



INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Susana Rodrigues Pinto

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Uma proposta para o
ensino das isometrias

Mestrado em Educação
Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Lina Fonseca

Dezembro de 2011

RESUMO

A Geometria é uma área favorável ao desenvolvimento do pensamento matemático. Constitui um meio privilegiado para representar e dar significado ao mundo que nos rodeia. O seu ensino deve promover a descoberta e a experimentação, fomentando o desenvolvimento do pensamento geométrico (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Esta investigação pretendeu estudar o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 6.º ano do Ensino Básico através da implementação de um ambiente de ensino para as isometrias assente nas fases de aprendizagem de van Hiele. Foi orientada pelas questões: i) Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico se encontram os alunos no 6.º ano de escolaridade?; ii) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias?; iii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução das tarefas e como se pode ultrapassar essas dificuldades?; iv) Como é que o ambiente de ensino proposto contribuiu para a evolução do pensamento geométrico?

A investigação seguiu uma abordagem de natureza qualitativa, de carácter exploratório, descritivo e interpretativo. A recolha de dados realizou-se numa turma de 6.º ano, mas debruçou-se apenas sobre quatro alunos que constituíram os estudos de caso. Os dados foram recolhidos em ambiente natural, durante aulas do 2.º e 3.º períodos, recorrendo à observação da realização das tarefas propostas, aos documentos produzidos pelos alunos (questionário, teste, tarefas), e ainda às entrevistas individuais usadas para clarificar e/ou aprofundar alguma questão.

Os resultados obtidos evidenciam uma progressão nos níveis de van Hiele. Antes da implementação do ambiente de ensino, os alunos revelavam um pensamento condizente com o nível 1 de van Hiele, caracterizado por uma linguagem informal e pouco precisa. No final do estudo, os alunos evoluíram, globalmente, para o nível 2 de van Hiele, podendo apresentar, consoante a tarefa e a isometria em causa, um pensamento próprio do nível 3. A linguagem tornou-se mais formal, consistente e precisa. Por vezes, os alunos são capazes de estabelecer relações entre os próprios movimentos e as suas propriedades. Revelaram um bom desempenho e entusiasmo na realização das tarefas propostas, principalmente quando estas envolviam colagens ou recurso ao *Geometer's Sketchpad* (GSP). Estes recursos foram fundamentais para colmatar algumas das dificuldades que os alunos foram sentindo durante a realização das tarefas.

Palavras-chave: pensamento geométrico, isometrias, modelo de van Hiele, tarefas, ambiente de ensino

Dezembro de 2011

ABSTRACT

Geometry is a favourable area to mathematical thinking development. It is a privileged way to represent and give meaning to the world around us. Its teaching must promote the discovery and experimentation, encouraging the development of geometric thinking (Abrantes, Serrazina and Oliveira, 1999).

This research aimed to study the development of 6th year pupils' geometric thought through the implementation of a learning environment for the isometries based on instructional phases of van Hiele. It was guided by the questions: i) At what level of development of geometric thinking are pupils in the 6th year?; ii) How to characterize pupils' performance in solving geometric tasks involving isometries?; iii) What difficulties do pupils show in solving tasks and how to overcome those difficulties?; iv) How does the proposed teaching environment contributed to the development of geometric thinking?

The research followed a qualitative approach, of exploratory, descriptive and interpretative character. Data collection took place in a 6th year class, but it was only focused on four pupils who were case studies. The data were collected in a natural environment, during the 2nd and 3rd term, using observation of pupils' performance while accomplishing the tasks, documents produced by the students (questionnaire, test, tasks), and even individual interviews used to clarify and/or deepen any questions.

The results show a progression in van Hiele levels. Before implementing teaching environment, pupils showed a consistent thinking with level 1 of van Hiele, characterised by an informal and imprecise language. At the end of the study, pupils have evolved, globally, to van Hiele level 2, and may reveal, depending on the task and the isometry in question, a level 3 of geometric thinking. Language became more formal, consistent and accurate. Sometimes, pupils are able to establish relationships between movements and their properties. They showed a good performance and enthusiasm in carrying out the tasks, especially when they involved collages or resource to *Geometer's Sketchpad* (GSP). These resources were fundamental to overcome some difficulties that pupils were feeling during the accomplishment of the tasks.

Key words: geometric thinking, isometries, van Hiele model, tasks, teaching environment

ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
Pertinência do estudo.....	1
Problema e questões de estudo	4
CAPÍTULO II – O ESTADO DA ARTE.....	7
A Matemática.....	7
A Matemática na atualidade.	7
A Matemática no currículo.....	8
O ensino e a aprendizagem da Matemática.....	10
A Geometria.....	11
A Geometria no Programa de Matemática do Ensino Básico.	13
O desenvolvimento do pensamento geométrico – teoria de van Hiele.	15
As transformações geométricas: isometrias.....	22
As isometrias no Programa de Matemática do Ensino Básico.	23
A escolha das tarefas	25
CAPÍTULO III – METODOLOGIA	29
Tipo de estudo	29
Caracterização do contexto	30
Participantes	31
Caracterização da turma.	31
Caracterização dos alunos-caso.	31
<i>O Rogério</i>	32
<i>O Dinis</i>	32
<i>O par Rogério e Dinis (RD)</i>	33
<i>O Jorge</i>	33
<i>A Cláudia</i>	33
<i>O par Jorge e Cláudia (JC)</i>	33
Recolha de dados.....	34
Entrevistas.	34
Observações.	34

Documentos	34
<i>Questionário</i>	35
<i>Teste</i>	35
<i>Tarefas</i>	37
Análise de dados	41
Calendarização	45
CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	47
O questionário de opinião	47
O teste individual	48
Rogério	49
Dinis	51
Jorge	54
Cláudia	57
Os pares perante as tarefas	60
Rogério e Dinis (par RD).....	61
<i>Tarefa 1</i>	61
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	63
<i>Dificuldades manifestadas</i>	64
<i>Síntese</i>	64
<i>Tarefa 2</i>	64
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	68
<i>Dificuldades manifestadas</i>	69
<i>Síntese</i>	69
<i>Tarefa 3</i>	69
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	73
<i>Dificuldades manifestadas</i>	74
<i>Síntese</i>	74
<i>Tarefa 4</i>	75
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	78
<i>Dificuldades manifestadas</i>	78
<i>Síntese</i>	78
<i>Tarefa 5</i>	79
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	80

<i>Dificuldades manifestadas</i>	81
<i>Síntese</i>	81
Tarefa 6.	81
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	83
<i>Dificuldades manifestadas</i>	83
<i>Síntese</i>	83
Jorge e Cláudia (Par JC).....	83
Tarefa 1.	83
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	84
<i>Dificuldades manifestadas</i>	85
<i>Síntese</i>	85
Tarefa 2.	86
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	89
<i>Dificuldades manifestadas</i>	90
<i>Síntese</i>	90
Tarefa 3.	91
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	94
<i>Dificuldades manifestadas</i>	95
<i>Síntese</i>	96
Tarefa 4.	96
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	98
<i>Dificuldades manifestadas</i>	98
<i>Síntese</i>	99
Tarefa 5.	99
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	100
<i>Dificuldades manifestadas</i>	101
<i>Síntese</i>	101
Tarefa 6.	101
<i>Desempenho do par na resolução da tarefa</i>	102
<i>Dificuldades manifestadas</i>	102
<i>Síntese</i>	102
Síntese dos alunos-caso	103
Rogério.	103

<i>Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.</i>	103
<i>Desempenho na resolução das tarefas.</i>	103
<i>Dificuldades manifestadas.</i>	104
<i>Contributo do ambiente de ensino.</i>	104
Dinis.	105
<i>Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.</i>	105
<i>Desempenho na resolução das tarefas.</i>	106
<i>Dificuldades manifestadas.</i>	106
<i>Contributo do ambiente de ensino.</i>	106
Jorge.	107
<i>Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.</i>	107
<i>Desempenho na resolução das tarefas.</i>	108
<i>Dificuldades manifestadas.</i>	108
<i>Contributo do ambiente de ensino.</i>	108
Cláudia.	109
<i>Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.</i>	109
<i>Desempenho na resolução das tarefas.</i>	110
<i>Dificuldades manifestadas.</i>	110
<i>Contributo do ambiente de ensino.</i>	111
CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E REFLEXÃO FINAL	113
Síntese do estudo	113
Conclusões do estudo	114
Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 6.º ano.	115
Desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica.	117
Dificuldades manifestadas na resolução das tarefas e como ultrapassá-las.	118
Contributo do ambiente de ensino para a evolução do pensamento geométrico.	120
Reflexão final	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123
ANEXOS	127

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Relação entre as fases de aprendizagem, tarefas implementadas e objetivos das sessões de ensino	40
Tabela 2. Relação entre as questões de investigação, métodos de recolha de dados, categorias de análise e distribuição no tempo.....	44
Tabela 3. Gestão das etapas do estudo	45
Tabela 4. Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Rogério	51
Tabela 5. Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Dinis	54
Tabela 6. Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Jorge	57
Tabela 7. Codificação, por movimento, no teste realizado pela Cláudia	60
Tabela 8. Nível, por movimento, no teste realizado pelo Rogério	103
Tabela 9. Nível, por movimento, no teste realizado pelo Dinis	105
Tabela 10. Nível, por movimento, no teste realizado pelo Jorge	107
Tabela 11. Nível, por movimento, no teste realizado pela Cláudia	109

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento.....	65
Figura 2. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento	65
Figura 3. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento	65
Figura 4. Resposta do par RD à segunda questão da tarefa 2A	66
Figura 5. Pavimentação reproduzida no GSP	70
Figura 6. Exemplo de peças do dominó	71
Figura 7. Estratégia usada para descoberta das peças do dominó	72
Figura 8. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento	86
Figura 9. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento	86
Figura 10. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento	87
Figura 11. Resposta do par JC à segunda questão da tarefa 2A	87

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Pertinência do estudo

Portugal continua a ser considerado um país com insucesso escolar a Matemática.

É de conhecimento geral que algo corre mal no ensino da Matemática. Confirmam-no a todo o momento o insucesso escolar, o desinteresse e desmotivação generalizados pela disciplina. (...) Em Portugal, a Matemática apresenta taxas de insucesso exageradamente altas, ou seja, a maior parte dos alunos não consegue compreender e aplicar os conteúdos abordados nesta área do conhecimento. (Gonçalves & Kaldeich, 2007, p. 2)

A situação é preocupante e não é de agora, segundo Ponte (1994):

O insucesso nesta disciplina é uma realidade incontornável. Reconhece-se não só pelos maus resultados dos alunos em testes e exames, mas muito especialmente pela sua generalizada dificuldade na resolução de problemas, no raciocínio matemático, às vezes nas tarefas mais simples e, sobretudo, no seu desinteresse crescente em relação à Matemática. O insucesso não só existe como tende a agravar-se (p. 3).

Embora esta citação remonte a 1994, o mesmo problema continua a verificar-se nos dias de hoje e, tal como Ponte previu, talvez de forma mais visível. Tal, pode constatar-se na análise dos resultados obtidos no exame de Matemática do 9.º ano de escolaridade de 2007 apresentada no portal do Ministério da Educação, “Os resultados do exame de Matemática confirmam a persistência de dificuldades nas condições de ensino e aprendizagem desta disciplina” (Ministério da Educação, 2007). De acordo com o estudo internacional da responsabilidade do *Programme for International Students Assessment* (PISA) de 2006, embora tenha havido uma pequena melhoria na prestação dos nossos alunos comparativamente aos resultados obtidos em 2000, “o desempenho médio global dos alunos portugueses a literacia matemática manteve, no ciclo de 2006, o mesmo valor (466) atingido em 2003” (GAVE, 2007, p. 52), o que coloca Portugal em 25.º lugar em relação aos países da OCDE (*Organization for Economic Cooperation and Development*), ficando apenas à frente da Itália, Grécia, Turquia e México.

No que concerne ainda aos estudos nacionais, relativamente às Provas de Aferição do 4.º ano de escolaridade, os dados apresentados no relatório de análise de resultados da Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo (GAVE, 2009) relativamente aos anos 2007, 2008 e 2009 mostram que ao longo destes três anos houve um aumento da percentagem da média global de acertos. Contudo, se atentarmos no facto de que os alunos que realizaram a Prova de Aferição do 4.º ano em 2007, constituem o grupo de alunos que realizou em 2009 a Prova de Aferição de 6.º

ano e compararmos os resultados obtidos, constatamos que na área da Geometria houve um decréscimo de 70% para 47% na média global de acertos. Assim, a Geometria, a par da Álgebra, baixou drasticamente a sua média, situando-se ambas, no 6.º ano, abaixo dos 50%. Enquanto que nos Números e Operações e em Estatística essa situação não aconteceu, tendo-se a média mantido positiva. Dentro da Geometria, os itens em que se verificou maior percentagem de insucesso, inferior a 50%, foram os itens relacionados com as capacidades transversais que avaliam diferentes aspectos da competência matemática, comunicação matemática e resolução de problemas. Por outro lado, verificou-se que os alunos se encontram mais à-vontade nos itens de conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos, todos com taxas de sucesso superiores a 77% (GAVE, 2009). Tendo em conta o Relatório sobre a Prova de Aferição de Matemática do 1.º ciclo de 2009, devem ser dadas aos alunos mais oportunidades para realizarem tarefas envolvendo os conceitos de comprimento e área, e o ensino da área de figuras geométricas, tais como o retângulo e o quadrado, não deverá estar focalizado na memorização de fórmulas, sem significado para os alunos.

A descida drástica entre os resultados obtidos na área da Geometria nas Provas de Aferição de 4.º ano de 2007 e os da Prova de Aferição de 6.º ano de 2009, realizadas basicamente pelos mesmos alunos, faz-me questionar sobre o modo como o ensino/aprendizagem da Geometria se tem desenvolvido no 2.º ciclo.

Outro fator que certamente contribui para o insucesso na Matemática é a relação da sociedade com a Matemática escolar. Enraizou-se, na sociedade, a ideia generalizada de que é “normal” ter maus resultados em matemática e um certo estigma em relação a esta disciplina tratando-a como difícil e inacessível, e destinada apenas a pessoas inteligentes (Gonçalves & Kaldeich, 2007). Segundo estes autores, enquanto este pensamento prevalecer, persistirá a fobia social à aprendizagem da Matemática. A este propósito, Marcelo Viana, matemático luso-brasileiro, referiu, aquando da entrega do Prémio Universidade de Coimbra 2007, “A matemática não é uma disciplina bem compreendida nem popular. É a única área em que as pessoas se orgulham de não conhecer” (Gabinete de Comunicação e Identidade da Universidade de Coimbra, 2007).

Muitos têm sido os estudos que pretendem estabelecer as causas do insucesso na disciplina de Matemática, na tentativa de ultrapassar essa situação, porém o problema do insucesso da Matemática não é fácil de resolver e a sua análise é complexa. O programa, o método, o professor, as próprias atitudes dos professores em relação à disciplina que lecionam estão relacionados com esta problemática (Ponte, 1994). Numa altura em que entra em vigor um

novo programa, e com ele a proposta de metodologias diversificadas, cabe agora ao professor questionar o modo como desenvolve a sua prática letiva, pois esta influencia a forma como os alunos encaram a Matemática. Recorrendo ao Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) este refere que:

O aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos. Por isso, o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização. (ME-DGIDC, 2007, p. 8)

Mas, para tal, é preciso que o professor se sinta à-vontade nos temas que vai lecionar, que possua conhecimentos matemáticos necessários que lhe permitam conduzir tarefas diversificadas, afinal, se ensinar implica ajudar os outros a aprender, então compreender o que vai ensinar é um requisito central (Ball, citado por Gomes e Ralha, 2005). Não menos importante do que a forma como o professor encara a Matemática, apresenta-se o conhecimento matemático que, não sendo condição por si só suficiente, é, sem dúvida, condição necessária. As concepções, conhecimentos e atitudes dos professores face à Matemática afetam a confiança dos alunos, a forma como aprendem e como se comportam na sala de aula (Teixeira, 2008).

No caso específico da Geometria, apesar de o PMEB a valorizar cada vez mais, essa valorização não se reflete naquilo que é verdadeiramente lecionado na aula. Num estudo realizado por Gomes e Ralha (2005), pôde constatar-se que nas aulas observadas dos professores do 1.º ciclo em formação inicial:

A Geometria esteve quase sempre ausente e, quando esteve presente, baseou-se na simples exposição dos conceitos sem uma procura do seu entendimento ou, então, nos típicos reconhecimento e nomeação de formas geométricas, sem qualquer tipo de contextualização em termos de problemas. (Gomes & Ralha, 2005, p.15)

Contudo, segundo o mesmo estudo, observaram também que, apesar da importância dada aos conceitos, houve várias situações em que grande parte da amostra do estudo “não domina sequer os conteúdos que resultam de convenções estabelecidas pela comunidade matemática” (p.16). Segundo o mesmo estudo, um número considerável de participantes desconhecia grande parte dos conceitos geométricos básicos e elementares, o que se torna no mínimo preocupante, considerando que esse facto irá refletir-se na forma como o docente conduzirá as suas práticas lectivas. Já em 1945, George Pólya defendia, como regra de ensino *sine qua non*, “saber o que se deve ensinar” (Polya, 1995, p. 133).

Quanto ao ensino da Geometria, o PMEB definiu como propósito principal:

Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos. (ME-DGIDC, 2007,p. 20)

Atendendo à importância que a Geometria assume, uma vez que permite relacionar o mundo da criança com as suas vivências do dia-a-dia e desenvolve as suas capacidades espaciais (Teixeira, 2008), capacidades essas consideradas por Bishop (citado por Jones e Bills, 1998) muito importantes pelos processos mentais que implicam e pelas ligações e utilizações em outras áreas, continua a ser pertinente compreender e promover o desenvolvimento do pensamento visual-espacial. A escolha das situações de ensino e das tarefas a aplicar pode ter um papel preponderante no desenvolvimento do pensamento geométrico. De acordo com o PMEB, “o estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas” (ME-DGIDC, 2007, p. 36).

