as decomposições do número cinco usaram um raciocínio que não primou pela sistematização e pela organização, encontrando assim apenas algumas das soluções. Os apoios visuais ajudaram os alunos a descobrir diferentes possibilidades, associando-as a expressões numéricas, no entanto a maioria dos alunos não foi capaz de identificar um padrão nos saltos que assegurasse a descoberta de todos os casos. Nesta tarefa era importante que, independentemente da estratégia a aplicassem de forma sistemática e organizada para reconhecer um padrão nos saltos e na decomposição do número cinco.

Tarefa 10 - Abraços amigos

Esta tarefa foi proposta aos alunos após o intervalo e, tal como nas sessões anteriores, foi distribuída a folha com as questões. Após a leitura da primeira questão, foram questionados sobre como resolver esta situação problemática. A Mónica sugeriu que se abraçassem entre eles, proposta que foi prontamente aceite pelos demais. Colocaram-se em fila quatro alunos e um ficou de fora (Mónica) a contar os abraços. Foi esta aluna que sugeriu que fizessem desse modo e todos concordaram. À medida que se iam abraçando ordenadamente, o André referiu que o último aluno na fila não abraçava ninguém, porque já tinha sido abraçado e já tinham dado os abraços todos. A Mónica contou em voz alta os abraços dados. De seguida, foram para o lugar fazer o respetivo registo de acordo com o que tinham acabado de observar. A Teresa, o Tomé e a Vera elaboraram o seu registo gráfico através de um esquema com setas de diferentes cores. Conforme se abraçaram na dramatização assim registaram por escrito o que tinham feito usando lápis de cor para exemplificarem e apresentaram a expressão numérica referente ao número de abraços dados.

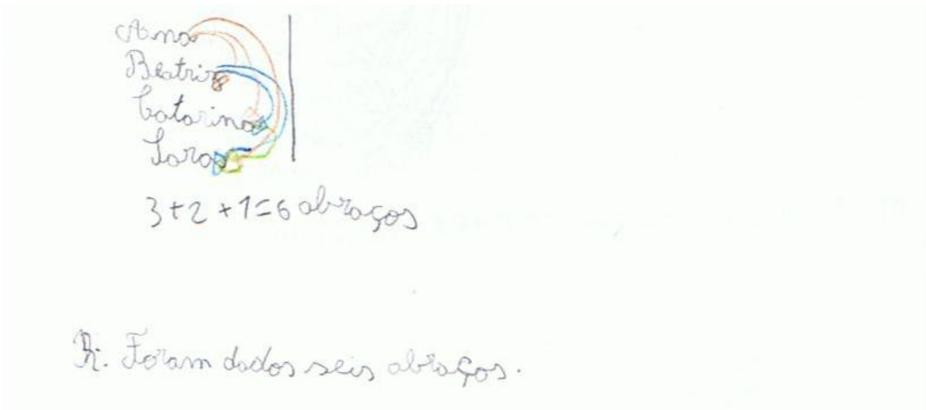


Figura 28. Resolução da questão 1 pela Teresa (Tarefa 10).

Figura 29. Resolução da questão 1 pelo Tomé (Tarefa 10).

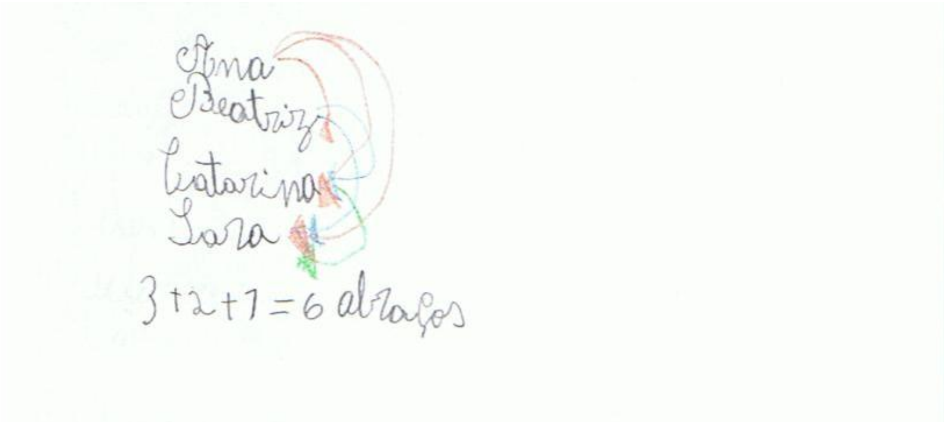


Figura 30. Resolução da questão 1 pela Vera (Tarefa 10).

Já o André apresentou o seu trabalho numa tabela de dupla entrada. Na entrevista referiu que gosta muito de trabalhar com tabelas e que está mais habituado.

Professora: Por que me perguntaste na aula se podias fazer uma tabela?
André: Porque sei fazer tabelas.
Professora: Porquê?
André: O meu irmão ensinou-me a fazer tabelas.
Professora: Ensinou-te como? Como aprendeste?
André: O meu irmão ajuda-me a resolver problemas com tabelas.
Professora: Fazes muitas tarefas que tenham tabelas?
André: Faço com a ajuda do meu irmão.
Professora: O que significa, isto debaixo da tua tabela? [3+2+1= 6]
André: São os abraços dados pelas meninas.
Professora: Explica-me melhor para eu perceber?
André: A Ana dá 3 abraços, a Beatriz dá 2 e a Catarina só dá um.

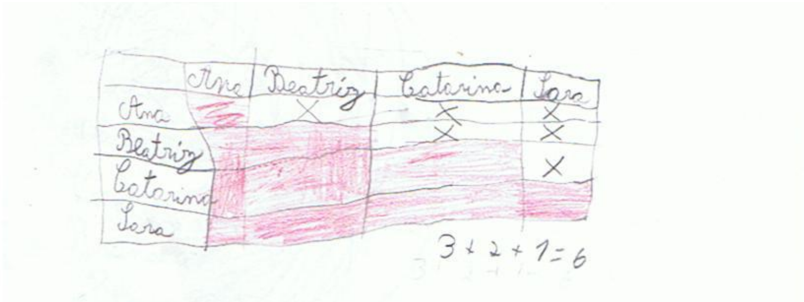


Figura 31. Resolução da questão 1 pelo André (Tarefa 10).

A Mónica fundamentou o seu raciocínio por palavras, registando as diferentes combinações entre as quatro amigas, recorrendo a uma lista organizada.

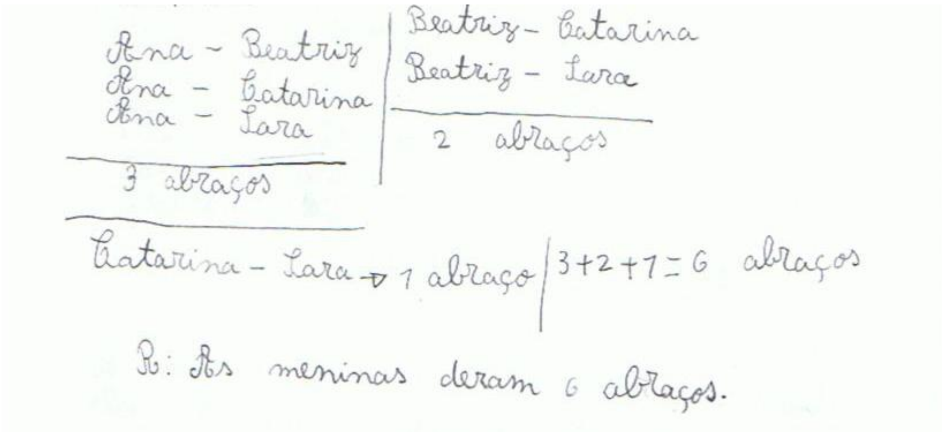


Figura 32. Resolução da questão 1 pela Mónica (Tarefa 10).

Na segunda questão, voltaram todos a colocar-se em fila e desta vez quem contou os abraços foi um aluno do quarto ano, porque era necessário haver cinco alunos para fazer a dramatização. Mais uma vez, após a encenação da situação, voltaram ao seu lugar para efetuar o registo do que observaram e utilizaram estratégias similares às previamente aplicadas. Todos conseguiram chegar à solução. Tal como procederam para a resolução da questão anterior, assim registaram no lugar a sequência dos abraços com os cinco elementos dos alunos do 1º ano.

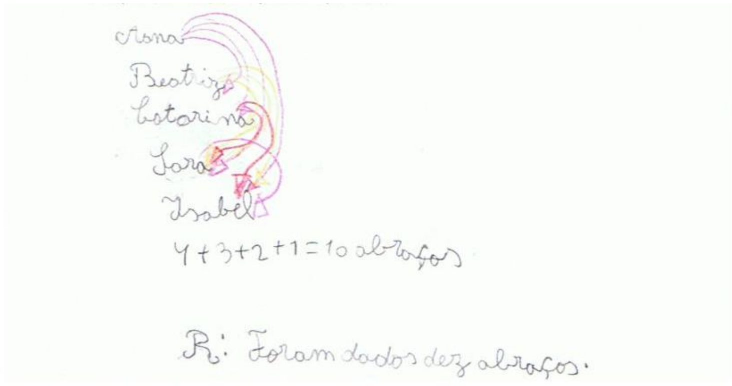


Figura 33. Resolução da questão 2 pela Teresa (Tarefa 10).