Associado ao ensino e aprendizagem da Geometria encontra-se a teoria de van Hiele que tem estado presente em várias pesquisas relacionadas com este tema. Não só em Portugal, como no resto do mundo, professores da escola básica reconhecem falhas no desempenho dos seus alunos na aprendizagem da Geometria e a aplicação de uma metodologia de ensino baseada no modelo de van Hiele pode ser o caminho a seguir para ultrapassar esse problema (Jaime, 1993). Contudo, a escassez, constatada por Jaime (1993), e actualmente ainda sentida por mim, de materiais curriculares construídos em função dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e que respeitem as fases de aprendizagem de van Hiele, dificulta a aplicação desta metodologia. Tal levou-me a ampliar os meus conhecimentos em relação a esta teoria, de modo a conseguir construir um ambiente de ensino que fosse ao encontro do modelo de van Hiele. Por outro lado, tal como Jaime (1993) referiu no seu trabalho, também eu senti necessidade de ampliar o campo de aplicação do modelo de van Hiele a outras áreas da geometria além do estudo dos polígonos, ao qual este modelo se encontra intimamente ligado.

Problema e questões de estudo

Por todas as razões apresentadas, principalmente as que contrapõem a importância dada à Geometria no PMEB ao fraco desenvolvimento do pensamento geométrico que os alunos do 2.º ciclo apresentam e, ainda, a carência de materiais curriculares desenhados de acordo com o modelo de van Hiele para o estudo das isometrias, decidi aprofundar os meus conhecimentos

nesta temática, desenvolvendo uma investigação que, tendo por base um ambiente de ensino que respeite as fases de aprendizagem de van Hiele, pretende compreender o contributo deste no desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 6.º ano de escolaridade. Por conseguinte, primeiramente será indispensável investigar os conhecimentos geométricos dos alunos-caso antes da implementação do ambiente de ensino, situando-os nos níveis de desenvolvimento propostos por van Hiele. Seguidamente, implementar o ambiente de ensino sobre as isometrias para que possa verificar o desempenho, dúvidas e dificuldades desses alunos na realização de tarefas de natureza geométrica e, por último, verificar o contributo do ambiente de ensino implementado no desenvolvimento do pensamento geométrico com a identificação do nível obtido por cada um dos alunos do estudo-caso.

Para melhor conduzir esta investigação coloquei as seguintes questões orientadoras: i) Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico se encontram os alunos no 6.º ano de escolaridade?; ii) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias?; iii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução das tarefas e como se podem ultrapassar essas dificuldades?; iv) Como é que o ambiente de ensino proposto contribuiu para a evolução do pensamento geométrico?

CAPÍTULO II – O ESTADO DA ARTE

A Matemática

As raízes da Matemática perdem-se no tempo, quão antiga é esta ciência.

Apesar de lidar com relações abstratas, a Matemática proporciona-nos uma leitura e representação do mundo, assim como nos fornece as ferramentas necessárias para resolver problemas, ou ainda prever e controlar os resultados (ME-DGIDC, 2007).

Há muito tempo que se procura um consenso quanto à definição do que é Matemática. Procurando num dicionário, neste caso a *wikipédia*, surge definida como a ciência do raciocínio lógico e abstrato, rigorosa e precisa, envolvendo uma constante procura de verdade. Davis e Hersh (1981) apresentam-na como sendo a ciência que se ocupa da quantidade e do espaço, ou seja, do número e da forma. A definição bastante redutora usada por estes autores surge, nos seus estudos, como ponto de partida para a ampliação do seu significado, de modo a refletir a sua evolução ao longo dos tempos e das várias correntes didáticas. Nesta definição encontramos uma relação com as primeiras manifestações de atividade matemática: contar e medir. Hoje em dia, esta atividade matemática encontra-se alargada ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza e, ainda, às suas dimensões principais, tais como: resolução e formulação de problemas, formulação e teste de conjecturas, generalização e demonstração, e elaboração e refinamento de modelos (ME-DGIDC, 2007).

A atividade matemática não diz respeito somente aos investigadores (matemáticos), de acordo com Teixeira (2008), nela também participam todos os que usam esta ciência nas suas áreas de trabalho (engenheiros, economistas, psicólogos, entre outros), os que a utilizam de forma lúdica (matemáticos amadores), todos os que ensinam Matemática (professores) e os que a estudam.

A Matemática na atualidade.

A par do que acontece com as outras ciências, também a Matemática sofreu mudanças, tanto internas (nos seus métodos, processos e técnicas), como também externas (na sua relação com as outras áreas da sociedade). Na atualidade são múltiplos e variados os domínios em que a Matemática é utilizada. Agora, e mais do que nunca, a Matemática está patente em todas as áreas científicas e tecnológicas, em alguns campos da arte e ainda em várias áreas profissionais

(NCTM, 2007). A necessidade de compreender a Matemática e ser capaz de a utilizar no quotidiano, no local de trabalho nunca foi tão premente como hoje em dia.

Na sociedade atual, na qual vivemos em constante mudança, verifica-se que os que compreendem e são capazes de fazer Matemática terão mais hipóteses e condições para construírem uma vida melhor.

A competência matemática abre portas a futuros produtivos; a sua ausência mantém-nas fechadas. (...) Uma sociedade em que apenas alguns indivíduos possuem os conhecimentos matemáticos necessários para desempenhar papéis fundamentais nas áreas da economia, da política e da ciência não é consistente com os valores de um sistema democrático justo ou com as suas necessidades económicas. (NCTM, 2007, p.5)

Por conseguinte, exige-se da escola, hoje e mais do que nunca, o acesso por parte de todos os alunos a uma base sólida na formação em Matemática, que desenvolva no aluno as competências necessárias para usar a Matemática tanto no seu percurso escolar como mais tarde, na sua vida profissional, pessoal e social.

O ensino da Matemática participa, pelos princípios e métodos de trabalho praticados, na educação do jovem para a autonomia e solidariedade, independência empreendedora, responsável e consciente das relações em que está envolvido e do ambiente em que vive.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao jovem fazer escolhas de profissão, ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e sentir-se motivado para continuar a sua formação ao longo da vida (...) contribui para a construção da língua com a qual o jovem comunica e se relaciona com os outros, e para a qual a Matemática fornece instrumentos de compreensão mais profunda (...) fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana. (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca e Lopes, 2001, p. 3)

A Matemática no currículo.

Na tentativa de acompanhar a evolução tecnológica e, conseqüentemente, social, o currículo da disciplina de Matemática, no Ensino Básico em Portugal, e o próprio conceito de currículo têm sofrido várias mudanças. Há uns anos atrás, o currículo era interpretado como um conjunto de temas a tratar na sala de aula pelo professor, era sinónimo de programa, enquanto que, mais recentemente, é dada mais importância à interpretação do currículo por parte do professor, passando o currículo a contemplar objetivos e sugestões metodológicas (Roldão, 1999). O NCTM (2007) afirma que “um currículo é mais do que um conjunto de atividades: deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo dos anos de escolaridade” (p.15).

Mais do que nunca, a escola de hoje tem o dever de dar a todos os alunos uma formação sólida em Matemática de modo a possibilitar ao aluno a utilização da Matemática não só ao longo da sua escolaridade nesta e noutras disciplinas, mas também depois da sua vida académica, na sua vida profissional e na própria sociedade (ME-DGIDC, 2007). Aliás, “promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados” (ME-DGIDC, 2007, p. 3) constitui uma das duas finalidades fundamentais segundo as quais o ensino da Matemática deve ser orientado.

Assim, a disciplina de Matemática no ensino básico deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária a outras disciplinas e ao prosseguimento dos estudos — em outras áreas e na própria Matemática — e deve contribuir, também, para sua plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida. (ME-DGIDC, 2007, p. 3)

Ainda de acordo com o PMEB (ME-DGIDC, 2007), a escola deve proporcionar uma formação que também promova nos alunos uma relação favorável com a disciplina e a confiança nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela. Primeiramente, cabe ao professor conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática (DEB, 2004). Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência é apontada pelo PMEB (ME-DGIDC, 2007) como a outra finalidade fundamental do ensino da Matemática.

Pela importância que assume, a Matemática deveria ser encarada não como um fator de seleção, mas sim como um instrumento de desenvolvimento acessível a todos os alunos. Para isso é imprescindível um currículo matemático sólido, professores preparados e competentes e condições de trabalho apropriadas (NCTM, 2007).

Desta forma, o NCTM (2007) considera seis princípios, relacionados entre si, para a disciplina de Matemática: o Princípio da Equidade – implica disponibilizar os recursos necessários a todos os alunos e professores de modo a ajudar todos os alunos nas suas aprendizagens; o Princípio do Currículo – o currículo deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo de toda a escolaridade; o Princípio do Ensino – os professores devem saber e compreender profundamente a matemática que ensinam, serem capazes de utilizar esses conhecimentos de forma flexível no decorrer das suas atividades, devem compreender os seus alunos e ser ponderados na seleção e utilização das estratégias pedagógicas; o Princípio da Aprendizagem – os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo novos conhecimentos a partir da experiência e dos conhecimentos prévios; o Princípio da Avaliação – a

avaliação deve ser uma parte integrante do ensino, informando e orientando os professores, não deve ser somente feita aos alunos, pelo contrário, deve ser feita para os alunos; o Princípio da Tecnologia – a tecnologia é fundamental no ensino da Matemática, pois apoia um ensino eficaz, influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos.

O ensino e a aprendizagem da Matemática.

A aprendizagem da Matemática começa a desenvolver-se logo na infância, nos primeiros quatro anos de vida. Esta desenrola-se com a curiosidade e brincadeiras da criança que, se forem bem orientadas, estimulam a criança a descobrir novos conhecimentos matemáticos (Teixeira, 2008). Mesmo antes da entrada na escolaridade básica, muitas crianças possuem uma quantidade importante de conhecimentos matemáticos, que podem até ser bastante complexos e sofisticados (Baroody; Clements, Swaminathan, Hannibal e Sarama; Gelman; Ginsburg, Klein e Starkey, citados por Teixeira, 2008).

Fora do ambiente escolar, através da manipulação e uso de objetos, das brincadeiras, dos desenhos e da contagem, a criança revela aquilo que sabe e quanto mais rica for essa atividade, mais aprende, mais descobre, experimentando de forma informal conceitos matemáticos (Teixeira, 2008). Compete ao adulto “estimular o desenvolvimento matemático das crianças, proporcionando-lhes um ambiente rico em linguagem, onde o pensamento é encorajado, onde a originalidade é valorizada e as explorações apoiadas” (NCTM, 2007, p. 84).

Na sala de aula, as situações a apresentar aos alunos, quer numa fase de consolidação e aprofundamento quer na fase de exploração de um conceito, devem abranger contextos matemáticos e não matemáticos e conter outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos (ME-DGIDC, 2007). O professor deve certificar-se que situações de aprendizagem estimulantes façam parte regular das aulas de Matemática. Deve valorizar o pensamento e o raciocínio individual dos alunos, bem como utilizar a avaliação formativa no processo de ensino-aprendizagem, permitindo aos alunos estabelecer uma relação entre os novos conhecimentos matemáticos e os conhecimentos anteriormente adquiridos. Tal como refere o PMEB:

Para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas. Ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem. (ME-DGIDC, 2007, p.9)

Desenvolver a memorização por si só e a aplicação de técnicas rotineiras, não constitui um objetivo desta disciplina, como refere Carneiro (2005) citando Amaral:

...uma aprendizagem da matemática baseada em exercícios rotineiros, privilegiando cálculos e memorizações isoladas, além de não responder às exigências colocadas hoje ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é a matemática nem constitui um pré-requisito para a sua aprendizagem (pág. 17).

O ambiente que se cria dentro da sala de aula é, sem dúvida, um fator muito importante no ensino/aprendizagem da matemática com qualidade. De acordo com o NCTM (1994), o ambiente de aprendizagem é um elemento chave no decorrer do processo ensino/aprendizagem desta disciplina. O professor deve preocupar-se em criar um ambiente de aprendizagem que estimule e encoraje o raciocínio matemático e favoreça o desenvolvimento das competências de todos os alunos. Um bom ambiente de trabalho está dependente da natureza das atividades matemáticas apresentadas, pois tarefas diferentes requerem estratégias de ensino igualmente diversas.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem a existência de outros elementos relevantes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, como os programas ou manuais, mas reforçam que até o uso destes depende principalmente do professor.

A Geometria

A Geometria é uma área da Matemática que facilita os processos mentais, valoriza a descoberta e a experimentação, promovendo o desenvolvimento do pensamento geométrico e o raciocínio visual (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Num mundo como o de hoje, em que a imagem é cada vez mais utilizada como meio de comunicação, é imprescindível que os alunos desenvolvam a capacidade de observar o que os cerca e de o interpretar.

Em relação à potencialidade da geometria como conhecimento, Freudenthal (citado por Hamazaki, s/d) expressa-se assim:

A Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender a matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possam de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta (p.3).

Fazendo parte do mundo que nos rodeia, a Geometria está presente nos conhecimentos adquiridos intuitivamente pelos alunos, antes mesmo de chegarem à escola. Indica o PMEB que estes conhecimentos, além de deverem ser valorizados, devem servir como base para o

desenvolvimento espacial que, por sua vez, compreende a visualização e a compreensão das relações espaciais.

A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e as suas representações e a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e as suas representações. O sentido espacial envolve ainda as noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na percepção das relações espaciais. (ME-DGIDC, 2007, p.20)

Na mesma linha de pensamento, a propósito da visualização e representação espacial, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) também haviam referido que o estudo das formas e das relações espaciais proporciona às camadas mais jovens a grande possibilidade de relacionarem a Matemática com a realidade ao longo da vida, uma vez que a natureza que nos rodeia possui variados aspetos geométricos. Para estes autores, as primeiras experiências das crianças são geométricas e espaciais e têm lugar quando estas tentam compreender o mundo que as rodeia, ao distinguir um objeto de outro e ao descobrir o grau de proximidade de um dado objeto. Quando se movimentam de um lugar para o outro, estão a usar ideias espaciais e geométricas para resolver problemas. As simples atividades do quotidiano: observar, andar, desenhar, construir e manipular objetos, podem constituir uma fonte rica de experiências relacionadas com o sentido espacial (Freudenthal, Piaget & Inhelder, Streefland, van Hiele, citados por Lehrer et al, 1998). Estas experiências diárias, bem como o conhecimento informal desenvolvido pelas crianças ao longo da vida, funcionam como rampa de lançamento rumo à geometria, permitindo dar um sentido matemático ao mundo espacial que nos rodeia (Lenner et al, 1998). Ainda segundo estes autores, a importância que a visualização e o raciocínio espacial assumem na matemática, por exemplo na formulação de raciocínios dedutivos, justificam a introdução do estudo do espaço e da geometria logo nos primeiros anos de escolaridade e a necessidade de mantê-la como parte integrante e basilar da aprendizagem da matemática (Lehrer et al, 1998).

Num estudo levado a cabo por Clements, Battista e Sarama que pretendeu investigar o desenvolvimento das conceções de geometria e medida em alunos de 9 anos de idade, nomeadamente no que diz respeito à rotação, refere-se a importância que situações simples, envolvendo movimentos físicos, podem assumir no desenvolvimento de ideias geométricas (Clements, Battista e Sarama, 1998). Os resultados desta investigação sugerem que a representação estática das rotações, independentemente da forma inteligente como possa ter sido concebida, não só poderá ser inadequada no processo de aprendizagem das crianças, como poderá prejudicar o seu desenvolvimento na conceção dinâmica das rotações e na medição da amplitude da rotação. Tal acontece em virtude das representações estáticas limitarem a

construção da noção de movimento físico e a consecutiva integração no que diz respeito à geometria e à medida. Assim, segundo estes autores, os professores devem dar ênfase aos movimentos físicos dos alunos (por exemplo, usar o próprio corpo para descrever uma rotação) e incentivar os alunos a recorrer a estes movimentos como ajuda durante atividades desenvolvidas no computador ou com papel e lápis.

De acordo com Veloso (1998), a geometria é “compreender o espaço em que vive, respira e se move; o espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor” (p. 15).

Nem sempre se deu a devida importância ao ensino da geometria. Durante as décadas de 70 e 80 assistiu-se à deterioração do ensino da geometria e desvalorização da visualização na atividade matemática dos alunos (Veloso, 1998; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Nessa altura, “os aspectos da geometria ligados à observação, à experimentação e à construção praticamente desapareceram do ensino básico” (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 67). Para Veloso (1998), o processo de ensino-aprendizagem da geometria de Euclides baseado na demonstração de centenas de axiomas e teoremas, organizada do plano para o espaço, provocava comumente nos estudantes uma repulsa eterna pela geometria. Nos finais da década de 80, com o início da reforma dos programas de Matemática, e de acordo com Veloso (1998), estavam criadas algumas condições para que a geometria voltasse a ocupar o seu lugar no currículo. Nos finais da década de 90, como referem Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), as orientações procuravam outros caminhos. Segundo estes autores, “a geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação” (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 67). Assim deverão ser valorizadas as capacidades de visualização espacial e de verbalização, a intuição e utilizadas como recurso na resolução de problemas. (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

Num seminário realizado nos Estados Unidos em 1990 sobre o ensino da Geometria, foi recomendada uma maior atenção “aos conceitos centrais da geometria, tais como as transformações geométricas e seus efeitos nos conjuntos de pontos, nos conceitos referentes à distância, à superfície, etc” (Veloso, 1998, p. 18).

É essencial retomar a intenção de dar às transformações geométricas o seu papel importante no ensino da geometria, num tratamento que tenha por ponto de partida e desenvolva as intuições que os alunos já possuem e prossiga numa via lenta de formalização ao longo de toda a escolaridade. (Veloso, 1998, p. 14).

A Geometria no Programa de Matemática do Ensino Básico.

O atual programa de Matemática – PMEB (ME-DGIDC, 2007) estrutura-se, ao longo dos

três ciclos, em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados. Porém, no 1.º ciclo, não surge o tema da Álgebra, embora esteja implícito em outros temas; e o tema da Geometria encontra-se associado à Medida. No que diz respeito à Geometria, ao longo dos três ciclos, esta tem como ideia principal o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos e continua a considerar essencial o estudo das figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Para os alunos estabelecerem a passagem entre as figuras bidimensionais a tridimensionais e vice-versa, Ponte e Serrazina (2000) referem que a utilização de planificações de sólidos geométricos e a respetiva construção é uma das melhores estratégias. Assim, os alunos desenvolvem o seu raciocínio espacial, ao reconhecerem que, por sucessivas dobragens, uma figura bidimensional vai originar uma dada forma tridimensional.

Segundo o PMEB, o estudo destas figuras inicia-se no 1.º ciclo; no 2.º ciclo, os alunos relacionam as suas propriedades geométricas; no 3.º ciclo, surgem os primeiros contactos com situações de raciocínio hipotético-dedutivo. Em relação ao programa de Matemática anterior, é feita uma importante alteração no tema Geometria, passando a iniciar-se logo no 1.º ciclo o estudo de diversas transformações geométricas, desenvolvendo desde cedo a visualização, primeiro de uma forma mais intuitiva e, posteriormente, com crescente formalização.

A utilização de materiais manipuláveis desenvolve um papel importante na aprendizagem da Geometria e da Medida, permitindo estabelecer relações e tirar conclusões e facilitando a compreensão de conceitos. Não obstante, “é necessário ter em conta que a utilização de materiais só por si não garante a aprendizagem, sendo indispensáveis o registo do trabalho feito e a reflexão” (ME-DGIDC, 2007, p.21).

Segundo Geddes (citado por Carneiro, 2005), a aprendizagem significativa da Geometria encontra-se diretamente relacionada com o meio que envolve os alunos e não com uma aprendizagem que privilegia a memorização de definições, fórmulas e enumeração de propriedades de figuras. O NCTM (2007) refere que “a geometria é mais do que um conjunto de definições; consiste na descrição de relações e no raciocínio” (p. 44), pelo que é considerada “desde há muito, como o conteúdo do currículo de matemática onde os alunos aprendem a raciocinar e a compreender a estrutura axiomática da matemática” (p. 44). A aprendizagem da Geometria, referem Matos e Serrazina (1996), deve desenvolver nos alunos determinadas capacidades, a saber: capacidade de visualização que é a forma como os alunos percecionam o mundo que os rodeia, tendo capacidade para interpretar e modificar as transformações dos objetos; capacidade de verbalização que é a forma como os alunos trocam ideias, negociam significados e desenvolvem argumentos. É conseguida, principalmente, através do confronto de

ideias na turma, sobre o trabalho elaborado por cada um e/ou pelos grupos; a terceira capacidade desenvolvida nos alunos é a de construir ou manipular objetos geométricos, uma vez que a construção material de objetos e o desenho geométrico com régua e compasso ou no computador são matematizações do real que possibilitam aos alunos a compreensão e interação de ideias geométricas; outra capacidade é a organização lógica do pensamento matemático, que diz respeito à forma como os alunos estruturam o pensamento geométrico, desde a visualização de figuras, que são reconhecidas pelo aluno pelo seu aspeto, até um nível superior onde compreendem os diversos sistemas axiomáticos para a geometria; a quinta e última capacidade diz respeito à aplicação dos conhecimentos geométricos noutras situações e deve ser desenvolvida com a realização de atividades geométricas.

Para o ensino da Geometria, o NCTM (2007) propõe um conjunto de normas que atravessa todos os níveis de ensino, a saber: analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas; especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação; aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas; usar a visualização e o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

No que diz respeito às Metas de Aprendizagem definidas para o 2.º ciclo na disciplina de Matemática, no domínio Geometria, estabelecem-se oito metas finais: identifica e utiliza as propriedades dos sólidos geométricos; compreende grandezas geométricas e respetivos processos de medida; usa a visualização e o raciocínio geométrico na resolução de problemas em contextos diversos; identifica e utiliza as propriedades das figuras geométricas no plano; relaciona vários tipos de ângulos; resolve problemas utilizando as propriedades das figuras geométricas no plano; compreende as noções e propriedades da reflexão, translação e rotação; usa a visualização e o raciocínio geométrico na identificação de isometrias.

O desenvolvimento do pensamento geométrico – teoria de van Hiele.

Sendo o tema desta investigação o desenvolvimento do pensamento geométrico, é inevitável falar de Dina e Pierre van Hiele. Na busca de um método pedagógico que levasse de um pensamento visual a um pensamento abstrato, este casal holandês, em meados da década de 50, desenvolveu na Universidade de Utrecht, sob a orientação de Hans Freudenthal, os seus estudos concebendo uma nova forma de focar o desenvolvimento do raciocínio em Geometria. Pierre preocupava-se pelo *insight* geométrico, mecanismo chave que permite aos alunos visualizar

diferentes campos, e Dina desenvolvia uma abordagem didática da Geometria recorrendo à manipulação das figuras, ao uso do geoplano e aos desenhos feitos pelos alunos com régua e compasso, os alunos desenhavam, dobravam, argumentavam, comparavam e observavam, desenvolvendo atividades que estão no centro das recomendações de hoje para as atividades geométricas (Matos, 1999). A teoria desenvolvida por este casal, de acordo com Clements e Battista e um grande número de investigadores, apresenta uma descrição exata do desenvolvimento do pensamento geométrico (Teixeira, 2008).

Para este casal holandês o pensamento geométrico dos alunos evolui através de níveis, começando num nível gestaltista-visual, e percorrendo níveis cada vez mais sofisticados de descrição, análise, abstração e prova (Battista e Clements, citados por Junqueira, 1994).

O modelo de van Hiele centra-se na ideia de que, no processo de aprendizagem da Geometria, o pensamento dos alunos passa por uma série de níveis de desenvolvimento do pensamento que, além de sequenciais, são ordenados, de tal modo que não se pode saltar/omitir nenhum. Cada um dos cinco níveis admite a compreensão e utilização dos conceitos geométricos de maneira diferente. De acordo com Jaime (1993), este modelo pode ser considerado descritivo, pois permite a identificação das diferentes formas do pensamento geométrico dos alunos e o reconhecimento do seu progresso; mas também possui uma componente instrutiva assente nas fases de aprendizagem. Estas fornecem orientações ao professor para desenvolver ambientes de aprendizagem que fomentem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e a passagem de um nível de pensamento ao seguinte, a partir de atividades específicas para cada uma das cinco fases.

Relativamente aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, na sua generalidade, o modelo de van Hiele considera a existência de cinco níveis, que se encontram descritos mais adiante. Verifica-se com alguma frequência a omissão do quinto nível, por parte de alguns investigadores, tal como Usiskin (1982, p. 79) que conclui que “o quinto nível, tal como nos é apresentado pelos van Hiele, não existe ou não se pode testar. Todos os outros níveis são testáveis”. Por outro lado, alguns investigadores incluíram um nível de pensamento geométrico anterior ao nível 1 de van Hiele, tal como Clements e Battista, em 1992, que apontam a existência do nível 0 – Pré-reconhecimento – precedente ao da visualização, em que o aluno não distingue exemplos de figuras geométricas de não exemplos, e as imagens mentais dessas figuras ainda não estão formadas (Teixeira, 2008).

No que concerne à numeração dos níveis de pensamento não há unanimidade, alguns autores referem-se aos níveis numa escala de 0 a 4 e outros dos níveis 1 a 5; é por isso necessário

esclarecer que nesta investigação será usada a última opção, por, tal como Jaime (1993), considerá-la “mais cómoda e evita confusões ao fazer coincidir os nomes dos níveis aos valores ordinais de cada nível” (p. 6).

De modo global, os cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico definidos por van Hiele apresentam as seguintes características gerais:

Nível 1 – Visualização ou Reconhecimento – as figuras são descritas de acordo com a sua aparência e de maneira imprecisa. Reconhecem-se as figuras como um todo, mas as suas propriedades geométricas não são entendidas. Os alunos, nesta fase, conseguem reproduzir figuras dadas e aprender vocabulário geométrico básico; Nível 2 – Descrição ou Análise – inicia-se a análise das partes/elementos e das propriedades da figura. Nesta fase, os alunos compreendem as características e propriedades das figuras, todavia não conseguem, ainda, estabelecer conexões entre essas propriedades, nem entre as figuras. Formulam definições com excesso de informação e de difícil entendimento; Nível 3 – Dedução Informal – há compreensão da existência de relações de propriedades dentro das figuras e entre figuras, deduzindo-se propriedades. Os alunos começam a ser capazes de compreender demonstrações feitas pelo professor, repeti-las e adaptá-las para situações semelhantes. As definições começam a ter significado, mas ainda não têm a visão global da demonstração, pelo que não conseguem desenvolver uma demonstração formal completa; Nível 4 – Dedução Formal – a geometria é entendida como um processo dedutivo. Os alunos são capazes de reformular teoremas, compreender e desenvolver demonstrações formais, servindo-se de axiomas; Nível 5 – Rigor – os sistemas axiomáticos são estudados. Realizam-se demonstrações abstratas, há compreensão e utilização de outras Geometrias, além da de Euclides.

Como referi, a teoria de van Hiele propõe uma progressão na aprendizagem através de cinco níveis de desenvolvimento. Essa progressão está condicionada pelo ensino, estando na mão do professor a escolha de tarefas adequadas à progressão dos alunos para níveis de pensamento superiores. Van Hiele refere que a “transição de um nível para o seguinte não é um processo natural; ela acontece sob a influência de um programa de ensino-aprendizagem” (van Hiele, citado por Teixeira, 2008, p. 45). De acordo com as fases de progresso e aprendizagem de Van Hiele apresentadas por Costa (2005), nesse programa de ensino-aprendizagem os alunos são guiados por tarefas que eles próprios estabelecem, ou que são estabelecidas pelo professor, para encontrar redes de relações entre os objectos que manipulam. Com base em discussões durante as quais os alunos dão a sua opinião acerca das regularidades que encontraram, estes tornar-se-ão conscientes das relações e exprimi-las-ão em palavras; trata-se de tornar explícitas através da

linguagem as estruturas observadas. No passo seguinte o professor dá aos alunos tarefas que lhes permitirão conhecer o tópico de diversas perspectivas e, finalmente, o professor assegura-se que os alunos reviram, refletiram no trabalho efetuado e que obtiveram uma perspetiva global sobre o assunto. Assim, para os alunos obterem um novo nível de pensamento precisam de desenvolver uma sequência didática constituída por cinco fases de aprendizagem: fase 1 - Informação – fase de diálogo e atividade entre professor e aluno, sobre os objectos a estudar; fase 2 - Orientação guiada – os alunos exploram os tópicos a estudar através de materiais que o professor introduz sequencialmente; fase 3 - Explicação (Explicitação) – baseando-se nas suas construções, os alunos expressam os seus conhecimentos sobre o que observaram; o papel do professor é mínimo; fase 4 - Orientação livre – os alunos exploram atividades mais complexas, que podem ser completadas de várias maneiras; fase 5 - Integração – os alunos reveem e resumem o que aprenderam, de modo a formarem uma rede de conhecimentos sobre os objetos e as suas relações. No fim desta fase, os alunos obtiveram, segundo van Hiele, um nível novo de pensamento (Jaime, 1993).

Crowley (1987, p. 4) refere as características gerais que os van Hiele identificaram como sendo definidoras do seu modelo: 1) Sequencial – os níveis são sequenciais. Não se consegue atingir o nível seguinte sem dominar os anteriores; 2) Avanço – a progressão ou não de um nível para outro depende dos métodos de ensino e não da idade; 3) Intrínseco e Extrínseco – os objetivos inerentes a um determinado nível tornam-se explícitos no nível seguinte; 4) Linguagem – cada nível tem a sua própria linguagem simbólica e o seu próprio conjunto de relações interligando esses símbolos; uma relação que é “correta” num certo nível, pode modificar-se noutra nível; 5) Combinação Inadequada – duas pessoas em níveis de pensamento diferentes não se conseguem compreender mutuamente. Para que a aprendizagem ocorra, professor e aluno precisam de estar a pensar no mesmo nível. Significa que o professor, o material didático, o conteúdo e o vocabulário devem estar adequados ao nível em que o aluno se encontra.

Desde a proposta da teoria de van Hiele, uma série de pesquisas tem sido feita na tentativa de dar resposta a um conjunto de questões relacionadas com a teoria de van Hiele (Jaime, 1993). Estas pesquisas têm seguido diferentes linhas de atuação. Umas concentram-se em testar a teoria de van Hiele e alguns dos seus pressupostos: verificar se os níveis de pensamento geométrico respeitam de facto uma hierarquia, investigar se o nível de pensamento geométrico de um aluno num determinado tópico da geometria se mantém nos diferentes tópicos, contestar que os níveis são discretos e identificar o nível mais básico do pensamento geométrico exposto pelos alunos (Pusey, 2003). Noutra linha de atuação, outras investigações preocupam-se em encontrar formas adequadas para avaliar os níveis de desenvolvimento do

pensamento geométrico e discutir as implicações dessas avaliações (Pusey, 2003). Ainda de acordo com esta autora, numa terceira linha de pesquisa sobre a teoria de van Hiele analisam-se os efeitos das intervenções, com alunos e professores, com base na aplicação do modelo. No caso dos alunos, a pesquisa tem procurado determinar se o processo de ensino-aprendizagem com base nas recomendações do modelo de van Hiele é eficaz no desenvolvimento do pensamento geométrico; no caso dos professores, a pesquisa procurou determinar se a aplicação do modelo para melhorar o conhecimento do conteúdo e da teoria é verdadeiramente útil para professores e alunos.

Um dos maiores estudos realizados usando o modelo de van Hiele foi o de Usiskin (1982). Este estudo pretendeu testar a capacidade da teoria de van Hiele para descrever e prever a performance dos alunos do secundário em geometria. Para tal desenvolveu um teste de múltipla escolha com 25 questões, cinco para cada nível de van Hiele, que serviu para determinar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de 2700 alunos de idades compreendidas entre os 14 e os 17 anos (Usiskin, 1982). Este teste incidia sobre ângulos, quadriláteros, triângulos e posição de retas no plano. A maior parte destes alunos revelou situar-se nos dois primeiros níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico. Este teste, embora criticado por alguns, foi largamente usado por vários investigadores (e.g., Senk, 1989; Junqueira, 1994; Mason, 1997), principalmente devido à sua fácil utilização e à falta de alternativas (Jaime, 1993).

Por sua vez, Burger e Shaughnessy (1986) preocuparam-se em desenvolver um modelo de entrevista individual e audiogravada, em vez do teste escrito, e envolveram 48 estudantes entre o 1.º ciclo e o ensino secundário. Pretendiam assim verificar se determinados níveis eram dominantes no pensamento dos alunos ao trabalhar numa tarefa em particular. Estas tarefas envolviam conhecimentos sobre triângulos e quadriláteros. Estes investigadores sentiram que os níveis de van Hiele podiam ser utilizados para determinar o nível de pensamento dos alunos e conseguiram atribuir determinados comportamentos a cada nível. O protocolo de entrevista que criaram permitiu-lhes comparar as respostas dos estudantes às mesmas situações.

Também Fuys, Geddes e Tischler (1988 citado em Pusey, 2003) conduziram uma investigação usando a técnica da entrevista clínica, em que alternaram fases de instrução e de avaliação. Assim, foi atribuído um “nível de entrada” e um “nível potencial” com base na alteração do pensamento evidenciado durante a entrevista, de alunos do 6.º e do 9.º anos de escolaridade. Nesse estudo verificou que nos alunos de 6.º ano, o “nível de entrada” concentrava-se no nível 0 (baseado na escala original de 0-4); o seu “nível potencial” manteve-se em alguns casos no nível 0, outros evoluiu para o nível 1 e a maior parte encontrava-se em transição para o

nível 2. Quanto aos alunos do 9.º, o seu “nível de entrada” oscilava entre os níveis 0 e 1; o “nível potencial” destes alunos manteve-se em alguns casos no nível 0, noutros no nível 1 e alguns alcançaram o nível 2.

Também Jaime (1993) se debruçou sobre o modelo de van Hiele. O seu objetivo era analisar alguns aspetos do modelo de van Hiele, de modo a conhecer melhor o próprio modelo de modo a utilizá-lo da forma mais eficaz no ensino da Matemática. Para determinar o nível de pensamento geométrico dos alunos, usou um teste de respostas abertas, aplicado a alunos cujos níveis de escolaridade iam do 6.º ano ao ensino secundário, que lhe permitiu uma contínua medição do grau de aquisição: nula, baixa, intermédia, alta e completa. No resumo da sua investigação (Jaime, 1993) apresentou a ambição de contribuir para um avanço na utilização do modelo de van Hiele com “a elaboração de um tipo de itens escritos de resposta livre que ajude a romper com a actual escassez de testes fiáveis para determinar o nível de pensamento dos alunos” (Jaime, 1993, p. ii). Neste estudo foi implementada uma proposta para o ensino das isometrias baseada nas fases de aprendizagem do modelo de van Hiele. Esta investigação mostrou que os alunos vão evoluindo nos níveis de desenvolvimento ao longo da escolaridade, mas não o desejável, pois antes de entrarem para o ensino universitário poucos foram os alunos que adquiriram completamente o 2.º nível de van Hiele e ainda menos os que mostraram, no mínimo, uma aquisição baixa do 3.º nível (Jaime, 1993).