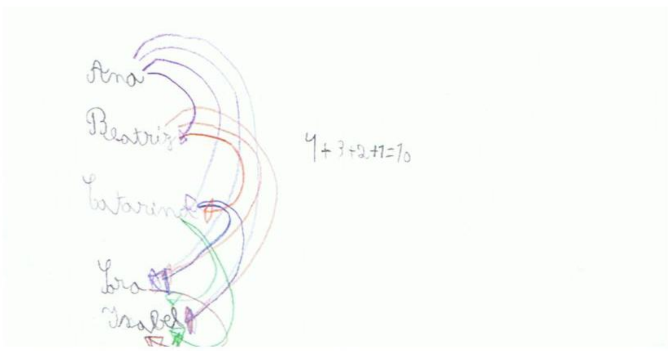


Figura 34. Resolução da questão 2 pelo Tomé (Tarefa 10).

Figura 35. Resolução da questão 2 pela Vera (Tarefa 10).

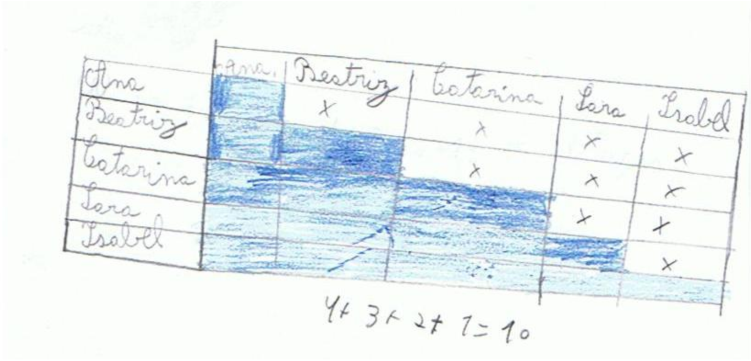


Figura 36. Resolução da questão 2 pelo André (Tarefa 10).

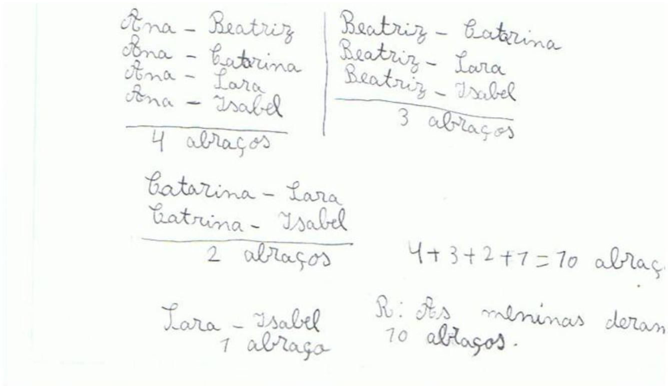


Figura 37. Resolução da questão 2 pela Mónica (Tarefa 10).

Após a resolução das duas primeiras questões os alunos tinham encontrado estratégias adequadas à resolução do problema que adaptaram às duas situações. Nesta fase não tinham ainda conseguido identificar um padrão e generalizar a regra para um número qualquer de amigos.

Na resolução da terceira questão os alunos mantiveram-se no lugar e procederam ao registo do modo como iriam resolver. O número de elementos (dez amigas) tornou algumas estratégias confusas e exaustivas, como a contagem dos abraços por dramatização ou a utilização das cores. Mesmo assim, depois de pensarem na questão que tinha sido apresentada, a Teresa, o Tomé e a Vera voltaram a utilizar o esquema com os lápis de cor, mantendo a estratégia que tinham utilizado nas questões anteriores. O André desta vez não recorreu a uma tabela de dupla entrada mas sim a um esquema similar aos dos colegas. Na entrevista o aluno salientou que não sabia fazer uma tabela com tantos elementos. Questionado acerca da mudança de estratégia, referiu na entrevista que olhou para os colegas e viu que estavam a fazer um esquema e resolveu fazer igual aplicando o seu esquema com várias cores. Alterou a estratégia mas mesmo assim não conseguiu encontrar uma regra, representando a situação pedida para posteriormente contar o número de abraços. O André esquematizou o trabalho com diferentes cores e ordenou a sequência dos abraços por ordem decrescente, como até ali.

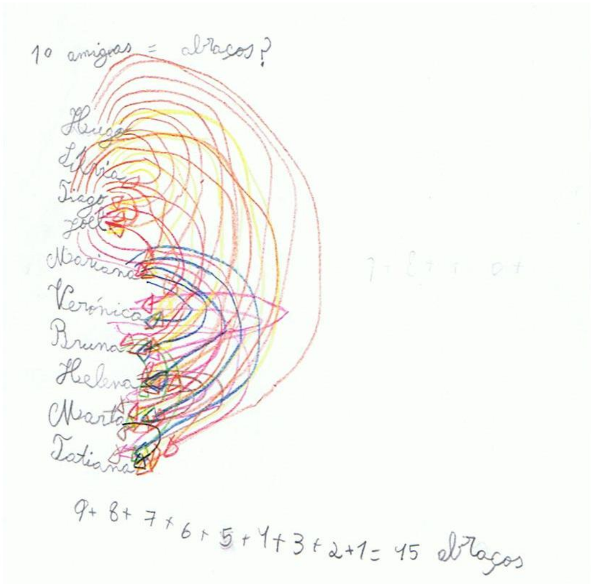


Figura 38. Resolução da questão 3 pelo André (Tarefa 10).

No seu registo a Vera conseguiu apresentar a sequência correta mas apresentou dificuldade em adicionar a quantidade dos abraços dados. Na entrevista a aluna mencionou que contou mal. A Vera demorou algum tempo a conseguir contar corretamente, porque eram muitos números e precisava de estar concentrada. Só conseguiu com ajuda.

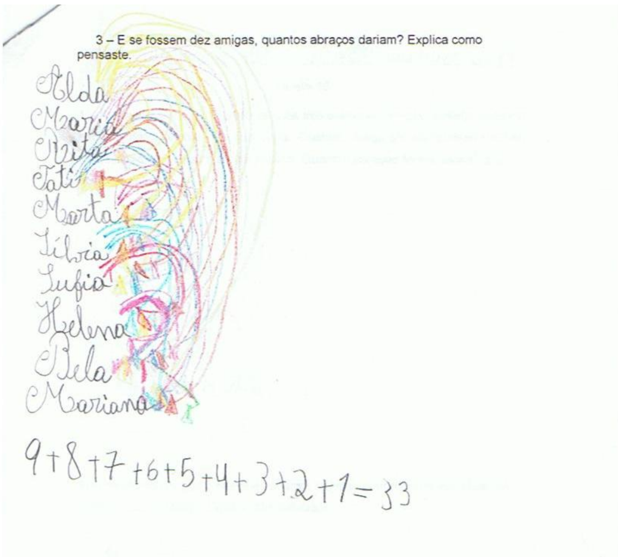


Figura 39. Resolução da questão 3 pela Vera (Tarefa 10).

A Teresa e o Tomé apresentaram um emaranhado de riscos às cores e a expressão numérica que encontraram revelou alguma confusão.

Professora: Explica-me como fizeste?
Teresa: Pus as meninas a dar abraços.
Professora: Mas aqui por baixo do esquema que números são estes?
Teresa: São os abraços.
Professora: Mas quantos abraços dá a Ana?
Teresa: Dá nove.
Professora: Escreveste seis, porquê?
Teresa: (Silêncio).
Professora: E estes números a seguir, o que significam?
Teresa: São os abraços.

A Teresa mostrou-se algo confusa, situação que pode ser atribuída ao diagrama difícil de ler que representou.

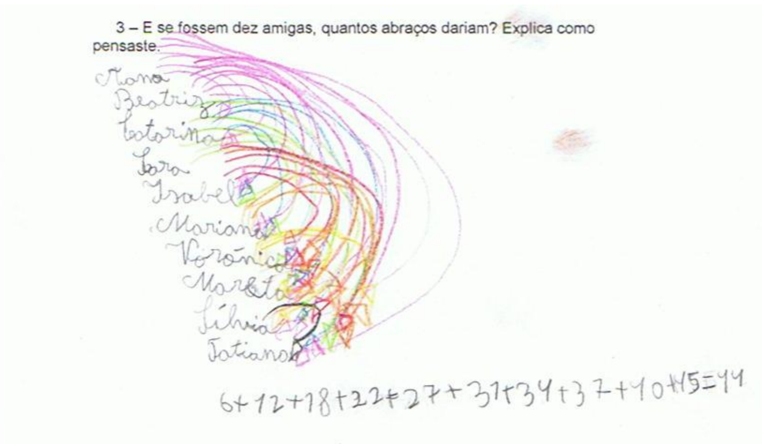


Figura 40. Resolução da questão 3 pela Teresa (Tarefa 10).

Também o Tomé evidenciou dificuldades da mesma natureza da Teresa. O diagrama construído com tantos elementos provocou um conflito de raciocínio.

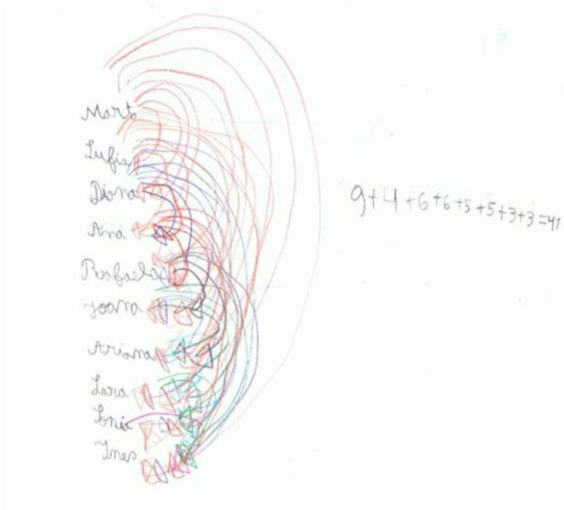


Figura 41. Resolução da questão 3 pelo Tomé (Tarefa 10).