Matos (1994) desenvolveu um estudo focado na aprendizagem do conceito de ângulo, nos 4.º e 5.º anos de uma escola americana. Nesta investigação serviu-se das respostas a tarefas dadas em teste escrito e entrevista para identificar e categorizar o modelo cognitivo de ângulo dos alunos e relacioná-los com os níveis de van Hiele. Na sua globalidade os alunos situaram-se no nível 1 de van Hiele, tendo sido raros os que evidenciaram possuir o nível 2 do pensamento geométrico.

Para determinar os níveis de van Hiele de 23 alunos de uma turma de 8.º ano, Mistretta (2000) usou um teste com questões de múltipla escolha e de resposta curta, correspondentes aos primeiros três níveis de van Hiele sobre conceitos geométricos, forma e área. Os resultados desta investigação revelaram que no final da unidade de geometria lecionada os alunos tinham atingido maioritariamente o nível 2 de van Hiele (baseado na escala original de 0-4), havendo ainda alunos com nível 0 e 1 (Mistretta, 2000).

Em Taiwan, Wu e Ma (2006) apresentaram os resultados de um estudo cujo objetivo principal era determinar a distribuição dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele de alunos entre o 1.º e o 6.º anos de escolaridade e comparar com os resultados da pesquisa de

Mayberry (1983). Este estudo encontrou: provas da hierarquia dos níveis de van Hiele; alunos com diferentes níveis para diferentes conceitos de figuras básicas; e casos de alunos que não atingiram o nível 1 para as figuras básicas (Wu & Ma, 2006). A maior parte dos alunos do 1.º e 2.º anos atingiu o nível 1 de van Hiele, do 3.º ao 6.º ano encontravam-se maioritariamente no nível 2, sendo que apenas os de 5.º e 6.º ano poderiam atingir o nível 3 (Wu & Ma, 2006). O instrumento utilizado neste estudo, o teste de Geometria de Wu (WGT), foi especificamente concebido para este projeto devido à não existência de instrumentos chineses adequados e disponíveis. Este instrumento foi projetado com base em descritores de van Hiele e em amostras de respostas identificadas por Fuys, Geddes e Tischler (1988). Havia 25 questões de múltipla escolha do primeiro nível de Van Hiele, 20 no segundo e 25 no terceiro; o teste incidia em três figuras geométricas básicas: triângulo, quadrilátero e círculo.

No Brasil foram várias as investigações envolvendo o modelo de van Hiele que utilizaram o teste apresentado no livro *Geometria segundo a teoria de van Hiele*, publicado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, designado por teste de Nasser (e. g. Guimarães, 2006; Inoue, 2004; Nasser, 1997). Este teste consiste numa adaptação do teste de van Hiele de Usiskin (1982), contendo 15 questões, algumas das quais de resposta aberta, distribuídas em três blocos, cada um deles correspondente a um dos níveis de van Hiele (Guimarães, 2006).

Em Portugal, Junqueira (1994) usou na sua investigação o modelo de van Hiele, aplicando o teste de Usiskin (1982) para determinar os níveis de van Hiele. Numa intervenção didática, levada a cabo numa turma do 9.º ano, investigou como é que os alunos exploram, realizam, justificam e investigam construções num ambiente de geometria dinâmica e de que forma isso os habilita a compreender objetos e relações geométricas, a formular conjecturas e a elaborar argumentos indutivos e dedutivos. No final desta intervenção, concluiu que a maior parte da turma tinha atingido o nível 2 de van Hiele, que um número considerável dos alunos não tinha atingido esse nível e que somente alguns tinham alcançado o nível 3 (Junqueira, 1994). Como refere a própria, estes resultados foram ao encontro dos obtidos em diversas investigações internacionais, que revelam que neste grau de escolaridade o pensamento geométrico dos alunos situa-se entre o nível 1 e nível 3 de van Hiele, havendo um predomínio do nível 2.

No estudo de Costa (2005) que visava, entre outros objetivos, reconhecer o nível de desenvolvimento geométrico evidenciado por alunos do 4.º ano de escolaridade, o modelo de van Hiele foi aplicado tanto para determinar o nível de van Hiele dos alunos, como na preparação das sessões de ensino sobre isometrias respeitando as fases de aprendizagem de van Hiele. No final da intervenção os alunos situavam-se globalmente no nível 1 de van Hiele e alguns, em número

reduzido, no nível 2.

A investigação de Teixeira (2008) desenvolvida com o objetivo de compreender como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, no 1.º ano de escolaridade, de forma a promover tarefas facilitadoras da sua evolução, estudou os conhecimentos geométricos dos alunos à chegada ao 1.º ciclo de acordo com os níveis de van Hiele. Segundo a investigadora, no final da investigação os alunos tinham tido um desempenho correspondente ao esperado para nível 1 de van Hiele.

Vários dos estudos que se debruçaram sobre a teoria de van Hiele questionaram alguns aspetos da mesma, nomeadamente a descontinuidade dos níveis (e. g. Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime, 1993; Matos, 1999; Usiskin, 1982). Segundo a teoria original de van Hiele, a passagem entre níveis sucessivos é discreta, faz-se de maneira brusca, como um salto (Jaime, 1993). Contudo, esta propriedade tem sido posta em causa, mais do que saltos, as investigações mostraram que “a interpretação descontínua dos níveis não pode explicar certas situações, bastante frequentes, de alunos que raciocinam simultânea ou alternadamente em dois níveis consecutivos” (Jaime, 1993, p. 16). As investigações de Burger e Shaughnessy (1986) e Usiskin (1982) apontam para a presença de alunos para os quais não se consegue determinar o nível ou que se encontram em transição. Alguns alunos exibem níveis diferentes na realização de tarefas diferentes (Burger & Shaughnessy, 1986). Deste modo, os níveis têm carácter mais dinâmico do que estático, o que reforça a sua continuidade, em prejuízo da sua natureza discreta (Burger & Shaughnessy, 1986). Jaime (1993) refere-se à localidade em oposição à globalidade para designar o aluno que possui raciocínios de diferentes níveis em função dos diferentes tópicos. Jaime (1993) defende a localidade dos níveis e a ideia de que van Hiele e Freudenthal partilham da mesma opinião ao sugerirem que “uma vez alcançado um determinado nível para um conceito ou área da Geometria, será mais fácil e rápido alcançar esse mesmo nível noutros conceitos ou áreas da Geometria” (Jaime, 1993, p. 15).

As transformações geométricas: isometrias

“As transformações geométricas são mudanças que se efetuam na posição, no tamanho e na forma” (Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga e Fão, 2010, p. 88). Relativamente às transformações estudadas no 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, estas não implicam mudança na forma nem no tamanho, apenas na posição. Referem-se às que envolvem os movimentos rígidos: virar, rodar e deslizar, ao que matematicamente se designa pelas isometrias: reflexão, rotação, translação e a reflexão deslizante, ou, ainda, composições das mesmas. Nas isometrias, a figura mantém as

dimensões e as amplitudes dos ângulos, sendo que podem preservar o sentido dos ângulos, tal como acontece com as translações e rotações, são as isometrias positivas; ou, pelo contrário, inverter o sentido dos ângulos tal como acontece na reflexão, é uma isometria negativa (Pimentel et al, 2010).

As isometrias no Programa de Matemática do Ensino Básico.

Segundo o PMEB (ME-DGIDC, 2007), o estudo das isometrias tem início no 1.º ciclo, sendo utilizadas na construção de frisos, e deverá ser aprofundado no 2.º ciclo, destacando-se que “as tarefas que envolvem as isometrias do plano devem merecer atenção especial neste ciclo, sobretudo as que dizem respeito a reflexões e rotações, pois permitem a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão” (p. 36). O mesmo documento refere que:

... as isometrias permitem desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações(...)) permite a exploração, construção e classificação de frisos e rosáceas (ME-DGIDC, 2007, p.37).

No caso do 1.º ciclo, as isometrias aparecem incluídas no tópico “Figuras no plano e sólidos”, no sub-tópico Reflexões e o PMEB apresenta como objetivos específicos: “identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo”, “desenhar no plano figuras simétricas relativas a um eixo horizontal ou vertical”, “identificar no plano eixos de simetria de figuras”; “construir frisos e identificar simetrias” e “construir pavimentações com polígonos”; na exploração de frisos, propõe que se identifiquem simetrias “de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)” (ME-DGIDC, 2007, p. 22-23).

Relativamente ao tópico “Reflexão, rotação e translação”, o PMEB define como objetivos específicos para o 2.º ciclo, não só:

...identificar, predizer e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado”, mas também “construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias (ME-DGIDC, 2007, p.38).

Para tal sugere a exploração de obras de arte e artesanato, o uso de imagens obtidas por composição de isometrias, a construção de figuras com mais de um eixo de simetria; e na rotação, a indicação do centro, do sentido e da amplitude do ângulo de rotação. Define, ainda, como objetivos específicos, “identificar as simetrias de frisos e rosáceas” e “construir frisos e rosáceas”, propondo, para a construção de rosáceas, “considerar a divisão do círculo num número par e ímpar de setores, desenhar uma figura (motivo) num dos setores, e, por decalque ou por dobragem, preencher os setores seguintes segundo uma regra (rodar ou refletir)” (ME-DGIDC,

2007, p.38). “Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias numa figura” e “completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias” são os restantes objetivos específicos apresentados no PMEB para o 2.º ciclo, no que concerne ao estudo das isometrias (ME-DGIDC, 2007, p.38). Este documento sugere ainda que na identificação dos eixos de simetria de uma figura, se deve dar particular relevo ao caso dos triângulos e considerar o número de eixos de simetria na classificação dos mesmos; por último apela ao uso de “espelhos e dobragens de papel, representações gráficas e applets” (ME-DGIDC, 2007, p.38).

No que diz respeito às Metas de Aprendizagem definidas para a disciplina de Matemática, no subdomínio Isometrias, vemos contempladas duas metas finais: compreende as noções e propriedades da reflexão, translação e rotação; usa a visualização e o raciocínio geométrico na identificação de isometrias. Para a meta final 24 definiram como metas intermédias até ao 6.º ano: identifica o transformado de uma dada figura através de uma isometria (reflexão, rotação, translação ou reflexão deslizante) e justifica; constrói o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias. Para a meta final 25, definiram: desenha padrões geométricos que envolvam simetrias; identifica as simetrias em figuras (polígonos, círculos, rosáceas, frisos); constrói frisos e rosáceas que envolvam um ou dois tipos de simetrias, identificando e justificando as simetrias em causa. Apesar da intenção das Metas em basear-se no PMEB e não ultrapassar os objetivos traçados no mesmo, relativamente às Isometrias as Metas vão um pouco além ao contemplar a *reflexão deslizante* nas metas intermédias.

Segundo Bastos (2007), a relevância que as isometrias assumem actualmente na matemática faz do estudo das transformações geométricas uma matéria à qual devemos dar a máxima importância. As isometrias permitem estabelecer diversas conexões, podem ser usadas para demonstrações, para resolver problemas e “para raciocinar sobre o plano e o espaço” (Bastos, 2007, p. 23).

As simetrias estão presentes nas mais variadas estruturas. São visíveis não só na natureza, como na decoração, na arquitetura, na música ou até na poesia. Um favo de mel, uma concha, as penas da cauda de um pavão, peças de loiça, utensílios, instrumentos musicais, edifícios e templos são alguns dos infinitos exemplos em que nos deparamos com a existência de simetrias. Estamos rodeados por elementos com simetria, de tal modo que até as culturas pré-históricas a compreenderam e usaram de forma intuitiva e funcional. De modo geral, todos, incluindo crianças, possuem “um sentido intuitivo de simetria, mas normalmente este sentido é vago e necessita de uma compreensão precisa” (Pimentel et al, 2010, p. 87).

A escolha das tarefas

As tarefas propostas podem ter uma grande influência na efetiva mudança do processo de ensino-aprendizagem, uma vez que as tarefas usadas na sala de aula e o modo como são exploradas (Ponte, 2009; Vale, 2009) são a base de toda a aprendizagem dos alunos.

“O aluno envolve-se em atividade em tarefas matemáticas, adquire *conhecimento matemático* e aprende a *praticar a sua Matemática*” (Christiansen & Walther, 1986, p. 58).

A aprendizagem da Matemática resulta do trabalho realizado pelo aluno, que por sua vez é condicionado pelas tarefas propostas pelo professor (ME-DGIDC, 2007). Assim, a planificação da aula realizada pelo professor deve contemplar vários momentos de trabalho e a utilização de diferentes tipos de tarefas e de recursos.

O NCTM (citado por Ponte, 2009) aponta oito características das tarefas matemáticas válidas para o ensino-aprendizagem desta disciplina:

a) Apelam à inteligência dos alunos; b) Desenvolvem a compreensão e aptidão matemática; c) Estimulam os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas; d) Apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático; e) Promovem a comunicação sobre Matemática; f) Mostram a Matemática como uma atividade humana permanente; g) Têm em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos; h) Promovem o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática (p. 102).

As tarefas não devem ser consideradas de forma isolada. Apesar do importante contributo que uma só tarefa possa dar à aprendizagem, é o conjunto delas que é determinante para que se alcancem todos os objetivos traçados para um determinado tópico (Ponte, 2009).

Uma das características essenciais e particulares das tarefas é estas poderem apresentar-se relacionadas entre si, organizadas em sequências coerentes, cadeias de tarefas, de modo a proporcionar uma trajetória de aprendizagem favorável ao aluno (Ponte, 2009). No sentido usado por Simon (1995) cadeias de tarefas correspondem a uma trajetória hipotética de aprendizagem. É hipotética considerando que só quando os alunos se envolvem nas tarefas é possível compreender o que fazem e como as interpretam. Para este autor, na planificação do seu ensino, o professor, ao decidir os conteúdos e as tarefas para aprendizagem desses conteúdos, toma decisões sobre um ciclo de aprendizagem, elaborando tarefas com as quais espera desenvolver nos alunos certas ideias e processos matemáticos, em que cada nova ideia ou procedimento assenta nas ideias ou procedimentos anteriormente desenvolvidos.

A compreensão concetual da matemática é fortalecida com a utilização de tarefas matemáticas desafiantes, aquelas que promovem o pensamento, o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas (Vale, 2009). Tarefas deste género, dão ao aluno um papel ativo no

processo de construção do conhecimento, o que se torna deveras importante, se considerarmos que o papel assumido pelo aluno nas aulas de matemática tem grande repercussão no tipo de conhecimento que produz.

De acordo com Christiansen e Walther (1986), a seleção das tarefas a propor aos alunos assume um dos aspectos fulcrais do trabalho do professor, sendo, juntamente com a metodologia escolhida para a sua realização, determinante no ambiente de aprendizagem da aula.

Deste modo, na escolha ou criação da tarefa, são vários os parâmetros que merecem a atenção do professor. Assim, as tarefas deverão ser motivantes e diversificadas, nomeadamente no que diz respeito à complexidade, ao nível de desafio, ao contexto, ao tempo de realização, ao material que requerem, ao modo como são apresentadas aos alunos, como estes as trabalham e como servem de base à discussão e institucionalização de novo conhecimento (Ponte, 2009). Contudo, Ponte (2005) adverte que “Não é uma ou outra tarefa pontual mais interessante que marca o estilo de ensino, mas sim o tipo de trabalho usual na sala de aula” (p. 24).

A diversificação de tarefas é condição indispensável, pois cada um dos tipos de tarefa tem um propósito que permite alcançar certo objetivo curricular (Ponte, 2005). Assim, de acordo com a natureza da tarefa, este autor estabeleceu quatro categorias de tarefas: as mais fechadas (exercícios, problemas), importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, relacionando diretamente os dados e os resultados; as mais acessíveis (explorações, exercícios), tornam possível um elevado grau de êxito, desenvolvendo a auto-confiança dos alunos; as mais desafiantes (investigações, problemas), proporcionam aos alunos uma efetiva experiência matemática; as mais abertas, fundamentais para o desenvolvimento da autonomia, da criatividade e da capacidade de lidar com situações complexas, etc.

Todo este processo implica uma mudança na prática dos professores, que, em vez de começar por apresentar a «matéria nova», começará por apresentar uma tarefa. Depois de se certificar de que os alunos a interpretam corretamente, segue-se o desenvolvimento da tarefa pelos alunos, frequentemente a pares ou em pequenos grupos. Depois, o momento fundamental e imprescindível de apresentação do trabalho dos alunos, promovendo a discussão e argumentação e, assim, o desenvolvimento da comunicação matemática. Aqui, o papel do professor será o de gestor. Gerir as intervenções dos alunos, de modo a não haver repetições e a realçar aquilo que de facto é mais importante discutir, e deste modo também gerir o tempo letivo. A aula termina com a síntese das principais ideias aprendidas, feita em conjunto pelo professor e pelos alunos. Assim, dá-se uma inversão daquele que é o sentido do ensino mais tradicional: a exposição da “matéria nova” no início da aula feita pelo professor, passa a surgir na

fase final, isto é, na conclusão do trabalho, como uma síntese, e realizada pelos alunos em colaboração com o professor (Ponte, 2009).

Neste contexto, e segundo também Vygotsky (citado por Costa, 2005), o professor deve ter o papel de mediador entre a criança e os objetos, e entre as crianças e os pares. Vygotsky enfatizava o processo histórico-social e o papel da linguagem no desenvolvimento do indivíduo. Para este teórico, o sujeito é interativo, pois adquire conhecimentos a partir de relações intra e interpessoais e de troca com o meio, num processo sócio-históricocultural, que se inicia mesmo antes de a criança chegar à escola. Nessa perspetiva, Vygotsky estabeleceu dois níveis de desenvolvimento - *real* e *potencial* – que usou para definir a *zona de desenvolvimento proximal*. Vygotski (citado por Costa, 2005) define este conceito como sendo “a distância entre o nível de desenvolvimento real a resolver problemas independentemente e o nível de desenvolvimento potencial determinado a resolver problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais competentes” (Costa, 2005, p. 66).