A Mónica conseguiu identificar uma regra derivada das listas organizadas que tinha construído previamente, o que lhe permitiu reconhecer o padrão dos abraços. Apresentou uma sequência numérica que deduziu das explorações anteriores.

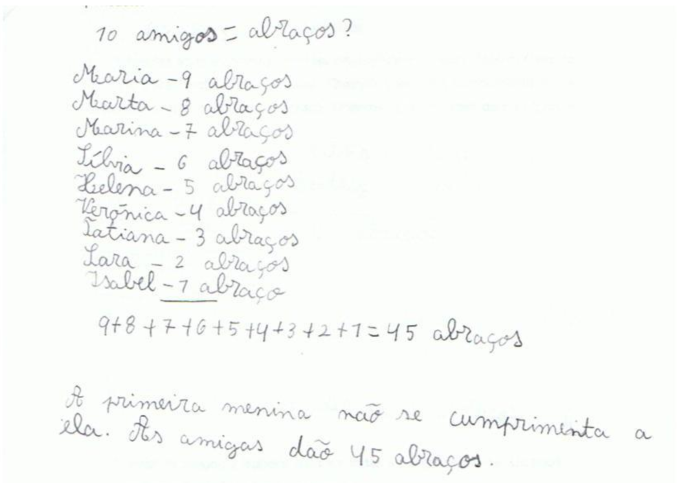


Figura 42. Resolução da questão 3 pela Mónica (Tarefa 10).

No dia seguinte realizou-se a discussão geral com a turma. Os alunos relembraram os abraços dados na primeira parte do problema. Foram ao quadro desenhar. A Teresa fez o esquema com os nomes das meninas com diferentes cores, tal como tinha feito no dia anterior, contou em voz alta e registou numa expressão numérica o número de abraços. O André quis também ir ao quadro e explicou como tinha resolvido e construiu uma tabela de dupla entrada. Seguidamente foi a vez da Mónica e fez tal e qual como tinha resolvido na sua ficha, com o registo dos nomes. Nesta questão puderam concluir que havia diferentes maneiras de chegar à solução do problema. A Mónica ainda salientou que se podia fazer só com números e escreveu no quadro (3+2+1=6). Para a discussão da segunda questão, o Tomé também quis ir ao quadro e fez o esquema que tinha feito na sua folha. A Vera também apresentou a sua versão e desenhou e fez a contagem dos abraços, registando com números. O André voltou a fazer a tabela de dupla entrada explicando que assim ficava visível "quem abraça quem". Mais uma vez a Mónica quis fazer como havia feito e referiu mais uma vez que se podia fazer um registo numérico (4+3+2+1=10). Na terceira questão houve maior discussão porque não conseguiam identificar uma regra, com exceção da Mónica que já a tinha feito no dia anterior. A Mónica foi então ao quadro explicar como tinha resolvido e também representou através de uma expressão numérica. Como eram muitos números e era difícil fazer a contagem usou-se uma reta numérica desenhada no quadro onde puderam fazer os arquinhos como se fossem os abraços das amigas. Foram todos fazer os arquinhos na reta numérica com várias cores diferentes. Por fim contaram oralmente e chegaram à conclusão que as dez amigas davam quarenta e cinco abraços. Esta questão revelou-se difícil para os alunos devido à dificuldade em generalizar com exceção de uma aluna. Na Figura 43 estão representadas fases da contagem dos abraços das amigas.

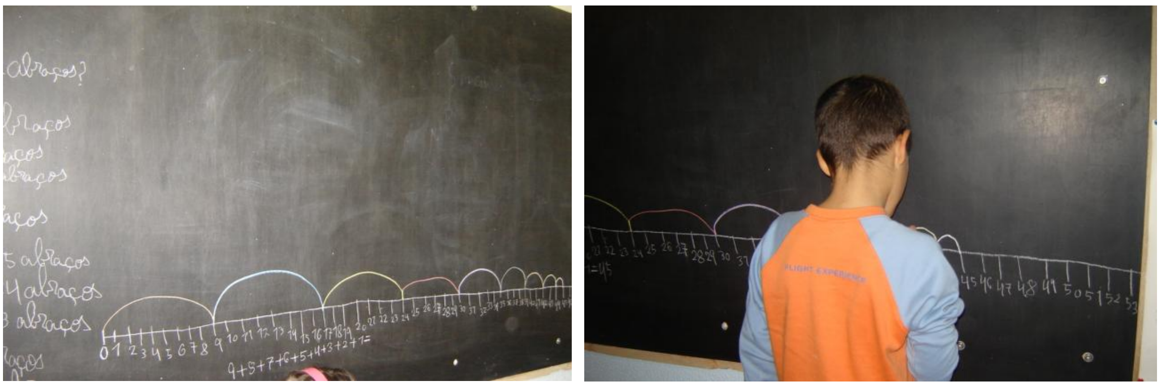


Figura 43. Contagem dos abraços das dez amigas com a reta numérica (Tarefa 10).

Síntese

Na resposta às duas primeiras questões, a realização da dramatização foi uma estratégia ótima no sentido em que facilitou o raciocínio dos alunos, permitindo-lhes criar uma imagem mental da situação, promovendo diferentes formas de registo derivadas das diferentes estratégias que os alunos usaram. No que refere à generalização próxima, na transição de 4 para 5 elementos, os alunos mantiveram as estratégias que tinham escolhido inicialmente. Apesar de todas serem estratégias adequadas, não conseguiram identificar uma regra. Na última questão o aumento do número de pessoas que se abraçavam propiciava a descoberta de uma regra. Neste caso os alunos resolveram a tarefa sem recorrer à dramatização, mantendo as mesmas estratégias que anteriormente utilizaram e com as quais se sentiam seguros, com exceção de um aluno que alterou a sua abordagem. Nem todos foram capazes de chegar à solução neste caso. A complexidade de alguns registos implicou dificuldades de contagem e de identificação de todos os casos. Salienta-se ainda que apenas uma aluna foi capaz de generalizar o cálculo do número de abraços para este caso, derivado da utilização de um raciocínio organizado desde o início da situação problemática.

No término destas tarefas foi com satisfação que vi que estes alunos desenvolveram ainda mais o gosto pela aprendizagem da Matemática, que acham ”fascinante” .

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES

Neste capítulo apresenta-se uma síntese do estudo, onde se evidencia o problema e as questões de investigação que nortearam este trabalho, assim como as opções metodológicas. Seguidamente, dá-se enfoque às principais conclusões do estudo, elaborando a discussão em torno das questões delineadas inicialmente. Finalmente é feita uma reflexão sobre o estudo, focando implicações para a prática profissional, sugestões para investigação futura, bem como algumas limitações identificadas nesta investigação.

Síntese do estudo

O estudo desenvolvido teve como principal objetivo analisar o modo como alunos do 1.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a procura de padrões, em diferentes contextos. No âmbito do problema proposto, foram formuladas questões que orientaram este trabalho e que abrangeram diferentes dimensões desta problemática. Pretendeu-se então dar resposta às seguintes questões de investigação:

1) Como se caracterizam as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos?
2) Que dificuldades apresentam os alunos na resolução deste tipo de problemas?
3) Qual o impacto dos contextos no desempenho dos alunos?

Foi analisado, de forma detalhada, o trabalho desenvolvido por uma turma do 1º ano de escolaridade, seguindo uma proposta pedagógica, constituída por um conjunto de dez tarefas, desenhada para o grupo de alunos participantes. Este estudo foi desenvolvido ao longo do ano letivo 2010/2011, num contexto em que a investigadora era também professora da turma.

No que refere às opções metodológicas, a escolha recaiu sobre uma metodologia de natureza qualitativa, incidindo num *design* de estudo de caso, construído a partir do trabalho desenvolvido pelos alunos do 1.º ano que constituíam a turma. Na recolha de dados foram utilizados procedimentos como entrevistas semiestruturadas, observação participante, gravações áudio e vídeo das sessões de implementação das tarefas e das entrevistas, e o acesso a vários tipos de documentos.

A proposta pedagógica formulada para este estudo teve como enquadramento a problemática que se pretendia investigar, seguindo as orientações do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) e complementada pela revisão de literatura efetuada. Esta proposta integrou o desenvolvimento de dez tarefas adaptadas de documentos curriculares e de publicações no âmbito da Didática da Matemática. O principal critério para a seleção das tarefas implementadas foi garantir a diversidade de contextos relacionados com a exploração de padrões, desde sequências de repetição e de crescimento, a problemas de processo, privilegiando situações visuais e numéricas. Estas tarefas foram propostas no contexto da aula de Matemática e resolvidas individualmente por todos os alunos.

Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas com padrões

No presente trabalho verificou-se que estes alunos do 1.º ano aplicaram, ao longo do estudo, diferentes estratégias como recurso para resolverem as tarefas implementadas. Dependendo da estrutura da tarefa (sequências de repetição, sequências de crescimento, sequências em espaços limitados, problemas de processo que conduzem à descoberta de um padrão), o tipo de estratégias utilizadas variou, tendo surgido: verbalização da estrutura da sequência para identificar a unidade de repetição ou a variação, por vezes conjugada com o apontar com o dedo sobre os elementos da sequência; contagens (pelos dedos ou cálculo mental); tentativa e erro; modelação com material manipulável; dramatização; utilização de tabelas; realização de desenhos ou esquemas; utilização de uma lista organizada. Globalmente deram preferência a estratégias de natureza recursiva, analisando as situações de repetição ou mudança localmente, incidindo sobre os termos da sequência solicitados ou sobre termos consecutivos (Orton, 1999; NCTM, 2007). Reconhece-se que os alunos apreendem a natureza recursiva de um padrão com relativa facilidade, mas têm alguma dificuldade em ir além desse reconhecimento, ou não sentem necessidade de testar as suas conjeturas e de procurar uma estratégia mais eficaz, que os conduza mais facilmente à descoberta da regra geral de formação do padrão (Alvarenga, 2006). A verbalização da estrutura das sequências e a realização de contagens, com base em modelos concretos, foram as estratégias privilegiadas no trabalho destes alunos, aplicadas maioritariamente na resolução de questões de generalização próxima, tal como é referido na literatura (Stacey, 1989, referida por Barbosa, 2010), no entanto, em alguns casos, também foram utilizadas para descobrir termos de ordens superiores.

Nas tarefas *Baile de máscaras*, *Convites para a festa* (sequências de repetição) *Degrau a degrau* (sequência de crescimento), para além das estratégias previamente referidas, evidenciou-se ainda o recurso a material manipulável para continuar o padrão, modelando deste modo a respetiva estrutura, e também o desenho, no último caso, para representar a variação do muro.

A estratégia tentativa e erro foi utilizada nas tarefas *Repetições divertidas* e *Convites para a festa*, quando os alunos estavam perante situações que provocavam a reversibilidade do pensamento, ou seja quando tinham de continuar a sequência para a esquerda. Tendo dificuldades em compreender o que sucedia à unidade de repetição, ao inverter a ordem de prolongamento da sequência, experimentaram dispor os elementos numa dada posição, verificando no final se cumpriam a regularidade. Neste tipo de questões, alguns alunos mudaram de estratégia, comparativamente aos casos em que continuaram a sequência para a direita, evidenciando que a reversibilidade do pensamento pode tornar-se um processo mais complexo (Warren & Cooper, 2006).

A exploração de padrões em espaços limitados evidenciada nas tarefas *Jogar com o nome próprio*, *Números coloridos* e *Muro organizado*, através do preenchimento de grelhas ou da distribuição não convencional dos termos de uma sequência, potenciou, em alguns casos, a utilização de material manipulável e o recurso a desenhos mas maioritariamente a verbalização de cada um dos padrões, que foram continuados sequencialmente, ou seja de forma recursiva, sem quebras, ao longo dessas grelhas ou esquemas.

Para resolver os problemas de processo apresentados nas tarefas *Saltos de gato* e *Abraços amigos* os alunos recorreram a estratégias como: modelação através dos dedos, desenhos ou esquemas, contagens, dramatização da situação, organização da informação numa tabela, construção de uma lista organizada. Tendo uma estrutura mais aberta do que as tarefas anteriores, garantiram a emergência de uma maior diversidade de estratégias não rotineiras (Vale & Pimentel, 2004), no entanto nem todos os alunos identificaram um padrão, ou uma relação funcional, ao usarem estas abordagens.

A literatura foca a importância de os alunos serem capazes de aplicar e adaptar diversas estratégias quando resolvem problemas de qualquer tipo (NCTM, 2007), mas, de igual modo, devem compreender as vantagens e as limitações dessas abordagens, avaliando a sua adequação perante as situações que são propostas. Estes alunos recorreram a uma grande diversidade de estratégias, no entanto salienta-se que prevaleceram estratégias recursivas, que são úteis quando se aplicam à descoberta de termos próximos de uma sequência, mas podem revelar-se difíceis de aplicar ou mesmo desadequadas para determinar termos distantes.

Dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas com padrões

Estes alunos não evidenciaram dificuldades significativas ao completar/continuar sequências de repetição e de crescimento e, apesar de os padrões de crescimento serem cognitivamente mais complexos do que os de repetição (Warren, 2000), não foram visíveis diferenças na exploração de uns e outros.

Um dos aspetos deliberadamente contemplados nas tarefas *Repetições divertidas* e *Convites para a festa* foi a continuação de padrões de repetição em diferentes direções, já que o prolongamento de uma sequência para a esquerda pode tornar-se mais difícil para os alunos por implicar a reversibilidade do pensamento (Warren & Cooper, 2006). Alguns dos alunos desta turma foram capazes de completar os padrões numa direção e noutra e de inverter a ordem da unidade de repetição, quando necessário, no entanto destacam-se casos em que se evidenciou um conflito no raciocínio e a sequência não foi completada corretamente e outros em que privilegiaram como estratégia a tentativa e erro, verificando desta forma se a regra se mantinha.

A criação livre de padrões com diferentes níveis de complexidade (Tarefa *Baile de Máscaras*) revelou a compreensão da noção de padrão por parte dos alunos. Foram capazes de construir sequências do tipo ABBABB, AABAAB, AABBAABB, ABAB, evidenciando estruturas com alguma complexidade (Palhares & Mamede, 2002). Apenas uma aluna mostrou algumas dificuldades, limitando-se a copiar a sequência apresentada na tarefa, imitando a estrutura fornecida.

Como já se referiu, os alunos privilegiaram estratégias que tinham subjacente um raciocínio de tipo recursivo o que, em muitas das tarefas, implicou que sentissem dificuldades em generalizar para valores distantes. Estes alunos evidenciaram muitas dificuldades em identificar uma relação funcional, facto que se poderá atribuir ao tipo de abordagens usadas (Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989, referida por Barbosa, 2010). Destaca-se no entanto que, na tarefa *Degrau a degrau*, uma aluna conseguiu relacionar a ordem da escada com a sua estrutura e, na tarefa *Abraços amigos*, foi também capaz de, através de uma lista organizada, identificar a presença de um padrão no número de abraços dados. É ainda relevante referir que estes alunos identificaram propriedades matemáticas que poderiam ter conduzido à identificação de uma regra, à generalização, no entanto fizeram-no apenas localmente, não foram capazes de aplicar essas propriedades a um caso qualquer, como aconteceu na tarefa *Baile de máscaras* ao identificarem o que acontecia nas posições pares e ímpares.

As tarefas *Jogar com o próprio nome*, *Números coloridos* e *Muro organizado* implicavam a exploração de padrões em espaços limitados. Na primeira e na última os alunos não revelaram dificuldades em completar/continuar as sequências nestes contextos, contrariamente ao que refere a literatura (Ventura, 2008, referida por Vale *et al.*, 2011), possivelmente porque uma delas estava associada ao registo do nome e a outra à sequência dos números naturais e daí não ter havido quebras nas sequências. Na tarefa *Números coloridos* destacaram-se algumas dificuldades. Ao privilegiarem a contagem de 2 em 2, de 3 em 3, de 5 em 5 e de 10 em 10, preenchendo integralmente a tabela desta forma, alguns alunos apresentaram erros de contagem, saltando números ou deixando espaços em branco, mostrando não ter refletido sobre as propriedades desses números.

A utilização de um raciocínio sistemático e organizado está frequentemente na base da descoberta de um padrão. O recurso a estratégias como esquemas ou desenhos pouco claros e cheios de informação, a disposição aleatória de elementos ou de expressões numéricas provocaram dificuldades em encontrar uma regra. O desenvolvimento de processos organizados de contagem, a exploração de relações de um modo organizado e sistemático são cruciais na identificação de padrões (Alvarenga, 2006).

Alguns alunos manifestaram dificuldades em explicar, quer oralmente quer por escrito, a forma como pensaram. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) foca a importância da comunicação, nestas duas vertentes, esperando-se que os alunos organizem o seu discurso e os seus registos e que ouçam e interpretem a informação com que são confrontados, aspetos fundamentais no processo de generalização. Sendo alunos do 1.º ano de escolaridade, seria expectável encontrar este tipo de dificuldades. No âmbito da comunicação é também importante fazer referência às representações, fundamentais para a criação de imagens mentais e para a explicitação de raciocínios (NCTM, 2007). Em algumas tarefas os alunos mostraram dificuldades nas representações icónicas, nomeadamente em *A subir ou a descer?* e *Degrau a degrau*, por não terem experiências continuadas neste âmbito, no entanto os materiais manipuláveis usados atuaram frequentemente como elemento facilitador. Aliás, foi visível o resultado negativo, no raciocínio de alguns alunos, da não utilização de material concreto em tarefas como *Baile de Máscaras* tendo usado como referência partes da sequência que generalizaram erradamente. Van de Walle *et al.* (2010) focam a importância do recurso a material manipulável, estruturado ou não estruturado, como meio facilitador da aprendizagem e da construção do conhecimento, contribuindo também para a compreensão das ideias e relações presentes num dado problema.