Se o professor sugere tarefas que estão para além da zona de desenvolvimento proximal da criança, certamente a criança não entenderá a tarefa, não será capaz de realizá-la ou realizá-la-á incorretamente. A formação de grupos de trabalho cooperativo, com crianças em diferentes níveis de aprendizagem, embora próximas na capacidade para a realização das tarefas, constitui outra estratégia de mediação importante. É importante que o mediador externo tenha significado para a criança, e que combine a mediação com o uso da linguagem e do contexto cultural. *In loco*, em contacto directo com as crianças, é possível observar o seu desempenho e saber como auxiliar para que a aprendizagem seja interiorizada, completando a passagem do interpessoal para o intrapessoal. Ao contrário da teoria de Piaget, que faz depender a aprendizagem do desenvolvimento cognitivo, circunscrevendo-a nos limites de cada estágio de desenvolvimento, Vygotsky advoga que a aprendizagem precede e condiciona o desenvolvimento cognitivo, podendo progredir mais rapidamente que o desenvolvimento e, regra geral, reverte em desenvolvimento.

Em suma, a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky é uma porta aberta para a aprendizagem, desde que o professor prepare, conceba e ponha em prática tarefas de ensino e aprendizagem que a mantenham aberta (Marques, s/d).

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

Tipo de estudo

Com este estudo é minha pretensão compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico a partir do contributo de um ambiente de ensino baseado nas fases de aprendizagem de van Hiele. Para responder da melhor forma ao problema levantado e às questões de investigação formuladas, optei por seguir uma investigação de natureza qualitativa.

A escolha por este tipo de abordagem prendeu-se com o objetivo deste estudo, que não pretende criar teorias nem generalizar resultados, mas sim compreender o modo como se desenvolve o pensamento geométrico a partir da aplicação de um ambiente de ensino no subdomínio das Isometrias, através do estudo de quatro alunos do 6.º ano de escolaridade, na esperança de compreender o que está “por trás” da construção do pensamento geométrico, descrevendo em que consiste esse pensamento. Para Merriam (1988), para se conhecer melhor o ser humano, ao nível do seu pensamento, deverão usar-se dados descritivos, resultantes dos registos e anotações pessoais de comportamentos observados.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa comporta em si cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados recolhidos são principalmente de carácter descritivo, contendo, entre outros, transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos e documentos pessoais; (3) o investigador qualitativo interessa-se mais pelo processo em si, do que meramente pelos resultados; (4) o investigador qualitativo faz a análise dos dados de forma indutiva; (5) o investigador interessa-se por tentar compreender o significado que diferentes pessoas atribuem às suas experiências.

Assim, a investigação, que seguiu um desenho de estudo de caso, foi realizada em ambiente natural, pelo investigador, que aqui desempenha o papel de observador participante e seguiu uma abordagem de carácter exploratório, descritivo e interpretativo. Exploratório, no sentido em que parti para esta investigação com objetivos pensados mas não concluídos e definitivos, pois que, numa investigação qualitativa, “nenhum plano detalhado é delineado antes da recolha de dados” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 83). Por exemplo, só após a recolha de dados do teste realizado (que permitiu situar os alunos nos níveis de van Hiele) é que pude determinar o ambiente de ensino a implementar. Descritivo, na medida em que pretendi descrever o

desempenho dos alunos na realização das tarefas e o modo como foram evoluindo no pensamento geométrico. Interpretativo, em virtude de ambicionar identificar pensamentos correspondentes aos diferentes níveis, de modo a situar os alunos nos níveis de van Hiele e avaliar a progressão nos mesmos. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 70), “o objetivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender a experiência humana. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados”.

A escolha por uma abordagem baseada em estudos de caso mostrou-se adequada, uma vez que a investigação se desenvolve em contexto de sala de aula, na presença dos demais alunos da turma, no seu ambiente natural e recorrendo a diferentes métodos de recolha de dados. Nas palavras de Yin (1993), o estudo de caso é indicado quando o investigador não possui o controlo dos acontecimentos e o que se pretende estudar é um fenómeno que se desenvolve em contexto real, necessitando-se de múltiplas fontes de evidências para o caracterizar. Na mesma linha de pensamento, Ponte (1994) esclarece, relativamente ao estudo de caso:

É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse (p. 4).

Ludke e André (1986), entre outras características, referem que os estudos de caso tendem à descoberta e que enfatizam a “interpretação em contexto”, pois todo o estudo desta natureza tem que considerar as características da situação em que ocorrem, uma vez que, para se compreender melhor alguns fenómenos, estes não podem ser isolados dos contextos em que estão inseridos. Assim, este “*design* de investigação” (Ponte, 1994) tenta retratar a realidade de forma completa e profunda.

Caracterização do contexto

A escola escolhida foi aquela onde desempenho as minhas funções de docente. Trata-se de uma escola que é sede do agrupamento em que se encontra inserida. É um edifício novo, constituído por duas alas e um corpo central. No 1.º andar, da ala sul, funcionam as atividades letivas do 1.º ciclo, num espaço que compreende doze salas de aula. No 1.º andar da ala norte, funcionam as atividades letivas do 2.º ciclo, num espaço que compreende oito salas de aula, duas salas de trabalho e ainda algumas salas específicas de utilização comum.

Durante o ano letivo em que este estudo se desenvolveu frequentavam esta escola 416 alunos distribuídos pelos três ciclos de escolaridade do ensino básico.

Participantes

A recolha de dados foi feita numa turma de 6.º ano de uma escola da região norte. As tarefas aplicadas envolveram toda a turma, constituída por 20 alunos, porém a observação recaiu apenas sobre quatro dos alunos, que constituíram os casos a estudar. Entre outros fatores que se encontram descritos no próximo tópico, a escolha desses alunos respeitou os seguintes critérios: serem singulares, uma vez que não pretendo fazer generalizações, interessa-me debruçar sobre alunos que pelas suas características se tornam únicos e não representativos da generalidade dos alunos de 6.º ano; estarem dispostos a colaborar no estudo e serem em número par para poderem desempenhar tarefas em pares. A sua singularidade está patente, essencialmente, nas diferentes posturas que assumem em relação à geometria e nos diferentes níveis de desempenho que possuem.

Caracterização da turma.

Das turmas onde lecionava matemática, uma de 5.º ano e outra de 6.º, optei pela segunda em virtude de ser o ano em que, de acordo com a gestão curricular do departamento, se prevê abordar o tópico que eu pretendia explorar, por outro lado, a turma de 5.º ano revelava muitas dificuldades na disciplina de Língua Portuguesa, o que poderia condicionar a realização das tarefas. A turma escolhida para esta investigação era constituída por vinte alunos, oito meninas e doze meninos, com idades compreendidas entre os dez e os treze anos. Destacam-se, nos extremos, um aluno que entrou para o 1.º ciclo com apenas cinco anos de idade (constituiu um dos alunos-caso) e um aluno que entrou para o 1.º ciclo já com sete anos de idade. A turma afigurava-se, por isso, relativamente equilibrada ao nível da faixa etária, já que a grande maioria dos alunos – catorze, que representam 70% da turma – nasceu no ano de 1999. Era bastante participativa e interessada por todas as disciplinas, com um desempenho globalmente satisfatório/bastante satisfatório nas várias disciplinas, à exceção de uma aluna que revelava dificuldades nas diferentes áreas disciplinares. Nesta turma, além da disciplina de Matemática, também lecionava Ciências da Natureza e Estudo Acompanhado.

Caracterização dos alunos-caso.

Para a escolha dos alunos que constituíram o foco desta investigação tive em atenção vários fatores. Um deles foi a disposição dos alunos na sala de aula, uma vez que a sala de aula onde se desenvolveram as sessões de ensino tinha as mesas dispostas em grupo e não pretendia desfazê-los. Sendo assim, a escolha dos alunos-caso teria de recair sobre os elementos de um dos

cinco grupos existentes, porquanto tive receio que a mudança de lugar alterasse, de alguma forma, o seu comportamento e o ambiente natural desta investigação. Novamente por uma questão de disposição dos grupos na sala, tive de optar por um dos dois grupos mais encostados à parede, onde se encontravam as tomadas para poder ligar a câmara de filmar de forma a não prejudicar a própria dinâmica das aulas e a circulação dos professores e alunos. Desses dois grupos, um deles era formado apenas por três alunos, tendo um Necessidades Educativas Especiais, facto que, por um lado, seria uma boa opção, contudo, devido à sua grande dislexia, tive receio que tal pudesse condicionar as suas respostas escritas. O outro grupo de alunos era formado por quatro elementos, três rapazes e uma rapariga e eram, à semelhança da maioria da turma, alunos aplicados e dois deles bastante participativos. As respostas dadas no questionário de opinião vieram apoiar a minha escolha, confirmando que se tratava de quatro alunos que entre eles reuniam características diferentes no que diz respeito à opinião sobre a aprendizagem da Geometria e com diferentes resultados na disciplina de Matemática: três alunos médios e um com resultados bons/muito bons. Estes alunos já faziam parte da mesma turma no 5.º ano.

Passo a descrever, sumariamente, cada um dos alunos-caso.

O Rogério.

O Rogério é um rapaz com 10 anos, o mais novo da turma, entrou com 5 anos para o 1.º ciclo. É muito engraçado, com uma postura mais infantil que o restante grupo-turma. É muito curioso e gosta muito de matemática, nomeadamente da geometria. Considera-se um bom aluno neste tema e acha a geometria muito fácil. Apesar de muito interessado pela matemática, nas aulas é bastante irrequieto, falador e tem alguma dificuldade em respeitar as regras de participação, tal é o entusiasmo por fazê-lo.

O Dinis.

O Dinis tem 11 anos e é um rapaz simpático, mas um pouco reservado e, dos quatro, o mais introvertido. Gosta bastante de matemática, mas não em particular da geometria, tema no qual considera ter resultados “satisfatórios” e ser “às vezes difícil”. Este aluno apresenta uma caligrafia muito irregular e muitos erros ortográficos, o que confere uma má apresentação dos trabalhos. É aplicado, bem comportado e tem uma boa participação oral que compensa as suas lacunas nos registos escritos.

O par Rogério e Dinis (RD).

Neste par, o Rogério, mais extrovertido, tornou-se o líder. Apesar de habituados a trabalhar os dois juntos, no início foram várias as vezes em que o Dinis se queixou do Rogério querer fazer tudo. Tal como no outro par, também neste estava presente um aluno com uma opinião muito positiva em relação à geometria, o Rogério, e outro com uma visão não tão favorável.

O Jorge.

O Jorge é um rapaz de 11 anos, responsável e sensível. A disciplina de Matemática é uma das suas preferidas; todavia, nas fichas de avaliação formativa, nem sempre consegue obter os resultados ambicionados e condizentes com a sua participação oral. É bastante atento e participativo. Considera ter resultados “bons” no que diz respeito à geometria e, para ele, este tema é “muito fácil”. Este aluno gosta particularmente de descobrir padrões, quer numéricos, quer geométricos, e reconhecer regularidades, estando, constantemente, a descobri-las, mesmo quando este não é o propósito da aula.

A Cláudia.

A Cláudia é uma rapariga de 11 anos, muito meiga, responsável e simpática, que adora escrever, ler, declamar poesia e representar. A disciplina de Matemática não é das suas preferidas, considera a geometria “difícil” e refere, neste tema, ter resultados “pouco satisfatórios”.

Apesar da Matemática, e em particular a Geometria, não ser a área em que se sente mais confortável, a Cláudia é bastante aplicada e, neste ano letivo, esteve muito empenhada em melhorar os seus resultados nesta disciplina.

A mãe desta aluna tem um problema de saúde do qual pode resultar a amputação de um dos membros. A operação da mãe em data coincidente com uma das sessões de aprendizagem, condicionou a participação desta aluna em algumas tarefas, pois não contendo o choro teve de se retirar da sala.

O par Jorge e Cláudia (JC).

Este par juntou um aluno com uma opinião muito positiva em relação à geometria, o Jorge, e outro com uma visão contrária. No início, este par não funcionou muito bem, porque a Cláudia assumiu uma atitude mais passiva, confiando nas decisões do colega. Após uma aula em

que o Jorge cometeu alguns enganos, a Cláudia mudou de atitude. A partir daí, embora o Jorge conseguisse desenvolver com mais facilidade as tarefas, a Cláudia, responsável por fazer o registro escrito, não o fazia sem antes discutir o porquê das suas conclusões e confrontar com a sua própria opinião.

Recolha de dados

Num estudo de caso não é exigido nenhum método particular de recolha de dados, mas Yin (1993) advoga que deverão ser usadas múltiplas fontes de evidência. Com esse intuito, neste estudo a recolha assentou principalmente em três fontes de dados com características descritivas, nomeadamente: as entrevistas; as observações diretas sobre a resolução das tarefas, feitas na sala de aula e também com recurso às gravações áudio e vídeo; e documentos vários.

Entrevistas.

Neste estudo, as entrevistas foram realizadas aos alunos-caso, sempre que possível, após a realização das tarefas e antes da discussão das mesmas no grupo turma, servindo para clarificar e obter informações que não consegui observar diretamente, tais como sentimentos, pensamentos e intenções. Permitiram-me saber qual a perspetiva do aluno sobre determinado assunto usando a sua forma própria de comunicar ou seja “recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 134).

Observações.

As observações, segundo Vale (2004) “são a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em atividade, em primeira mão, pois permitem comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz” (p. 181). Para Ludke e André (1986), tanto quanto a entrevista, a observação assume uma posição privilegiada nos estudos qualitativos, sendo uma ferramenta de trabalho que permite obter informações, por vezes não acessíveis de outro modo. Assumindo o papel de professora e ao mesmo tempo de investigadora, nem sempre esta tarefa me foi facilitada, pelo que tentei colmatá-la recorrendo a registos áudio e vídeo. Em seis das sessões de aprendizagem tive na sala uma professora, que me coadjuvou nessa turma durante o ano letivo, o que me possibilitou uma observação mais direta sobre os pares observados.

Documentos.

Segundo Ludke e André (1986), os documentos constituem uma fonte “natural” de

recolha de dados importante de onde podem ser retiradas evidências que confirmem as inferências sugeridas por outras fontes de dados e, por isso, necessária em quase todo o tipo de estudos de caso.

Dos documentos ou artefactos utilizados, que compreendem quer os registos produzidos pelos alunos (questionário, teste de van Hiele, tarefas) quer os registos produzidos pelo investigador (notas), ressaltam as tarefas propostas pela centralidade que assumem em todo o estudo. Todos estes documentos, desde os registos produzidos pelos alunos aos produzidos por mim, não esquecendo as transcrições das gravações, foram alvo de uma análise mais ligeira no decorrer da recolha de dados e mais aprofundada após esse momento, constituindo a base de análise da presente investigação.

Questionário.

Para levar a cabo esta investigação, comecei por aplicar um questionário de opinião adaptado do original de Mistretta (2000), cujo objetivo era averiguar, de forma rápida, a postura dos alunos da turma em relação à geometria. Este questionário era de resposta fechada, apresentando-se sob a forma de múltipla escolha (Anexo A). Foi passado a todos os alunos e antes de ter concluído a escolha dos alunos-caso, tendo este ajudado nessa decisão, nomeadamente no que diz respeito ao que sentem em relação à geometria estudada, à avaliação do seu desempenho nessa temática e ao grau de dificuldade que atribuem à mesma.

Teste.

Inevitavelmente, qualquer investigação que use o Modelo de van Hiele, e não seja exclusivamente teórica, inclui a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos implicados (Jaime, 1993). Assim, para determinar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, considerei necessária a aplicação de um teste antes das sessões de ensino. Para verificar se o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico sofreu evolução, o teste também foi passado no final das sessões de ensino.

Para isso, era forçoso criar um teste com tarefas ou questões. Porém, para o criar, foram várias as dúvidas que me assolaram. Após intensa pesquisa, constatei que para determinar esses níveis alguns investigadores optam pela entrevista gravada (e.g., Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Costa, 2005); outros optam por testes escritos com perguntas abertas e fechadas (e.g., Gutierrez & Jaime, 1998; Matos, 1999) e a maior parte opta pelo teste de múltipla escolha (e.g., Senk, 1989; Junqueira, 1994; Mason, 1997; Wu & Ma, 2006), tendo estes

usado, à exceção de Wa e Ma, o teste de van Hiele criado por Usiskin (1982). Alguns investigadores brasileiros (e. g. Guimarães, 2006; Inoue, 2004; Nasser, 1997) usam um teste contendo questões de múltipla escolha e algumas perguntas abertas.

Apesar da variedade de instrumentos, os testes usados com mais frequência para determinar os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, recaem sobre o estudo de polígonos, com questões relacionadas com a classificação de quadriláteros e propriedade dos paralelogramos, tópico que, por não fazer parte do atual Programa de Matemática para o 2.º ciclo, não poderia desenvolver na sala de aula, o que para mim se revelou um entrave. A elaboração de um teste que estivesse em consonância com os conteúdos que pretendia desenvolver pareceu-me ser o caminho mais certo. Porém, o pouco tempo que tinha disponível condicionou essa minha pretensão, tendo sido forçada a ir noutra sentida. De todos os instrumentos já validados de que tomei conhecimento, as tarefas usadas por Costa (2005) pareceram-me as mais adequadas ao nível dos conteúdos. O ambiente de ensino a implementar na sala de aula incide sobre as isometrias, transformações estudadas no 2.º ciclo, que envolvem os movimentos rígidos (voltar, deslizar e rodar) e, por tal motivo, achei de todo conveniente realizar um teste com base nas tarefas de Costa (2005) que se referiam a esses mesmos movimentos. Partindo daquelas, fiz ligeiras adaptações, absolutamente necessárias, atendendo ao modo como seriam administradas. Limitada pelo fator tempo e pelo facto de assumir em simultâneo dois papéis, o de professora da turma e o de investigadora, optei por escolher apenas cinco das tarefas de Costa (2005) e proceder a algumas alterações no sentido de poder implementá-las, sob a forma de teste (Anexo B), na sala de aula, a todos os alunos. A utilização deste teste teve como objetivo determinar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo os níveis de van Hiele, antes e depois da aplicação de um ambiente de ensino com vista ao desenvolvimento do tópico “Reflexão, rotação e translação”. Este teste foi administrado, antes e depois das sessões de ensino, a toda a turma numa aula de 45 minutos. Posteriormente entrevistei individualmente cada um dos alunos-caso. Nessas entrevistas, para poder clarificar alguns aspetos das suas respostas, coloquei outras questões que foram surgindo de acordo com o diálogo que ia sendo estabelecido com o aluno. Com este teste pretendi aferir a forma como alunos de 6.º ano, e em particular quatro desses alunos, descreviam cada uma das situações, o vocabulário usado para descrever esses movimentos e a necessidade de serem mais ou menos precisos nas suas indicações. Nesta fase, interessou-me não tanto o modo como visualizaram o movimento, mas sim os termos usados para o descrever.

Para codificar as respostas, usei os descritores dos níveis de pensamento para

movimentos elementares apresentados e utilizados por Costa (2005) que se baseiam na codificação de Lewellen. Estes descritores serviram inteiramente para determinar os níveis 1 e 2 do desenvolvimento do pensamento geométrico, mas não puderam ser usados para determinar o nível 3. A presença de raciocínios próprios do nível 3 foi identificada com base na descrição que vários investigadores apresentam (e.g. Jaime, 1993; Costa, 2005) para os níveis de van Hiele.

Tarefas.

O ambiente de ensino implementado contou com as tarefas desenvolvidas e com a sua sequenciação, mas também com o modo como eram exploradas, com os materiais disponibilizados e utilizados pelos alunos e com os momentos de discussão global e de síntese.

As tarefas foram pensadas com os seguintes propósitos: analisar o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias, aferir as dificuldades manifestadas durante a realização das mesmas, desenvolver o conhecimento sobre as transformações geométricas e, por último, contribuir para a evolução nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico.

A sequenciação das tarefas foi feita de acordo com as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele e tendo como referência a proposta de Jaime (1993) para o ensino de translações, rotações e reflexões com base na teoria de van Hiele.

As figuras usadas em toda a sequência de tarefas encontraram-se relacionadas com símbolos musicais. Essa escolha prendeu-se com o facto de os alunos da turma serem estudantes da academia de música e, como tal, eu ter considerado ser favorável trabalharem com figuras com as quais se sentem à-vontade, podendo funcionar como fator de motivação. Além disso, entre estes símbolos podem encontrar-se tanto figuras simétricas como assimétricas, o que permite a exploração de diferentes situações.

A implementação das tarefas ocorreu durante as aulas do 3.º período, ocupando os meses de maio e junho, num total de 11 sessões, ou seja, 11 blocos de 90 minutos. Para tal, tive necessidade de recorrer, também, a aulas da área curricular de Estudo Acompanhado. No horário letivo, toda a turma foi sujeita ao mesmo ambiente de ensino, trabalhando todos em pares, exceto nos momentos de discussão e apresentação das respostas, sempre em grande grupo.

Foram seis as tarefas apresentadas (Anexo C). As tarefas 1, 2 e 3 foram desenhadas para o nível 1 do pensamento geométrico com os seguintes objetivos: compreender que as isometrias conservam a forma e as dimensões da figura original; reconhecer e distinguir as três isometrias em causa; realizar translações, reflexões e rotações com e/ou sem o auxílio do material de apoio;

descobrir características visuais de cada uma das isometrias em causa: a mudança ou não de posição, conservação da inclinação e a inversão ou não da figura; introduzir vocabulário apropriado: translação, reflexão, rotação, simetria, isometria, transformado, eixo de reflexão, centro de rotação, amplitude do ângulo de rotação, direção e sentido. Para todas as tarefas desenvolvidas neste nível do pensamento geométrico, foi disponibilizada uma caixa contendo: as diferentes figuras apresentadas ao longo desta primeira sequência de tarefas em acetato (Anexo D-2), mira, transferidor, régua, cola, círculos em acetato (Anexo D-1) e piónés. Esta caixa, juntamente com um portefólio onde os alunos iam organizando as tarefas realizadas, era distribuída no início de cada uma das aulas e era usada livremente de acordo com as necessidades dos pares.

Assim, para o desenvolvimento da 1.ª Fase de van Hiele – Informação, foram apresentadas situações para verificar o conhecimento prévio dos alunos. Em pares, os alunos desenvolveram a tarefa 1. Para tal, receberam o enunciado e a caixa com o material. Com esta tarefa, pretendi aferir o vocabulário usado pelos alunos para descrever as transformações que ocorrem no plano e introduzir o novo vocabulário e chegar a outros sinónimos para os movimentos descritos e/ou introduzir os termos: reflexão, translação e rotação.

Durante a 2.ª Fase de van Hiele – Orientação dirigida, os alunos realizaram investigações, com o material que lhes foi proporcionado, que objetivaram a descoberta, a compreensão e a aprendizagem de conceitos geométricos. Continuaram um friso (tarefa 2A), colando o material fornecido e aplicando ao motivo dado cada uma das transformações abordadas. Ao mesmo tempo, foram explicando como procediam para completar o friso. A partir de pares de figuras (tarefa 2B), reconheceram as características visuais das isometrias em causa, assinalando figuras obtidas por cada uma das três transformações e justificando as suas opções.

As tarefas 2A e 2B foram usadas, também, na 3.ª Fase de van Hiele – Explicitação. Nesta fase, os alunos foram estimulados a expressar as suas ideias oralmente e a registar os resultados, ocorrendo troca de ideias entre os alunos e discussões entre a turma e o professor, como defendido por Jaime (1993). Durante esta fase, os alunos discutiram as conclusões tiradas das tarefas anteriores.

A fase seguinte, 4.ª Fase de van Hiele – Orientação livre, é aquela que, segundo van Hiele, permite ao aluno o encontro dos seus próprios caminhos para a resolução de problemas, aplicando os conhecimentos e linguagem adquiridos na fase anterior. É a fase do início da transição de um nível para o outro. Aos alunos foi fornecida uma pavimentação feita com o motivo da clave de sol (tarefa 3A). Coube aos alunos identificar a(s) isometria(s) em causa,

descrevê-la(s) e completá-la(s). Depois, criaram a sua pavimentação e reproduziram-na no *Geometer's Sketchpad* (GSP), registando os passos. Por outro lado, com a tarefa 3B, os alunos foram desafiados a construir o “dominó isométrico” a partir do motivo da clave de sol ao qual tiveram de aplicar diferentes isometrias de modo a poder formar peças de dominó. A tarefa 3C surgiu da necessidade de apresentar exemplos de figuras simétricas, ainda não contempladas nas tarefas anteriores.

Por último, na 5.ª Fase de van Hiele – Integração, o professor não introduz nada de novo. Os alunos constroem uma visão geral do tema. Cabe ao professor estimular e orientar as trocas de experiências, de modo a que as novas aprendizagens se encaixem nas estruturas existentes (Costa, 2005). Esta fase consistiu no momento de partilha das descobertas feitas a partir da discussão das respostas às tarefas 3A, 3B e 3C. O desenvolvimento desta fase de aprendizagem na turma foi tendo lugar ao longo da implementação da tarefa 3, à medida que os alunos iam finalizando as várias etapas (3A, 3B e 3C), e não no final de toda a tarefa 3.

As cinco fases de aprendizagem não se encontram associadas a um determinado nível do desenvolvimento do pensamento geométrico, pretendem organizar as atividades de modo a permitir a passagem para o nível do pensamento geométrico seguinte. Assim, em cada nível, as sessões de ensino devem começar com atividades da 1.ª fase, que em alguns casos pode ser ultrapassada, continuando com atividades das fases seguintes, sendo que “ao finalizar a quinta fase, os alunos devem ter alcançado o nível de pensamento seguinte” (Jaime, 1993, p.9). Deste modo, espera-se que depois de seguidas estas cinco fases de aprendizagem respeitante ao nível 1, os alunos tenham conseguido alcançar o nível 2 de van Hiele.

As tarefas 4, 5 e 6 foram pensadas em consonância com os objetivos propostos para o nível 2 do pensamento geométrico e também de acordo com as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele. De forma geral, os objetivos que correspondem ao nível 2 são: descobrir, reconhecer e utilizar adequadamente as propriedades que caracterizam cada uma das isometrias; utilizar o vocabulário matemático adequado; realizar composições de rotações de mesmo centro, reflexões de eixos paralelos e translações e generalização de resultados; descobrir simetrias em rosáceas; construir rosáceas; determinar, na rotação, o centro, o sentido e a amplitude do ângulo de rotação; determinar, na reflexão, o eixo; determinar, na translação, a direção, o sentido e a sua grandeza. Para a realização das tarefas correspondentes a este nível, os alunos continuaram a ter à sua disposição um portefólio e uma caixa de materiais, que agora continha: cola, diferentes figuras em acetato (apenas para a construção das rosáceas – tarefa 6), transferidor e régua. Tal

como aconteceu no desenvolvimento das tarefas do 1.º nível do pensamento geométrico, a utilização do material foi da responsabilidade dos pares.

Tabela 1

Relação entre as fases de aprendizagem, tarefas implementadas e objetivos das sessões de ensino

Fases de aprendizagem	Tarefas	Objetivos da sessão	Sessões
1.ª Fase - Informação	Tarefa 1	Aferir/introduzir algum vocabulário. Identificar/descrever a isometria em causa.	1.ª
2.ª fase – Orientação dirigida	Tarefa 2A	Construir frisos segundo uma determinada isometria. Compreender que as isometrias conservam a forma e as dimensões da figura original.	2.ª
	Tarefa 2B	Descobrir características visuais de cada uma das isometrias em causa: a mudança ou não de posição e a inversão ou não da figura.	
3.ª fase – Explicitação		Utilizar o software de geometria dinâmica (GSP). Partilhar descobertas feitas.	3.ª
4.ª fase – Orientação livre	Tarefa 3A	Reconhecer e distinguir as três isometrias em causa. Construir pavimentações.	4.ª
		Realizar translações, reflexões e rotações com e sem o auxílio do material de apoio. Utilizar o software de geometria dinâmica (GSP).	5.ª
5.ª fase - Integração	Tarefa 3B	Descobrir as peças que compõem o dominó formado pelos transformados do motivo dado.	6.ª
	Tarefa 3C	Reconhecer figuras simétricas, identificando e caracterizando a simetria presente. Partilhar descobertas feitas.	7.ª
2.ª fase – Orientação dirigida	Tarefa 4	Descobrir, reconhecer e utilizar adequadamente as propriedades que caracterizam cada uma das isometrias.	8.ª
		Determinar, na rotação, o centro, o sentido e a amplitude do ângulo de rotação.	
3.ª fase - Explicitação	Tarefa 5	Determinar, na reflexão, o eixo de simetria.	9.ª
		Determinar, na translação, a direção, o sentido e a grandeza. Utilizar o vocabulário matemático adequado. Partilhar descobertas feitas.	
4.ª fase – Orient. livre	Tarefa 6	Realizar composições de rotações de mesmo centro e generalização de resultados.	10.ª
5.ª fase - Integração		Descobrir simetrias em rosáceas. Construir rosáceas. Partilhar descobertas feitas.	11.ª

O facto de se ter vindo a aplicar uma sequência de tarefas sobre o tema, dispensou a aplicação da 1.ª fase de aprendizagem do nível 2 do pensamento geométrico, uma vez que já

detinha informação sobre os conhecimentos e o nível de pensamento em que os alunos se encontram. “ Quando existe previamente essa informação não é necessário a realização de um trabalho específico nessa fase. Geralmente acontece quando se produz um ensino contínuo que inclui a passagem de um nível para o seguinte” (Jaime, 1993, p. 9).

Para o desenvolvimento da 2.ª fase de aprendizagem, os alunos realizaram a tarefa 4: perante três frisos contendo as três isometrias estudadas, e seguindo um guião, foram levados a tirar algumas conclusões acerca das propriedades de cada uma delas. A tarefa 5 foi desenvolvida como forma de aplicar as descobertas feitas na tarefa 4. A apresentação das respostas foi realizada na sala de aula e juntamente com a discussão da tarefa 4 serviu para desenvolver a 3.ª fase de aprendizagem. Assim, durante esta fase, os alunos discutiram as conclusões tiradas das tarefas 4 e 5. No final desta atividade os alunos efetuaram o registo das conclusões.

Na 4.ª fase de aprendizagem, foi dada aos alunos uma tarefa (tarefa 6) que teve como objetivo aplicar e desenvolver conhecimentos adquiridos na fase anterior. Puderam utilizá-los na construção de rosáceas com material manipulável ou no GSP. Por fim, seguiu-se a 5.ª fase, na qual mostraram as rosáceas criadas, identificaram e descreveram a(s) isometria(s) em causa. A partir da tarefa 6, que pedia para registar o número de simetrias de rotação e de reflexão, e por comparação com as respostas obtidas pelos outros pares, os alunos chegaram a generalizações sobre o número de simetrias de rotação e de reflexão das rosáceas.

A tabela 1 estabelece a relação entre as fases de aprendizagem, as tarefas implementadas e os objetivos de cada uma das sessões de ensino.

Análise de dados

Sendo este estudo de carácter qualitativo, a análise dos dados foi ocorrendo mediante a sua recolha, “a análise de dados verifica-se ao longo de toda a investigação, se bem que seja normalmente nas fases finais que os dados são analisados de forma mais sistemática” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 84). Isso permitiu-me fazer algumas adaptações e alterações no decorrer da investigação. Disso é exemplo a tarefa 3C, última das tarefas destinadas ao 1.º nível do desenvolvimento do pensamento geométrico, criada após a implementação da tarefa 3B, por se verificar a existência de algumas lacunas no que diz respeito a figuras simétricas. Não obstante, a análise mais aprofundada e formal foi realizada no final da recolha de dados. Esta compreendeu várias leituras de todo os documentos produzidos, incluindo as transcrições das gravações áudio e vídeo, que permitiram a identificação de padrões e a organização de todo o material recolhido em categorias de análise, não descurando a análise das várias partes como um todo. As categorias de

análise foram criadas de acordo com o problema desta investigação, as questões de investigação que a conduziram e a fundamentação teórica.

Primeiramente, analisei as respostas dos testes individuais, complementadas pela entrevista, utilizando-as para situar os alunos nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. O teste individual foi adaptado das tarefas de Costa (2005) e na análise das respostas usei a codificação utilizada pela mesma, baseada na de Lewellen (1992). Tal como Costa (2005), as respostas às tarefas foram codificadas de modo a caracterizar os três movimentos (deslizar, virar e rodar) separadamente:

Deslizar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. “Move isto sobre aqui”, “fá-lo baixar”. Impreciso.
- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. Ex: “move isto para a direita 5 espaços, para baixo 2 espaços”.
- 3 - Usa o termo “desliza” mas não especifica a quantidade ou direção. Ex: “desliza para aqui”; “desliza-o diagonalmente”.
- 4 - Usa o termo “desliza” mas não especifica ambas, a quantidade e a direção. Ex: “desliza para a direita”; “desliza-o três pontos”.
- 5 - Usa o termo “desliza” mas não especifica ambas, a quantidade e a direção, porque uma delas é especificada, usando imagens cinestésicas.
- 6 - Usa o termo “desliza” e especifica tanto, a quantidade e a direção do deslize, mas comete algum erro na especificação.
- 7 - Usa o termo “desliza” e especifica corretamente a quantidade e a direção do deslize.
- 8 - Outra.

Virar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. Ex: “volta isto”. Impreciso.
- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. Ex: “volta isto, conservando-o no mesmo lugar”; “volta-o com esta linha”.
- 3 - Usa o termo “virar” mas não especifica unidades ou linha de viragem. Ex: “vira-o sobre”.
- 4 - Usa o termo “virar” mas não especifica a linha de viragem. Ex: “vira-o sobre, conservando-o no mesmo lugar”; “vira-o conservando a ponta no cimo”. Tenta ser preciso.

- 5 - Usa o termo “virar” mas não especifica a linha de viragem com precisão. Ex: “vira-o sobre uma linha vertical”. Sabe que é necessária uma linha de viragem.
- 6 - Usa o termo “virar” e especifica a linha de viragem, mas comete um erro na especificação, ou indica a linha usando imagens cinestésicas.
- 7 - Usa o termo “virar” e especifica corretamente a linha de viragem.
- 8 - Outra.

Rodar

- 0 - Não menciona.
- 1 - Usa linguagem informal. Ex: “move-o como isto”; “vai à volta”. Impreciso.
- 2 - Usa linguagem informal, mas tenta ser preciso. Ex: “move-o à volta de forma que a ponta está no cimo”; “anda 90º à volta deste ponto”.
- 3 - Usa o termo “rodar” mas não especifica centro, direção ou quantidade. Ex: “roda-o à volta”.
- 4 - Usa o termo “rodar”, e tem em conta um dos três parâmetros: centro, quantidade e direção. Ex: “roda 90º, mas nenhuma direção ou centro de rotação” ou “roda em torno deste ponto”, com nenhuma quantidade ou direção.
- 5 - Usa o termo “rodar” e tem em conta dois dos três parâmetros. Ex: “roda para a direita 90º”, mas nada diz sobre o centro de rotação ou “roda para a esquerda à volta deste ponto” sem qualquer direção. Tenta ser preciso. Usa o termo “rodar”, e tem em conta um dos três parâmetros, mas está a indicar o outro usando imagens cinestésicas.
- 6 - Usa o termo “rodar” e tem em conta os três parâmetros: centro, quantidade e direção, mas comete um erro nas especificações. Usa o termo “rodar”, e tem em conta dois dos três parâmetros, mas está a indicar o outro usando imagens cinestésicas.
- 7 - Usa o termo “rodar”, e corretamente especifica o centro de rotação, a quantidade e a direção da rotação.
- 8 - Outra.