Impacto dos contextos no desempenho dos alunos

As tarefas propostas neste estudo apresentavam contextos diversificados, desde sequências de repetição, a sequências de crescimento, a problemas de processo, em situações visuais e numéricas. O facto do contexto das tarefas ser, por norma, familiar aos alunos favoreceu também o desenvolvimento das mesmas e tornou-se uma vantagem para a realização do trabalho. Os alunos encontravam-se motivados pois as tarefas estavam frequentemente baseadas em contextos associados a vivências diárias e próximas da sua realidade, suscitando a sua curiosidade. Neste estudo, as tarefas apresentavam vertentes visuais e numéricas com o objetivo de diversificar as abordagens e promover a integração de estratégias diferentes. As representações apresentadas em muitos dos enunciados e a possibilidade de utilização de material concreto na exploração de algumas sequências e situações problemáticas, teve por base a ideia de que a inclusão de um suporte visual conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização e pode contribuir para o mais fácil reconhecimento da estrutura de um padrão, podendo até suscitar o paralelismo entre representações visuais e numéricas (Barbosa, Vale & Palhares, 2008; Stacey, 1989, referida por Barbosa, 2010). Foi evidente ao longo do estudo a utilização de uma variedade de estratégias, quer visuais quer numéricas, independentemente da estrutura da tarefa. Identificou-se, por exemplo nas tarefas *Degrau a degrau* e *Muro organizado*, que o trabalho desenvolvido num contexto visual permitiu que compreendessem mais facilmente a estrutura de cada termo, facto evidenciado nas verbalizações dos alunos. Na tarefa *Saltos de gato* foi notória a associação entre as representações icónicas e ativas, sob a forma de esquemas e através do recurso aos dedos da mão, e as representações simbólicas, sob a forma de expressões numéricas. Por outro lado, as tarefas que envolvem sequências numéricas permitem também reconhecer, descrever, prolongar e criar padrões, e podem ser consideradas um importante precursor da álgebra, potenciando a transição da aritmética para o plano algébrico, através do estudo de propriedades e relações numéricas (NCTM, 2007; Orton, 1999). Apesar de o fazerem num plano ainda elementar, os alunos foram já capazes de identificar relações numéricas, baseadas em conceitos matemáticos já trabalhados, quer de natureza recursiva, quer de tipo relacional, embora de forma menos frequente.

Não foi evidente qualquer diferença no desempenho dos alunos no que refere à exploração de sequências de repetição e de crescimento, tendo sido capazes de identificar, respetivamente, a unidade de repetição e a variação entre termos consecutivos. No entanto, é importante salientar que privilegiaram o raciocínio recursivo que, tal como refere Orton (1999), é frequentemente utilizado pelos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões, facto que poderá fundamentar estes resultados.

Em algumas sequências visuais de crescimento, nomeadamente nas tarefas *A subir ou a descer?* e *Degrau a degrau*, foram manifestadas dificuldades ao nível da reprodução e representação icónica dos termos, no entanto foi percetível, através da verbalização das suas ideias e da manipulação de material, que compreenderam a variação ocorrida de um termo para o seguinte. A dificuldade manifestada pelos alunos relaciona-se com a pouca experiência que têm neste âmbito, indiciando que este aspeto deve ser fomentado nas aulas de Matemática, já que as representações são muito importantes na compreensão, apresentação e fundamentação de ideias matemáticas (NCTM, 2007).

Apesar de algumas situações proporcionarem diferentes hipóteses de interpretação de um padrão, condicionando a forma como é continuado, nas tarefas *A subir ou a descer?* e *Convites para a festa*, estes alunos interpretaram as sequências da mesma maneira, quer no padrão de crescimento do primeiro caso (alínea 2c), quer no padrão de repetição da segunda tarefa mencionada, encarando os elementos da unidade de repetição isoladamente. Houve, no entanto, oportunidade para analisarem e compreenderem a possibilidade de se considerarem diferentes interpretações na discussão em grande grupo. Warren e Cooper (2006) também defendem que na introdução precoce do pensamento algébrico através de padrões para chegar à generalização, os alunos devem ser encorajados a visualizar e explorar os padrões de várias maneiras, aceitando diferentes formas de interpretação, analisando as regras que daí advêm.

Na maioria das tarefas em que puderam recorrer à manipulação de material concreto, conseguiram explorar e descobrir mais facilmente o padrão, salientando-se, neste âmbito, tarefas como *Convites para a festa*, *Degrau a degrau* e *Muro organizado*. Destaca-se que na tarefa *Baile de máscaras*, apesar de terem material à sua disposição, a maioria dos alunos optou por não o utilizar. Nestes casos, as estratégias, essencialmente baseadas em contagens, mostraram-se quase sempre desadequadas, sendo evidente que a componente concreta e visual seria essencial para compreenderem a estrutura do padrão. O apoio de material concreto revela-se uma importante componente no ensino da matemática nos primeiros anos, pois permite aos alunos, através da sua manipulação, compreender mais facilmente conceitos, ideias e relações matemáticos (NCTM, 2007, ME-DGIDC, 2007).

Pelas experiências que têm ao nível da Matemática, estes alunos têm maior propensão para os números do que para aspetos visuais. Este facto foi evidente por exemplo no preenchimento da grelha da tarefa *Números coloridos*. Os alunos usaram essencialmente contagens para identificar os números afetos a cada sequência, tendo reparado apenas no final que estavam dispostos de forma especial na grelha, o que significa que não serviu de estratégia para completar as sequências. Esta situação reforça mais uma vez a influência das experiências prévias dos alunos no seu desempenho, sendo por isso fundamental que os professores proponham tarefas que fomentem não só representações numéricas mas também representações figurativas, quer concretas quer pictóricas (Becker & Rivera, 2005).

Reflexão sobre o estudo

Nesta secção é apresentada uma reflexão sobre o estudo, com base nas principais conclusões e na forma como esta experiência decorreu. A reflexão centra-se em diferentes aspetos: alguns ligados à prática profissional, destacando o papel do professor e dos alunos; na proposta de futuros trabalhos de investigação, associados à temática estudada; e na identificação de limitações do estudo.

Implicações para a prática profissional

Com esta investigação mostrou-se que a resolução de situações problemáticas centradas na exploração de padrões contribuiu para a aprendizagem dos alunos, através da mobilização de múltiplos conceitos matemáticos, e também para a valorização da Matemática, permitindo que os alunos adquirissem uma visão mais positiva desta disciplina, vivenciando novas experiências e desafios. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) posiciona a resolução de problemas num lugar de destaque, enquanto capacidade transversal, e refere que os alunos devem aprofundar, alargar e consolidar o seu conhecimento matemático, abordando uma grande diversidade de tópicos, através da resolução de situações problemáticas, destacando-se as que envolvem a procura de padrões como potenciadoras do raciocínio e do estabelecimento de conexões. O professor deve ter a preocupação de propor tarefas que permitam criar oportunidades para os alunos desenvolverem um raciocínio mais flexível, potenciando a utilização de diferentes estratégias e a compreensão das vantagens do recurso a diversos tipos de representações matemáticas. Foi muito importante e interessante observar a diversidade de estratégias apresentadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas neste estudo, bem como a dinâmica criada na sala de aula. Os momentos de discussão e síntese, foram gradualmente tendo uma participação mais autónoma e ativa por parte dos alunos, revelando-se espaços de partilha e de reflexão onde os alunos verbalizavam as suas ideias e interagiam, com o objetivo de discutir as estratégias adotadas e abordagens alternativas. Apesar de se tratar de um grupo de alunos do 1.º ano de escolaridade a evolução a este nível foi evidente. As tarefas propostas possibilitaram o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos, entre diferentes tipos de representações, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação.

Os resultados deste estudo mostram que os professores devem ter alguns cuidados na formulação das tarefas que propõem no âmbito da resolução de problemas centrados na exploração de padrões. Por exemplo, se houver a pretensão de desenvolver um raciocínio de tipo funcional, a ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis pode condicionar as estratégias utilizadas, se não forem suficientemente distantes, os alunos poderão optar por estratégias recursivas, como sucedeu neste estudo. A escolha dos recursos materiais que se disponibilizam aos alunos é também crucial, podendo atuar como um meio facilitador para a descoberta do padrão ou suscitar dificuldades na identificação dessa estrutura, dependendo do tipo de padrão que se apresenta e da forma como o material é manipulado. As questões devem ser diversificadas de forma a promover a flexibilidade do raciocínio, propondo a exploração de diferentes sequências de repetição e de crescimento, continuando-as em diferentes direções, solicitar o termo que ocupa uma dada ordem e o inverso, resolver situações problemáticas que contemplem a procura de padrões como principal estratégia de resolução, entre outros. De facto, as tarefas têm um papel primordial nas aulas de Matemática, é indispensável que o professor considere na sua construção a diversidade de fatores que poderão influenciar o desempenho dos alunos prevendo situações como o tipo de estratégias de resolução que poderão utilizar e as dificuldades que poderão surgir.

O desenvolvimento de estudos desta natureza revela-se bastante enriquecedor para a prática profissional. A investigação sobre a própria prática, como ocorreu neste caso, em que se analisou em profundidade aspetos específicos da aprendizagem dos alunos, evidencia particularidades que poderão favorecer e melhorar ações futuras. Tratando-se de alunos do 1.º ano de escolaridade foi gratificante constatar a evolução que demonstraram na abordagem à resolução de situações problemáticas e ao seu posicionamento nas discussões de grande grupo. Foram capazes de usar e interiorizar diferentes estratégias e, considerando o que se poderia esperar desta faixa etária, verbalizar a forma como pensaram, adquirindo cada vez mais autonomia nestas participações. Por outro lado, a análise dos dados revelou também que as formas de registo utilizadas pelos alunos carecem de algum acompanhamento e são um processo gradual que exige muita atenção por parte do professor. No entanto, a introdução progressiva e regular deste tipo de tarefas, acompanhadas dos respetivos registos, na atividade matemática dos alunos poderá contribuir para que melhorem a sua capacidade de argumentação e a comunicação escrita.