Seguidamente, analisei as tarefas desenvolvidas em pares durante o ambiente de ensino implementado, as entrevistas individuais que as seguiram, os registos das gravações e as minhas notas de modo a: caracterizar o desempenho na realização das tarefas, verificar as dificuldades sentidas e compreender como os alunos evoluem nos níveis do pensamento geométrico ao longo das tarefas propostas. Por último, analisei as respostas ao teste realizado após a implementação do ambiente de ensino e comparei com as respostas do 1.º teste. Esta análise permitiu-me

verificar a qualidade dos conhecimentos adquiridos, situar os alunos nos níveis de van Hiele e assim compreender o contributo do ambiente de ensino implementado na evolução do pensamento geométrico.

A tabela 2 traduz a relação entre as questões de investigação, os métodos de recolha de dados utilizados, as categorias de análise definidas e a distribuição ao longo do tempo.

Tabela 2

Relação entre as questões de investigação, métodos de recolha de dados, categorias de análise e distribuição no tempo

Questões de investigação	Método de recolha de dados	Categorias de análise	Tempo
i) Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico se encontram os alunos no 6.º ano de escolaridade?	- Teste; - Entrevista;	Nível de pensamento geométrico proposto por van Hiele com base na codificação de Lewellen (1992 citado por Costa, 2005)	abril de 2011
ii) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias?	- Tarefas (6) em pares;	Modo como os alunos evoluem nos níveis do pensamento geométrico ao longo da sequência de tarefas propostas; Capacidade de realizar as tarefas em par; Raciocínio utilizado nas tarefas; Expressão escrita e oral do pensamento do aluno; Dificuldades manifestadas.	maio e
	- Entrevista	Expressão oral do pensamento do aluno; Raciocínio utilizado nas tarefas; Dificuldades manifestadas.	junho de
iii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução das tarefas e como se pode ultrapassar essas dificuldades?	- Registos das observações das aulas	Organização do seu trabalho; Comportamento dos alunos perante as tarefas; Dificuldades manifestadas.	2011
	- Teste final individual	Qualidade dos conhecimentos adquiridos; Expressão escrita do pensamento do aluno; Dificuldades manifestadas; Raciocínio utilizado nas tarefas.	

Calendarização

A tabela 3 mostra de que forma foram geridas as diferentes etapas do estudo ao longo do tempo.

Tabela 3

Gestão das etapas do estudo

Revisão da literatura	setembro de 2010 a novembro de 2011
Preparação da intervenção pedagógica: - Pesquisa de testes para determinar o nível de van Hiele; - Pesquisa de tarefas; - Seleção e adaptação de tarefas; - Pedidos de autorização/ contacto com a Direção da escola e Enc. de Educação;	outubro a abril de 2011
- Seleção dos grupos de observação; - Aplicação do questionário de opinião; - Aplicação do Teste de van Hiele.	abril de 2011
Recolha de dados: - Resolução das tarefas; - Gravações áudio e vídeo; - Observação participante (notas); - Entrevistas; - Transcrição das gravações e das entrevistas.	maio e junho de 2011
Análise e interpretação dos dados: - Elaboração do relatório final.	maio a setembro de 2011

CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo começo por apresentar a opinião dos alunos-caso relativamente a alguns aspetos da geometria, recolhida através do questionário de opinião.

De seguida, caracterizo, individualmente, o modo como os alunos responderam às questões do teste antes e após a implementação do ambiente de ensino.

Em terceiro lugar, descrevo o modo como cada par desenvolveu cada uma das tarefas, analiso o seu desempenho na realização das mesmas, identifico algumas dificuldades manifestadas e apresento uma síntese em que aponto o nível de pensamento geométrico manifestado pelo par na resolução da tarefa.

Por fim, apresento uma síntese de cada um dos alunos-caso, em que caracterizo o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, o desempenho na resolução das tarefas, as dificuldades manifestadas e o contributo dado pelo ambiente de ensino na evolução nos níveis de van Hiele.

No decurso da análise de dados, serão apresentados alguns diálogos estabelecidos entre mim e os alunos ou entre eles. De modo a facilitar a escrita e a leitura dos mesmos, serão usadas abreviaturas, assim, “Prof.” em vez de “professora” e as iniciais dos nomes fictícios dos alunos-caso: “C” para Cláudia, “D” para Dinis, “J” para Jorge e “R” para Rogério.

O questionário de opinião

O questionário de opinião usado (Anexo A) baseou-se no original de Mistretta (2000) e teve como objetivo averiguar a postura dos alunos da turma em relação à geometria. Foi passado a todos os alunos e antes de ter concluído a escolha dos alunos-caso, de modo a corroborá-la. No que diz respeito ao que sentem em relação à geometria estudada, à avaliação do seu desempenho nessa temática e ao grau de dificuldade que atribuem à mesma, reuni nos quatro alunos escolhidos uma diversidade de opiniões. Um dos alunos-caso, a Cláudia, considerou os seus resultados em geometria “pouco satisfatórios”, outro, o Dinis, “satisfatórios” e os restantes dois “bons”. Relativamente à geometria que estudaram, as opiniões dividiram-se entre “gostar”, foi o caso da Cláudia e do Dinis e “gostar muito”, no caso do Jorge e do Rogério. Quanto à dificuldade que sentem neste tema, a Cláudia considerou a geometria “difícil”, o Diogo “às vezes difícil” e os outros dois alunos “muito fácil”. Dois dos alunos escolhidos para este estudo, o Jorge e o Rogério, tiveram a mesma opinião relativamente as estas três questões, mas nas restantes

notou-se uma diferente perspectiva em relação à aprendizagem da geometria, considerando o Jorge que não teve de memorizar “muitas coisas” e teve de usar a capacidade de raciocínio “às vezes”, e o Rogério que teve de memorizar “algumas coisas” e de usar a capacidade de raciocínio “muitas vezes”.

O teste individual

Como já referi, para determinar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele em que os alunos se encontravam, antes e após a implementação do ambiente de ensino, recorri a cinco das tarefas usadas por Costa (2005) para o mesmo efeito e elaborei o que designei por teste escrito (Anexo B). Para análise das respostas utilizei a codificação de Lewellen (1992, citado por Costa, 2005) para movimentos elementares, descrita no capítulo III. Esta codificação assenta no grau de sofisticação da resposta (Costa, 2005), sendo que o código 7 é o mais elevado e é usado quando na sua resposta o aluno identifica os três movimentos (virar, rodar e deslizar), referindo todos os elementos que o caracterizam e de forma correta. Este código representa o nível 2 (Descritivo/Analítico) de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. O código 0 é o mais baixo e é atribuído quando o movimento não foi mencionado e identifica o nível 0 (Pré-reconhecimento) de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. Os códigos 1, 2, 3, 4 e 5 representam respostas de qualidade crescente de nível 1 (Visualização/ Reconhecimento) de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares. O código 6 representa a transição do nível 1 para o nível 2 (Descritivo/Analítico). É atribuído às respostas que parecendo estar num nível mais elevado ainda usam a linguagem do nível 1 ou estão a oscilar entre os dois níveis.

Tive algumas dúvidas na codificação das respostas dadas no teste final, uma vez que a codificação utilizada não prevê o uso das expressões “reflexão”, “rotação” e “translação”. Face a este obstáculo, decidi encaixar as respostas nos códigos de 3 a 7, usando o termo “reflexão” como sinónimo de “virar”, “rotação” como “rodar” e “translação” como “deslizar” e dentro de cada código utilizar as restantes características do mesmo. Para o movimento “deslize”, não foi considerada a última questão do teste, por verificar que nenhum dos alunos precisou de usar esse movimento.

Na síntese de cada um dos alunos-caso é apresentado um quadro comparativo da codificação das respostas às cinco questões do teste, para cada um dos movimentos rígidos, antes e após a implementação do ambiente de ensino. De referir que, para o mesmo movimento e nas várias questões, pode haver códigos diferentes. O código que irá caracterizar o estudante será

aquele que, para o mesmo movimento, aparecer com maior frequência nas respostas às questões. Na situação de, para o mesmo movimento, todos os códigos atribuídos às tarefas forem diferentes, ser-lhe-á atribuído o código mais baixo; se houver códigos iguais aos pares, usa-se o código diferente para desempatar (Costa, 2005).

Rogério.

Na questão I(A) e (B), *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu transformar mentalmente as figuras. Para melhor descrever os movimentos para construir a “casa” numerou as peças identificando as mesmas na pavimentação da “casa”. Tanto para as rotações como para as reflexões o aluno usou o termo “virar”. Quando se quis referir à reflexão, usou a expressão “virar ao contrário, de pernas para baixo”, quando se quis referir à rotação, usou o termo “virar 90⁰” ou ainda “virar 180⁰ para a direita ou para a esquerda”. Como se vê, usa o termo “virar” tanto para definir a rotação como a reflexão, no entanto, para a rotação indica a amplitude do movimento. Quanto ao movimento “virar” também usou a expressão “virar ao contrário” indicando ainda a posição que deve assumir depois de virado. Neste caso, usou o termo “virar” mas não especificou unidades ou linha de viragem. Relativamente ao movimento “deslizar”, referiu “a figura não sofreu alterações, encaixei-a no melhor sítio”.

Após a implementação do ambiente de ensino, utilizou as expressões “rodei a peça C 45⁰”, “refleti a figura para cima” e “não foi necessário fazer nenhuma alteração, apenas uma translação”, referindo-se a “rodar”, “virar” e “deslizar”, respetivamente.

Na questão II, *antes da implementação* do ambiente de ensino, reconheceu corretamente os pares de figuras congruentes. Para justificar a congruência das várias figuras identificou os movimentos que as figuras teriam de sofrer de forma a assumirem posição igual à outra figura. Para o primeiro par de figuras explicou “se virarmos a figura A ficamos com a figura B”. O aluno usou o termo virar sem descrever unidades ou linha de viragem. Relativamente ao terceiro par de figuras, registou “se virarmos a figura 2, para a esquerda 90⁰ fica igual à figura 1”. Continua a usar o termo “virar” quando pretende referir-se à rotação, no entanto refere a amplitude e o sentido da mesma. Quanto ao último par de figuras congruentes referiu que “a figura 1 está mais avançada que a figura 2”, quando lhe pedi que indicasse o(s) movimento(s) necessários para que ficassem sobrepostas disse “é só movimentá-la para a direita depois para baixo”.

Após a implementação do ambiente de ensino, para o primeiro par de figuras congruentes, registou “fez uma reflexão de eixo vertical” e traçou o eixo de reflexão. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que a figura “tem uma rotação de +90⁰ e uma

translação para a direita”. Mais uma vez, não se refere ao centro da rotação, mas assinalou-o na figura. Quanto ao último par, registou “transladei a figura na oblíqua para baixo 3,5 cm”. Identificou e caracterizou as três isometrias usando uma linguagem adequada, mas de forma nem sempre precisa.

Na questão III, *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu imaginar corretamente o que um objecto se parece quando refletido em relação a uma reta, rodado em torno de um ponto ou deslizado numa dada direcção. Na descrição, sentiu necessidade de identificar o movimento em causa apenas para a situação correta. Na entrevista, questioneei-o sobre os movimentos que teriam sido aplicados. No primeiro caso respondeu-me “ a figura não sofreu nenhum movimento, só o círculo no seu interior é que mudou de lugar”. No segundo caso, registou “se virarmos a figura 180° para a direita ou para a esquerda fica igual à primeira”, continuando a usar indevidamente o termo “virar”, mas a caracterizar corretamente esse movimento indicando a amplitude e o sentido do mesmo. Por fim, usou a explicação já usada “virou para cima, ou para baixo”.

Após a implementação do ambiente de ensino, no segundo caso respondeu “houve uma rotação de 180° ”; nos outros casos não teve necessidade de usar as isometrias na justificação.

Na questão IV, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou os movimentos mentalmente manipulados. Relativamente ao exemplo de uma reflexão, considerou necessário também uma translação: “virei a figura para a direita e desloquei-a para a direita”, continuando sem especificar a linha de viragem nem as unidades, mas indicando o sentido dos dois movimentos. No par de figuras obtido por uma rotação, considerou a necessidade também de uma translação, e tornou a usar “virar” quando pensa em “rodar”, dizendo “vira-se 90° para a direita e arrastei 4 casas para baixo”. Apesar da confusão dos termos tentou ser preciso na sua descrição. No último, exemplo de translação, usou uma linguagem informal, mas tentou ser preciso: “arrasta-se a figura para a direita deixando 1 casa e depois arrasta-se para baixo até ao fim do quadriculado”.

Após a implementação do ambiente de ensino, relativamente à figura gerada por reflexão registou “deslizei a figura 10 quadradinhos para a direita e reflecti a figura para a direita”, representando, no desenho, uma seta exemplificando o deslize e a linha de viragem. No segundo par de figuras, obtido por rotação, registou “rodei a figura -90° no ponto C e deslizei 2 casas para baixo”. No desenho, marcou corretamente o centro da rotação que designou por “C”. No último par, obtido por translação, concluiu “deslizei a figura 6 casas para baixo e 9 casas para a direita”. Identificou e caracterizou as três isometrias com uma linguagem adequada e de forma precisa,

mas, contrariamente aos outros alunos-caso, não substituiu uma composição de duas isometrias por uma só.

Na questão V, *antes da implementação* do ambiente de ensino, registou “escreve a letra A no ângulo mais agudo. A seguir mantém o vértice A no mesmo sítio, a seguir roda o triângulo 90° para a direita e vira a figura ao contrário para a direita”. Durante a entrevista, o aluno disse que também dava para, em vez de “rodar 90° para a direita” também podia “rodar 270° para a esquerda”. Pela primeira vez utilizou o termo “rodar” e indicou o centro da rotação. Para esta questão, mais uma vez, o aluno não sentiu necessidade de se referir ao “deslize”.

Após a implementação do ambiente de ensino, descreveu uma composição de duas isometrias: “rodei a figura $+90^{\circ}$ a partir do ponto P e reflecti a figura para a direita”, marcando corretamente no desenho o ponto P e o eixo de reflexão. Para esta questão, o aluno continuou a não sentir necessidade de se referir ao movimento de “deslize”.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), o Rogério mostrou ter diferentes códigos de sofisticação, consoante os movimentos e as questões, antes e depois de implementado o ambiente de ensino (Tabela 4). *Antes da implementação* do ambiente de ensino, no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, foram atribuídos a cada um dos movimentos, respetivamente, código 2, 4 e 2. *Após a implementação* do ambiente de ensino, no que diz respeito aos mesmos movimentos, foi atribuído a cada um deles código 7.

Tabela 4

Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Rogério

Rogério	Codificação para movimentos		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1,2,0,2,-	4,3,4,4,4	2,2,2,2,7
Após	3,6,0,7,-	4,7,0,7,7	4,6,5,7,7

Dinis.

Na questão I(A) e I(B), *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu transformar mentalmente as figuras. Na descrição dos movimentos para construir a “casa”, utilizou as expressões “virar ao contrário”, “rodar” e “colocar” e numerou as peças identificando as mesmas na pavimentação da casa. Para se referir ao movimento “rodar”, apercebeu-se de que

não bastava referir “rodar”, mas teve muita dificuldade em descrever, dizendo, apenas, “roda de maneira a ficar assim”. Quanto ao “virar”, usou a expressão “virar ao contrário”, indicando ainda a posição que devia assumir depois de virado. Neste caso, usou o termo “virar” e não especificou unidades ou linha de viragem, mas tenta ser preciso. Para o “deslizar” usou o termo “colocava” indicando a posição que assumiria na casa.

Após a implementação do ambiente de ensino, para o movimento “virar” referiu “tem uma reflexão de eixo na horizontal” e, noutro caso, “tem uma reflexão de eixo oblíquo”, usando linguagem adequada e caracterizando a linha de viragem. Quanto ao “deslizar”, registou “teve duas translações, para baixo 5cm e para a esquerda 6cm mantendo a mesma direção”, usando uma linguagem adequada e especificando corretamente a grandeza e a direção/sentido do deslize. Numa das reflexões, referiu, corretamente, que podia substituir por uma rotação.

Na questão II, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou corretamente os pares de figuras congruentes. Para justificar a congruência das figuras indicou características das mesmas. Tal como acontecera com a Cláudia, na sua resposta não tinha sentido necessidade de referir os movimentos, pelo que, durante a entrevista, inquiri “disseste que se as sobrepuséssemos elas eram iguais; com que movimentos conseguias sobrepô-las?”. Para a primeira situação referiu “vimos [a 2.^a figura] para o lado esquerdo de forma a ficar sobreposta”. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu ser necessário “rodar a peça de forma a que a base coincida com a outra”. Continuou a não especificar nenhuma das características da rotação. Quanto ao último par de figuras congruentes, em entrevista, acrescentou que a figura teria de ser “empurrada”, não encontrando uma palavra mais adequada; usou, assim, uma linguagem informal e imprecisa.

Após a implementação do ambiente de ensino, para o primeiro par de figuras, registou “a 1.^a figura sofreu uma reflexão de eixo vertical, que passa no meio das figuras”, traçando corretamente o eixo. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que a figura “teve uma rotação no vértice inferior direito e uma translação de 5,5”, considerando a necessidade de dois movimentos, mas descrevendo-os de forma incompleta. Quanto ao último par de figuras congruentes, registou “tem uma translação na oblíqua”.