Recomendações para investigação futura

O novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) atribui uma expressão curricular mais clara aos padrões, através da integração do tema Álgebra desde o 2.º ciclo e da integração de objetivos específicos do pensamento algébrico desde o 1º ciclo, destacando aspetos como a investigação de padrões, a identificação de relações e a generalização. Estudos realizados por diversos investigadores (e.g. Barbosa, 2010; Becker & Rivera, 2005; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989, referida por Barbosa, 2010; Vale *et al.*, 2011) revelam que alunos de vários níveis de ensino utilizam diversos tipos de estratégias e demonstram dificuldades de natureza distinta, quando resolvem situações problemáticas que implicam a procura de padrões e que potenciam a generalização. Neste sentido, é fundamental levar a cabo estudos prolongados e detalhados sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico, em diferentes níveis de ensino, incidindo sobre as atuais orientações curriculares no nosso país.

Por interesses pessoais, este estudo centrou-se em alunos do 1.º ano, do 1º ciclo do ensino básico, o que significa que todos os resultados devem ser encarados dentro deste contexto. Os alunos que participaram nesta investigação não tinham experiência na resolução de problemas centrados na exploração de padrões, o que influenciou os resultados obtidos, ao nível dos processos por eles mobilizados. Seria então interessante estudar o modo como alunos de outros níveis de ensino resolveriam tarefas desta natureza. Que tipo de estratégias utilizariam? Que dificuldades apresentariam na resolução deste tipo de problemas? Que influência teriam os contextos no seu desempenho? Igualmente pertinente seria compreender como se processa o desenvolvimento do raciocínio funcional desde os primeiros anos, já que, apesar de não ter sido um grande objetivo deste estudo, foi possível perceber que alunos desta idade apresentam indícios dessa forma de pensamento.

Limitações do estudo

Este estudo apresenta algumas limitações próprias de uma investigação desta natureza.

A investigação centrou-se em alunos do 1.º ano de escolaridade que tinham uma experiência quase nula no que refere à exploração de padrões e nenhuma experiência com tarefas do tipo das que foram propostas, por essa razão a continuidade deste tipo de trabalho permitiria investigar determinados pormenores e características do pensamento algébrico dos alunos, de uma forma mais detalhada. O facto de desempenhar o duplo papel de investigadora e professora da turma trouxe vantagens evidentes como o conhecimento dos alunos e do contexto, a integração e gestão das tarefas de forma natural na planificação das sessões, a relação estreita com os alunos, bem como a possibilidade de investigar a própria prática. No entanto, as exigências próprias de um estudo desta natureza, com a necessidade de efetuar registos escritos em simultâneo com a dinamização das aulas, foi por vezes um processo difícil de gerir, situação que se tentou colmatar com as gravações e as entrevistas.

Os resultados obtidos estão diretamente associados ao contexto em que o estudo se desenvolveu e aos alunos da turma do 1.º ano que nele participaram, tendo constituído o estudo de caso. Atendendo a estes pressupostos, as limitações são óbvias considerando que estes resultados não podem ser generalizados a outros contextos, a outros alunos, no entanto podem ser um contributo importante para que se possa analisar a mesma temática noutro âmbito, tendo por base algum conhecimento acerca da mesma.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Ponte, J., Fonseca, H. & Brunheira, L. (1999). Introdução. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca, L. Brunheira (Orgs.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 1-12). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Alvarenga, D. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo.* (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Barbosa, A., Vale, I. & Palhares, P. (2008). A resolução de problemas e a generalização de padrões: estratégias e dificuldades emergentes. In R. González, B. Alfonso, M. Machin, L. Nieto (org.). *Investigación en Educación* (pp. 461-476). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp 121-128). Melbourne, Austrália: University of Melbourne.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412-446.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa. ME-DGIDC.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Pensamento algébrico e exploração de padrões. In I. Vale. & A. Barbosa (Orgs.) *Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Botas, D. (2008). *A utilização dos materiais didácticos nas aulas de Matemática. Um estudo de caso*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade Aberta.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Canavarro, A. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante* , 16(2), 81-118.

Conceição, M. & Fernandes, J. (2009). Implementação de tarefas matemáticas na sala de aula por uma futura professora. *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática,* (Vol. 20, pp. 190-201). Viana do Castelo, Portugal: SIEM.

Cunha, C. (2010). *A utilização de ferramentas tecnológicas e os processos de aprendizagem: Um estudo na introdução à Álgebra no 2º ciclo*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência Matemática*. Lisboa. Gradiva.

Denzin, K. & Lincoln, S. (1994). *Handbook of qualitative research.* NeWboury Park, CA: Sage.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock, (Ed.). *Handbook of research on teaching,* (pp. 195-302). New York: Macmillan.

Fernandes, S. (2007). *Actividades de Investigação Matemática no 1º Ciclo do Ensino Básico. O contributo dos ambientes de aprendizagem*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade Aberta.

Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99*, (pp. 97-110). Lisboa: APM.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T. & Threlfall, J. (1999). *Learning to Teach Number*. Cheltenham: Stanley Thornes.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to Teach Shape and Space*. Cheltenham: Nelson Thornes.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lincoln, Y. & Guba, E. (2000). Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluences. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp 163-188). Thousand Oaks CA: Sage Publications.

Martins, E. (2007). *A procura de padrões como estratégia de resolução de problemas no 1º ciclo do ensino básico*. (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.

ME-DGEBS (1990). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

ME-DEB (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: ME-DEB.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGIDC (2010). *Metas de aprendizagem para o Ensino Básico – 1º ciclo/Matemática.* Acedido em 29 de novembro, 2011, de http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/ensino-basico/metas-de-aprendizagem.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA:

Jossey-Bass Publishers.

Mertens, D. (1998). *Research Methods in Education and Psychology. Integrating Diversity with Quantitative & Qualitative Approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

NCTM (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten Through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2002) A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores,* (pp. 25-40). Lisboa: SPCE.

Orton, A. (1999). Preface. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. vii-viii). London: Cassell.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). London. Cassel.

Palhares, P. (2004). O Jogo e o Ensino /Aprendizagem da Matemática. *Revista da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*, Vol. 5, pp.129-145.

Palhares, P. & Mamede, E. (2002). Os padrões na Matemática do pré-escolar. *Educare – Educare*, 10 ,107-123.

Patton, M. Q (2002). *Qualitive Research & Evaluation Methods*. (3 rd Edition). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua*. (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática, *Quadrante*, 3, (1),3-18.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Ponte, J. P. & Serrazina M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5 – 27*).* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*, 419-430.

Ponte, J. P. (2009). O Novo Programa de Matemática como oportunidade de mudança para os Professores do Ensino Básico, 12, 96-114.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspetive. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 2-21), Mérida, México: Universidade Pedagógica Nacional.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and making sense in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan Publishing Co.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(2), 114-145.

Stake, R. E. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Steen, L. (1988). The Science of Patterns, *Science*, 240, 611-616.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the Early Primary Years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares (coord.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 1- 52). Porto: LIDEL.

Vale, I. e Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do Currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-22.

Vale, I. (2009). Das Tarefas com Padrões Visuais à Generalização. In J. Fernandes. H. Martinho & I. Viseu (Orgs.). *Actas doXX Seminário de Investigação Matemática*, (35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2011). *Padrões em Matemática: Uma Proposta Didáctica no Âmbito do Novo Programa para o Ensino Básico*. Lisboa: Texto Editores.

Van de Walle, J., Karp, K. & Bay-Williams, J. (2010*). Elementary & Middle School Mathematics*. *Teaching Developmentally*.USA: Pearson International Edition.

Warren, E. (2000). Visualisation and the development of early understanding in algebra. In M. Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp.273-280). Hiroshima: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.

Yin, R (2009). *Case Study Research: Design and Methods.* (4 th Edition). Newbury Park, CA: Sage.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: ArtMed.

ANEXOS

ANEXO A

Guião de Observação das Sessões

Guião de Observação das Sessões

Data: ____ Tarefa: ________________

Descrição da Sessão
Instruções e questões da investigadora/professor: **Reações dos alunos à tarefa:**   **Comentários dos alunos:**   **Estratégias utilizadas:**

Dificuldades sentidas: **Aspetos a salientar dos alunos-caso:**   **Episódios marcantes durante a sessão:**
Reflexão após a sessão

ANEXO B

Ficha de avaliação dos alunos do Pré-escolar

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE ……
Pré-escolar

Jardim de Infância :	ANO LETIVO
Nome:	
Data de Nascimento:	Período:
Ed.Infância:	Ano de Frequência:

Área	Integra todas as áreas pois tem a ver com a forma como a criança se relaciona consigo própria, com os outros e com o mundo, num processo que implica o desenvolvimento de atitude e valores.
FORMAÇÃO PESSOAL E SOCIAL	
CONHECIMENTO DO MUNDO	O alargamento de saberes básicos necessários à vida resulta de experiências variadas, proporcionadas pela educação Pré-escolar, que se relacionam com o seu meio próprio, com outros meios/culturas e com a sensibilização às ciências.

ÁREA	As aprendizagens relacionadas com o desenvolvimento psicomotor e simbólico (intelectual, físico e imaginário) determinam a compreensão e o progressivo domínio de diferentes formas de linguagem.	
EXPRESSÃO E COMUNICAÇÃO	Domínio	
	Expressão Motora	
	Expressão Dramática	
	Expressão plástica	
	Expressão musical	
	Linguagem Oral	
	Linguagem "Escrita"	
	Matemática	
	Novas Tecnologias	

OBS.	

O EDUCADOR: ___________________ O ENC. DE EDUCAÇÂO:____________

Data: _____/______/_______

ANEXO C

Inquérito aos alunos utilizado no Agrupamento

Inquérito

Nome do aluno: ____Ano / Turma_____

Professora: ___________

IDENTIFICAÇÃO

Data de Nascimento _____/_____/_____
Telefone____________________________
Concelho____________________________

Idade________________________
Morada______________________
Código Postal _________________

ENCARREGADO DE EDUCAÇÃO

Nome: ____
Grau de Parentesco__________________
Telefone____________________________
Concelho____________________________

Profissão_____________________
Morada______________________
Código Postal _________________

CONSTITUIÇÃO DO AGREGADO FAMILIAR

Grau de parentesco	Idade	Profissão	Habilitações literárias

Em qual das situações se encontram os teus pais? † Casados † Divorciados

Falecido † Pai † Mãe

Ausente noutra localidade † Pai † Mãe Qual?____________________

Ausente noutro País † Pai † Mãe Qual?____________________

Outra __________________

AMBIENTE SÓCIO – ECONÓMICO

Onde vives?

† apartamento † casa † quinta

Tens quarto próprio?

† sim † não

A que horas te deitas? _______

A que horas te levantas para vir para a escola? _______

A tua casa dispõe de:

† W. C. † chuveiro
† luz † esgotos
† água canalizada

Como te deslocas para a escola?

† a pé † de carro
† autocarro † de mota
† outro transporte. Qual? __________________

Quanto tempo demoras a deslocar-te de casa para a escola? ____________

Onde costumas estudar?

† quarto † escritório
† cozinha † sala
† A.T.L.

Quando tens dificuldades és ajudado por alguém?

Sim † Não †

Se respondeste sim na situação anterior, indica por quem:
(Podes assinalar mais de uma hipótese)

Pai/mãe† Explicador† Irmão(ã)† Familiares/vizinhos†

Praticas algum desporto?

† Natação † Ballet † Karaté † Futebol
† Ginástica † Outro. Qual? _______________

Como ocupas o tempo que te sobra?
† Leio † Brinco † Vejo televisão
† Jogo computador/consola
† Outra atividade. Qual? ____

Quando vês televisão, que programas gostas mais?

† Informação † Desenhos animados † Telenovelas

Na tua casa costuma haver?

† Revistas † Computador † Jornais

† Livros infantis † Livros † Enciclopédias

Para ti estudar é:

† interessante † aborrecido † um dever † um passatempo

Onde gostas mais de estar?

† em casa † na sala de aula † no recreio

Gostas de andar na escola?

† Sim † Não

Quais as disciplinas que gostas de estudar?

____
____

Como achas que deveria ser a escola para ser melhor?

____

____

O que queres ser quando fores grande?

____

SAÚDE/ALIMENTAÇÃO

Tens dificuldades ⍭ Visuais ⍭ Auditivas ⍭ Motoras ⍭ De fala

⍭ De linguagem ⍭ Outras __________

Doença (s) frequente (s): ____

Doença (s) permanente (s): ____

Costumas ter dores de cabeça? ____

Alergias____

Tomas o pequeno almoço: ⍭ Em casa ⍭ Na escola ⍭ Não Tomo

Composição:____

Merendas: ⍭ De manhã ⍭ De tarde ⍭ Não Merendo

Composição:____

ANEXO D

Pedido de autorização ao órgão de gestão do Agrupamento

Exmº Sr. Diretor

Do Agrupamento de Escolas de …………..

No âmbito do curso de Mestrado em Educação, Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências, que frequento na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objetivo refletir sobre a aprendizagem da Matemática, num contexto de resolução de problemas, tentando identificar estratégias que invertam o atual quadro de insucesso nesta disciplina.

A investigação decorrerá durante o ano letivo 2010/2011 e visa avaliar as competências dos alunos na resolução de problemas envolvendo padrões e um questionário que focará as suas conceções acerca da Matemática e da resolução de problemas, sendo estas sessões registadas em vídeo.

Para a concretização do referido trabalho será necessário:

- Realizar entrevistas aos alunos onde se promoverão discussões envolvendo diretamente a sua opinião alunos e nas quais terão a oportunidade de resolver tarefas, com o propósito de expressar o seu raciocínio. Todas as entrevistas serão gravadas em audío e posteriormente transcritas e analisadas.
- Proceder à recolha de registos biográficos e fotográficos.
- Registar episódios de sala de aula em vídeo.

Assim sendo, venho por este meio solicitar que me autorize a implementar a investigação anteriormente descrita, ficando desde já garantido que as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada por mim, bem como o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração que permite a realização deste trabalho de investigação na Escola onde leciono.

Com os melhores cumprimentos.

Viana do Castelo, 4 de novembro de 2010.

____

(Helena Parente da Costa Rufo Felgueiras)

- -

Declaro que autorizo a realização da investigação conduzida pela Profª Helena Felgueiras, no âmbito da elaboração da sua Dissertação de Mestrado, na Escola

Assinatura:_______________________________________ _____ / ____ / ____

ANEXO E

Pedido de autorização ao coordenador da escola

Exmº Sr. Coordenador

Da EB1/JI de ……………

No âmbito do curso de Mestrado em Educação, Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências, que frequento na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objetivo refletir sobre a aprendizagem da Matemática, num contexto de resolução de problemas, tentando identificar estratégias que invertam o atual quadro de insucesso nesta disciplina.

A investigação decorrerá durante o ano letivo 2010/2011 e visa avaliar as competências dos alunos na resolução de problemas envolvendo padrões e um questionário que focará as suas conceções acerca da Matemática e da resolução de problemas, sendo estas sessões registadas em vídeo.

Para a concretização do referido trabalho será necessário:

- Realizar entrevistas aos alunos onde se promoverão discussões envolvendo diretamente a sua opinião alunos e nas quais terão a oportunidadede resolver tarefas, com o propósito de expressar o seu raciocínio. Todas as entrevistas serão gravadas em audío e posteriormente transcritas e analisadas.

- Proceder à recolha de registos biográficos e fotográficos.

- Registar episódios de sala de aula em vídeo.

Assim sendo, venho por este meio solicitar que me autorize a implementar a investigação anteriormente descrita, ficando desde já garantido que as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada por mim, bem como o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração que permite a realização deste trabalho de investigação na Escola onde leciono.

Com os melhores cumprimentos.

Viana do Castelo, 4 de novembro de 2010.

____

(Helena Parente da Costa Rufo Felgueiras)

- -

Declaro que autorizo a realização da investigação conduzida pela Profª Helena Felgueiras, no âmbito da elaboração da sua Dissertação de Mestrado, na Escola.

Assinatura:______________________________________ _____ / ____ / ____

ANEXO F

Pedido de autorização aos Pais/Encarregados de Educação

Exmº (ª) Sr.(ª) Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____

Ano: ____ Turma: ____ N.º: ____

No âmbito do curso de Mestrado em Educação, Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências e que frequento na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, encontro-me a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objetivo refletir sobre a aprendizagem da Matemática, num contexto de resolução de problemas.

A investigação decorrerá durante o ano letivo 2010/2011 e visa avaliar as competências dos alunos na resolução de problemas envolvendo.

Para a concretização do referido trabalho será necessário:

- Realizar entrevistas aos alunos onde se promoverão discussões envolvendo diretamente a sua opinião e nas quais terão a oportunidade de resolver tarefas, com o propósito de expressar o seu raciocínio. Todas as entrevistas serão gravadas em audío e posteriormente transcritas e analisadas.
- Proceder à recolha de registos biográficos e fotográficos.
- Registar episódios de sala de aula em vídeo.

Assim sendo, venho por este meio solicitar que me autorize a implementar a investigação anteriormente descrita, ficando desde já garantido que as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada por mim, bem como o anonimato dos alunos.

Agradecendo a colaboração de V. Ex.ª, solicito que assine a declaração em baixo, devendo depois destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos.

Viana do Castelo, ___ de janeiro de 2011.

____

(Helena Parente da Costa Rufo Felgueiras)

- -

Declaro que autorizo o meu educando ____ a participar da investigação conduzida pela Profª Helena Felgueiras, no âmbito da elaboração da sua Dissertação de Mestrado.

_____ / ____ / ____

Assinatura:____

ANEXO G

Tarefa 1 – Repetições divertidas

Nome:____ Data:___/___/___

Tarefa 1 - Repetições divertidas

1 - Completa as sequências preenchendo os espaços em branco.

a) ☆ □ ☆ □ ☆ □ ____ ____ ____ ____

b) ○ ○ △ ○ ○ △ _____ _____ _____

c) ⇧ ⇩ ⇩ ⇧ ⇩ ____ ⇧ ⇩ ⇩ ____ ⇩ ____

d) ___ O □ O □ O___ ___ ___ ___

e) A B C A __ C __ B C

f) 1 2 3 1 2 __ 1 __ __

g) ___ ___ 2 3 2 3 __ 3 __ __

ANEXO H

Tarefa 2 – A subir ou a descer?

Nome:____ Data:___/___/___

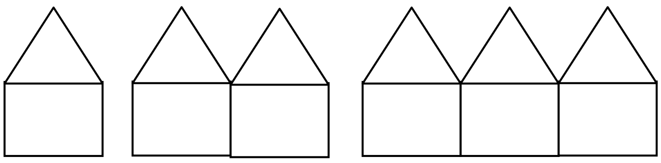
Tarefa 2 - A subir ou a descer?

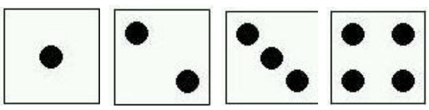
1 - Completa as sequências preenchendo os espaços em branco.

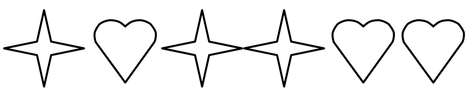
a) 0, 2, 4, 6, ___, ___, 12, ___

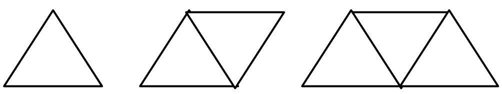
b) 13, 11, 9, ___ , 5 , ___ ,___

2- Desenha mais dois elementos de cada sequência:

a) 

b) 

c) 

d) 

ANEXO I

Tarefa3 – Baile de máscaras

Nome:_______________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 3 - Baile de máscaras

1 – O Carlitos vai festejar o seu aniversário e decidiu fazer um baile de máscaras com os seus amigos. Tem dois tipos de máscaras para a festa, uma de urso e outra de homem do espaço. Antes de os amigos chegarem decidiu brincar com as máscaras e construiu um padrão como se mostra abaixo.

a) Completa-o colando a máscara em falta. Diz como pensaste.

b) Qual a máscara que aparece em nono (9º) lugar na sequência? Explica como pensaste.

c) Qual a máscara que aparece em décimo quinto lugar (15º)? Porquê?

d) Qual a máscara que aparece em trigésimo lugar (30º)? Porquê?

e) Inventa um padrão com as máscaras. Pede a um colega que o continue.

ANEXO J

Tarefa 4 – Convites para a festa

Nome:_______________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 4 - Convites para a festa

1 – A Maria e a Sofia querem fazer convites para o Carnaval com padrões nos cartões. Pensaram em motivos com bruxas, abóboras e bonecos de neve.

a) Ajuda-as a decorar o convite continuando o padrão.

 _____ _____ _____

b) Qual o símbolo que aparecerá em décimo segundo (12º) lugar? Porquê?

c) Num dos convites a ultima figura usada foi um boneco de neve. Quantas abóboras foram usadas sabendo que há sete bonecos de neve?

d) Qual o símbolo que aparece em vigésimo segundo (22º) lugar?

e) Continua a sequência apresentada para esquerda.

_____ _____ _____ 

Anexo K

Tarefa 5 – Jogar com o nome próprio

Nome:____________________ ___________________ Data:___/___/___

Tarefa 5 - Jogar com o nome próprio

1 – Faz o padrão do teu nome.

a) Escreve as letras do teu nome nas quadrículas, sempre seguido, de modo a preencher completamente a grelha.

b) Com cores diferentes pinta a 1ª letra do teu nome.

c) Será que consegues identificar algum padrão? O que observas?

d) Quais os colegas que apresentam o mesmo tipo de padrão? Sabes dizer porquê?

e) Pinta cada uma das letras diferentes com uma cor diferente. O que observas?

ANEXO L

Tarefa 6 – Números coloridos

Nome:_______________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 6 - Números coloridos

1 – Observa o quadro seguinte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Pinta de azul os números de dois em dois a partir do dois. O que observas? Como estão dispostos estes números? Que números são estes?

b) Pinta de cor de laranja os números de três em três a partir do 3. O que observas? Como estão dispostos estes números?

c) Pinta de vermelho os números de cinco em cinco a partir do 5. O que observas? Como estão dispostos estes números? O que acontece ao algarismo das unidades?

d) Pinta de verde os números de dez em dez a partir do 10. O que observas? Como estão dispostos estes números? O que acontece ao algarismo das unidades?

ANEXO M

Tarefa 7 – Degrau a degrau

Nome:_______________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 7 - Degrau a degrau

1 – Observa as escadas representadas abaixo. Constrói-as com os cubos de encaixe.

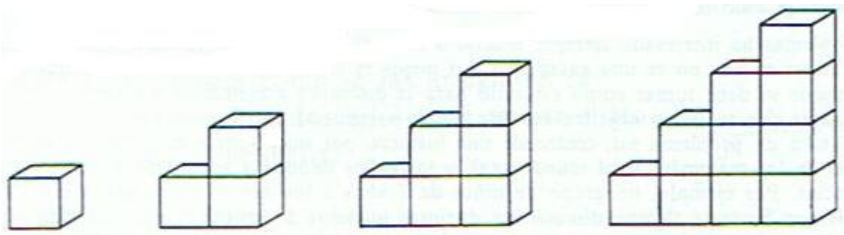
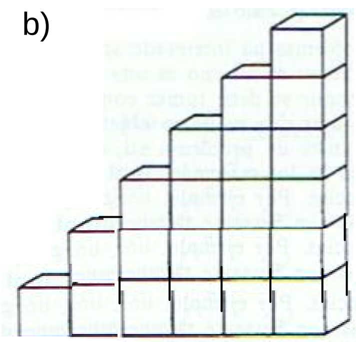


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

a) Como será a escada seguinte? Constrói essa escada.

b)



Descreve esta escada. Esta figura seria a número _________

c) Completa a tabela:

Número da figura	Fig 1	Fig 2	Fig 3	Fig 4	Fig 5	Fig 6	Fig 7
Número de cubos	1	3					

d) Se uma escada tiver 36 cubos em que ordem surge na sequência?

ANEXO N

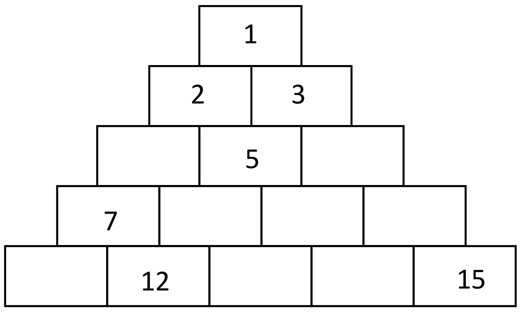
Tarefa 8 – Muro organizado

Nome:______________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 8 - Muro organizado

1- O Simão quer ajudar o pai a construir um muro para vedar o quintal. Como é muito organizado numerou os tijolos, mas depois de os usar reparou que alguns ficaram ao contrário e não se viam os números.

a) Ajuda o João e completa os números em falta no muro.



b) De quantos tijolos precisará para fazer a fila seguinte? Explica como pensaste.

c) Que número terá o 1º tijolo dessa fila? Como descobriste?

d) E se tivesse de construir mais uma fila de tijolos, que número teria o 1º tijolo dessa fila? Explica como pensaste.

e) E que número teria o último? Explica como pensaste.

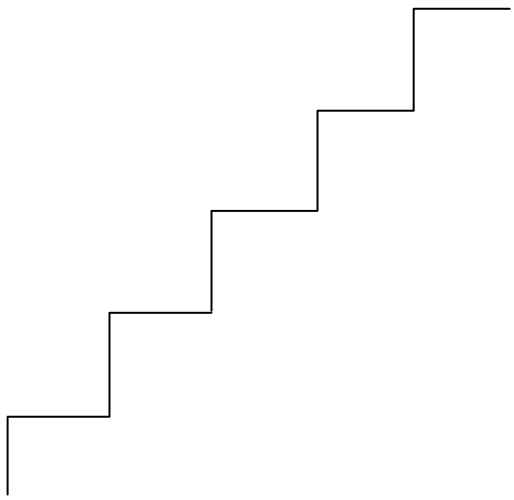
ANEXO O

Tarefa 9 – Saltos de gato

Nome:_______________________________________ Data:_/___/___

Tarefa 9 - Saltos de gato

1 – A Isabel está a treinar o seu gato Tareco a subir uma escada. O Tareco só dá saltos de um ou dois degraus e nunca salta para trás, só para a frente. Como pode o Tareco subir uma escada com cinco degraus? Será que encontras outra maneira de ele subir? Explica como pensaste para resolver a questão.



ANEXO P

Tarefa 10 – Abraços amigos

Nome:_____________________________________ Data:___/___/___

Tarefa 10 - Abraços amigos

1 – A Ana fez anos e convidou as suas três melhores amigas, Beatriz, Catarina e Sara, para lanchar em sua casa. Quando chegaram cumprimentaram-se todas umas às outras com um abraço. Quantos abraços foram dados? Explica como pensaste.

2 – Entretanto chegou a Isabel e voltaram todas a cumprimentar-se. Quantos abraços foram dados? Explica com pensaste?

3 – E se fossem dez amigas, quantos abraços dariam? Explica como pensaste.

ANEXO Q

"Os números"

O PROFESSOR

LEITURA

■ Lê o texto.

Os números

Num belo dia de inverno, os números estavam a brincar uns com os outros.

A dada altura, o 5, que era especialmente brincalhão e gostava muito de dar saltinhos como se fosse uma mola, desafiou o 8 para jogar à macaca.

O 8, que era um bocado preguiçoso e assim a modos que reboludo, respondeu:

— Só nós os dois a jogar dá muito trabalho, temos de dar muitos saltos. Vamos pedir aos outros números para jogarem também.

ANA VICENTE, *Para Que Serve o Zero?*, Oficina do Livro

■ Lê as respostas e escreve as respetivas perguntas.

P.: ______________________________

R.: Os números estavam a brincar uns com os outros.

P.: ______________________________

R.: Quem desafiou o 8 para jogar à macaca foi o 5.

P.: ______________________________

R.: O 8 era preguiçoso e reboludo.

P.: ______________________________

R.: O número 8 não quis jogar sozinho porque isso lhe dava muito trabalho.