Na questão III, *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu imaginar corretamente o que uma figura se parece quando refletida em relação a uma reta, rodada em torno de um ponto ou deslizada numa dada direção. No entanto, na sua descrição, tal como aconteceu com os outros alunos, sentiu necessidade de identificar o movimento em causa apenas para a situação correta. Na entrevista, questionei-o de modo a explicar-me que movimentos

teriam sido aplicados. No primeiro caso, respondeu-me que “o retângulo tinha ficado na mesma, o círculo é que tinha mudado de lugar”. No segundo caso, disse que “virava o retângulo duas vezes: uma para cima e outra para a esquerda; ou rodava”, não especificando nenhum dos elementos da rotação, porém substituindo uma composição de duas reflexões por uma rotação. Por último, usou novamente a explicação “virou para cima”.

Após a implementação do ambiente de ensino, no primeiro caso, considerou ter havido uma translação da figura; tanto no segundo caso como no terceiro, justificou-se corretamente sem ter necessidade de recorrer à linguagem das isometrias.

Na questão IV, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou os movimentos mentalmente manipulados. Relativamente ao exemplo de uma reflexão respondeu “a peça tem de se virar ao contrário de modo a ...”, continuando sem especificar a linha de viragem nem as unidades, mas indicando a posição que devia assumir. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação, considerou a necessidade de uma rotação seguida de uma translação, mas apenas descreveu a rotação “rodava-a para a direita”. Usa o termo “rodar” e caracteriza o sentido. No último par de figuras, obtido por uma translação, o Dinis continuou a usar uma linguagem informal, mas tentando ser preciso: “a peça avançava 9 quadrados para a frente e descia 6 quadrados”.

Após a implementação do ambiente de ensino, relativamente ao par de figuras que tinha sido obtido por uma reflexão, registou “...uma reflexão de eixo vertical”, e representou o eixo corretamente. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação, registou “teve uma rotação de centro P de 90° ”. No desenho, marcou corretamente o centro de rotação (exterior à figura) que designou por “ P ” e desenhou a seta que traduzia o sentido da rotação. No último caso, exemplo de translação, concluiu que tinha “duas translações: uma para baixo de 4,5cm e 6,8cm para a direita”. Identificou e caracterizou as três isometrias, usando linguagem adequada e de forma precisa e completa.

Na questão V, *antes da implementação* do ambiente de ensino, não respondeu da forma pretendida. Em vez de indicar o(s) movimento(s) que o triângulo iria sofrer, descreveu a posição que iria assumir no ponteadado. Durante a entrevista, pedi-lhe que se referisse aos movimentos. Respondeu-me que “virava-se para baixo e rodava para a direita de modo a ficar com o lado menor na base”; imaginou o movimento sofrido pelo triângulo como uma composição de uma reflexão seguida de rotação. Para os dois movimentos descreveu apenas a direção. Para esta questão, também o Dinis não sentiu necessidade de se referir ao “deslize”.

Após a implementação do ambiente de ensino, continuou a representar o movimento

sofrido pelo triângulo como uma composição de uma reflexão seguida de rotação, mas melhorou a forma de se exprimir, nas suas palavras “ ...reflete e faz uma rotação a partir do ponto inferior direito da base de +90º”. Para esta questão, o aluno continuou a não sentir necessidade de se referir ao “deslize”.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), o Dinis mostrou ter diferentes códigos de sofisticação, consoante os movimentos e as questões, antes e depois de implementado o ambiente de ensino (Tabela 5). *Antes da implementação* do ambiente de ensino, no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, foram atribuídos a cada um dos movimentos, respetivamente, código 1, 4 e 3. *Após a implementação* do ambiente de ensino, para os três movimentos foi atribuído a cada um deles o código 7.

Tabela 5

Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Dinis

Dinis	Codificação para movimentos		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1,1,1,2,-	4,4,4,4,4	3,3,3,4,4
Após	7,4,3,7,-	5,7,0,7,3	3,4,0,7,7

Jorge.

Antes da implementação do ambiente de ensino, na questão I(A) o Jorge teve dificuldade em transformar mentalmente as figuras, tendo sido o único a considerar que as peças apresentadas não davam para pavimentar a “casa”. Na questão I(B), realizada após verificação da resposta à I(A), apercebeu-se que a resposta dada anteriormente estava errada e mostrou, no desenho, como era possível a pavimentação com aquelas peças. Na descrição dos movimentos, utilizou as expressões “virar ao contrário”, “virar para a direita”, “ dar uma volta” e “colocar” e numerou as peças identificando as mesmas na pavimentação da casa. No que diz respeito ao movimento “rodar”, usou a expressão “dar uma volta para a esquerda e o ângulo reto encaixa neste”. Não usou o termo rodar mas indicou o sentido. Quanto ao movimento “virar”, o aluno também usou a expressão “virar ao contrário” e, ainda, “vira-se para a direita”, mas durante a entrevista, pelos gestos feitos, apercebi-me de que a sua intenção era referir-se ao movimento “rodar”. Neste caso, usou o termo “virar” quando, na realidade, pretendia dizer “rodar”,

confundindo os dois termos. Relativamente ao movimento “deslizar”, o aluno usou o termo “pegava nele e colocava-o...” indicando a posição que assumiria na casa.

Após a implementação do ambiente de ensino, o aluno viu em três das situações exemplos de rotações, não tendo tido necessidade de se referir à reflexão. Para todas as rotações indicou a amplitude, o sentido e o centro de rotação, tendo cometido, num dos casos, um erro quanto à amplitude de rotação. Relativamente à outra situação, registou “fica igual e translada até ao ponto A”, marcando no desenho um segmento de reta a unir esse ponto ao seu original.

Na questão II, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou corretamente os pares de figuras congruentes. Para o primeiro par de figuras e após uma longa descrição da figura, referiu “... se virarmos a figura, o triângulo fica na direita”, usando o termo virar sem descrever unidades ou linha de viragem. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que era necessário “virar a peça”, continuando a confundir “rodar” com “virar”. Quanto ao último par de figuras congruentes, apenas referiu que uma das figuras estava “à frente da outra” e que teria de “andar para trás”.

Após a implementação do ambiente de ensino, para o primeiro par de figuras, registou que “tem uma reflexão de eixo vertical” e traçou-o corretamente. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que a figura “tem uma rotação de $+90^\circ$ no ponto C”. Teve em conta os três parâmetros: centro, amplitude e sentido da rotação, mas cometeu um erro nas especificações, pois embora tenha marcado o ponto C (não pertencente à figura) no desenho, este não estava correto. Quanto ao último par de figuras congruentes, registou “tem uma translação para baixo 1,3cm e para a direita 3,2cm”. Identificou e caracterizou as três isometrias usando linguagem adequada e de forma precisa e completa.

Na questão III, *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu imaginar corretamente o que uma figura se parece quando refletida em relação a uma reta, rodada em torno de um ponto ou deslizada numa dada direção. Na descrição, não sentiu necessidade de identificar o movimento em nenhuma das situações, justificando-se com a posição assumida pelas figuras no interior do retângulo. Na entrevista, questioneei-o de modo a explicar-me que movimentos teriam sido aplicados ao retângulo inicial. No primeiro caso (A), respondeu-me que “a peça tinha sido deslocada”; no segundo, disse “virou-se”, querendo-se referir a uma rotação visível nos seus gestos; no último, usou a expressão “virou-se”, querendo de facto referir-se a este movimento.

Após a implementação do ambiente de ensino, no primeiro caso, considerou ter havido uma translação da figura, mas que não foi acompanhada por todos os elementos da figura; no

segundo caso, respondeu “sofreu uma rotação de 180° , de centro J [centro da figura]”; no último caso, justificou a sua opção usando características da figura. Apenas indicou todos os parâmetros para a rotação, que era a situação correta.

Na questão IV, *antes da implementação* do ambiente de ensino, na sua resposta não usou as figuras como um todo e referiu-se ao movimento realizado por um dos quadrados que compunham a figura dada (a letra L), usando as expressões “o quadrado segue em frente 12 quadrados”; “sobe-se 3 casas para cima”, não manipulando mentalmente a figura como um todo. Durante a entrevista, expliquei-lhe a situação. Relativamente ao par de figuras que tinha sido obtido por uma reflexão, o aluno foi dizendo que “via um eixo entre as duas figuras” e “virava-se a figura por esse eixo”. Perguntei onde exactamente passava esse eixo, respondeu-me “no meio das duas”, especificando a posição da linha de viragem. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação, o aluno primeiro disse que a figura “virava-se”, fazendo a confusão habitual, mas depois corrigiu para “rodava”, expressão que ainda não tinha usado. Obviamente perguntei se afinal “rodava” ou “virava” e ele optou definitivamente por rodar porque “virar era o outro [caso] porque tinha um eixo”. Desta vez, usou o termo “rodar”. No último caso, gerado por translação, o aluno continua a usar uma linguagem informal, mas tenta ser preciso: “deslocou-se 8 casas, desce 6 e segue 1”, usando três deslizes.

Após a implementação do ambiente de ensino, relativamente ao par de figuras que tinha sido obtido por uma reflexão, registou “...uma reflexão de eixo vertical”, representando o eixo de reflexão, sem marcar pontos simétricos, mas dividindo por dois o número de quadriculas que separavam as duas figuras. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação cujo centro não pertence à figura, o aluno registou “teve uma rotação de $+90^\circ$ de centro C”. No desenho, não marcou corretamente o centro de rotação que designou por “C”, marcou-o “a olho”, e enganou-se também no sentido da rotação. No último par de figuras, obtida por uma translação, concluiu que tinha “translação de 6 casas para baixo e 9 para o lado direito”. Identificou e tentou caracterizar as três isometrias usando uma linguagem adequada e de forma precisa e completa, contudo cometeu alguns erros na descrição da rotação.

Na questão V, *antes da implementação* do ambiente de ensino, registou “vira-se 4 vezes para a direita”. Imagina o movimento sofrido pelo triângulo como uma composição de quatro reflexões. Para esta questão, o Jorge não sentiu necessidade de se referir ao “deslize”, nem à rotação. Por forma a não influenciar a recolha de dados, durante a realização da entrevista não corrigi nenhuma das concepções erradas do aluno, mas o facto de, durante as primeiras três questões ter usado o termo “virar” quando os seus gestos se referiam a “rodar” e na quarta

questão ter usado o “rodar”, fez-me questionar se era apenas uma questão de linguagem ou o aluno confundia os dois movimentos. Voltei atrás e coloquei a questão “na questão IV, substituíste a expressão “virar” por “rodar” e nas questões anteriores, quando usaste a expressão “virar” querias dizer “virar” ou “rodar”?”. Voltamos às questões anteriores e ele corrigiu acertadamente as situações em que tinha usado “virar” quando pensava em “rodar”. Tomei a liberdade de atribuir o código 1 a estas respostas, uma vez que embora o aluno não mencionasse corretamente o nome do movimento, executava-o mentalmente.

Após a implementação do ambiente de ensino, o aluno foi o único dos quatro alunos observados, mas não da turma, a identificar a isometria em causa como uma reflexão de eixo oblíquo, tendo traçado o eixo corretamente. Para esta questão, o aluno não sentiu necessidade de se referir ao movimento de “deslize”, nem de “rodar”.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), o Jorge mostrou ter diferentes códigos de sofisticação, consoante os movimentos e as questões, antes e depois de implementado o ambiente de ensino (Tabela 6). *Antes da implementação* do ambiente de ensino, no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, foram atribuídos a cada um dos movimentos, respetivamente, código 1, 5 e 1. *Após a implementação* do ambiente de ensino, para os três movimentos foi atribuído a cada um deles o código 7.

Tabela 6

Codificação, por movimento, no teste realizado pelo Jorge

Jorge	Codificação para movimentos		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1,1,1,2,-	4,3,3,5,4	2,1,1,3,0
Após	4,7,3,7,-	0,7,0,7,7	7,6,7,5,0

Cláudia.

Antes da implementação do ambiente de ensino, na questão I(A) e I(B) a Cláudia conseguiu transformar mentalmente as figuras. Na descrição dos movimentos para construir a “casa”, utilizou as expressões “virar ao contrário”, “rodar para a direita” e “rodar para a esquerda”. No que diz respeito ao movimento “rodar”, referiu o sentido, mas, mesmo durante a entrevista, não se referiu à quantidade, nem ao centro desse movimento. Quanto ao movimento “virar”, durante a entrevista acompanhou com gestos a descrição do movimento, explicando que

“virar ao contrário” era colocar “de pernas para o ar”, ou seja, segundo um eixo de reflexão horizontal. Neste caso, usou o termo “virar” mas não especificou unidades ou linha de viragem, mas tenta ser precisa. Como não sentiu necessidade de usar o movimento “deslizar”, pedi que usasse outro movimento para uma das figuras. Reparou que um deles não mudava de posição e descreveu-o usando uma linguagem muito informal: “era só pegar nele e encaixá-lo”.

Após a implementação do ambiente de ensino, no que diz respeito ao movimento “rodar”, referiu “rodou 90° no sentido positivo”, tendo em conta dois dos três parâmetros que caracterizam a rotação. Quanto ao movimento “virar”, registou “sofreu uma reflexão de eixo horizontal”, referindo-se à linha de viragem. Não precisou de referir o movimento “deslizar”.

Na questão II, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou corretamente os pares de figuras congruentes. A cada figura de cada par atribuiu as letras *A* e *B* para facilitar a sua justificação “se pousarmos o *B* por cima do *A* e vice-versa, verificamos que tem as mesmas medidas, são iguaizinhos”. Como na sua resposta não sentiu necessidade de referir os movimentos, durante a entrevista inquiri sobre os movimentos que teria de aplicar para que as figuras *A* e *B* ficassem sobrepostas”. Relativamente ao primeiro par de figuras, resultado de uma reflexão de eixo vertical, disse “se estivessem juntinhas era só virar”, acompanhando com o movimento da mão. Considera que primeiro é necessário juntá-las e só depois poderá sofrer reflexão. Usa o termo virar sem descrever unidades ou linha de viragem. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que era necessário “rodar e colocar em cima”. Não especifica nenhuma das características da rotação, se bem que, implicitamente, assumo o centro da figura como centro de rotação, acrescentando que a seguir à rotação a figura ainda vai ser movida. Quanto ao último par de figuras congruentes, em entrevista, esclareceu “movia para o lado esquerdo, subia para a frente criando um ângulo reto”. Usa linguagem informal, mas tenta ser precisa.

Após a implementação do ambiente de ensino, para o primeiro par de figuras, registou que “a 1.^a figura sofreu uma reflexão de eixo vertical”, usando uma linguagem adequada e especificando corretamente a linha de viragem. No desenho, marcou três pares de pontos simétricos, o segmento de reta que os une e respetivo ponto médio e o eixo de reflexão. Relativamente ao terceiro par de figuras, referiu que a figura “rodou 90° no sentido positivo”, quando a amplitude era de 45° , teve em conta dois dos três parâmetros (não se referiu ao centro de rotação), mas enganou-se num deles. Quanto ao último par de figuras congruentes, registou “sofreu uma translação na oblíqua”, não se referiu à sua grandeza, mas usou uma linguagem adequada e indicou a sua direção/sentido.

Na questão III, *antes da implementação* do ambiente de ensino, conseguiu imaginar corretamente o que uma figura se parece quando refletida em relação a uma reta, rodada em torno de um ponto ou deslizada numa dada direção. No entanto, na descrição identificou o movimento em causa apenas para a situação correta. Na entrevista, questionei-a de modo a explicar-me que movimentos teriam sido aplicados ao retângulo inicial. No primeiro caso, esclareceu que a figura “desceu na oblíqua”, mantendo uma linguagem informal sempre que se referia ao deslize. No segundo caso, disse que “se a rodarmos 180° fica igualzinha”, especificando pela primeira vez a amplitude da rotação; por último, usou de novo a explicação “virou para cima”.

Após a implementação do ambiente de ensino, no 1.º caso, considerou ter havido uma translação da figura na oblíqua; no 2.º caso, justificou sem se referir à rotação; por último, usou a explicação “refletiu-se sobre um eixo horizontal”. Usou uma linguagem adequada e especificou algumas das características de cada isometria.

Na questão IV, *antes da implementação* do ambiente de ensino, identificou os movimentos mentalmente manipulados. Relativamente à reflexão, registou “vira-se a figura sombreada para o lado direito”, continuando sem especificar a linha de viragem nem as unidades, mas tenta ser precisa. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação, continuou a considerar a necessidade de uma rotação seguida de uma translação, dizendo “rodava-a para a direita e movimentava-a até à outra”. Para caracterizar a rotação usou o termo “rodar” e apenas caracterizou o sentido da mesma. No último par de figuras, obtida por uma translação, a aluna continuou a usar uma linguagem informal, mas tentou ser precisa: “movimentava-o numa linha diagonalmente”.

Após a implementação do ambiente de ensino, relativamente à reflexão, registou “refletiu sobre um eixo vertical”, representando o eixo de reflexão de forma correta. No segundo par de figuras, obtido por uma rotação, continuou a referir-se à amplitude e ao sentido da mesma, mas não ao seu centro: “rodou 90° no sentido negativo”. Na figura gerada por uma translação, continuou a vê-la como resultado de um único deslize, tal como da primeira vez que respondeu ao teste, mas desta vez melhorou a sua linguagem: “transladou 8,2 cm na oblíqua”.

Na questão V, *antes da implementação* do ambiente de ensino, imaginou o movimento sofrido pelo triângulo como uma reflexão seguida de rotação, registando “tem de se virar e rodar o triângulo até ganhar uma posição vertical”. Não descreveu nenhum dos seus elementos e não sentiu necessidade de se referir ao “deslize”.

Após a implementação do ambiente de ensino, imaginou o movimento sofrido pelo

triângulo como uma rotação, nas suas palavras “...rodou 90° no sentido positivo a partir do ponto 3 [ponto que assinalou na figura]”. Esquecendo-se de se referir à necessidade de uma reflexão, neste caso, de eixo vertical. Para esta questão, a aluna continuou, tal como os seus colegas, a não sentir necessidade de se referir ao “deslize”, mas caracterizou os elementos da rotação.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), a Cláudia mostrou ter diferentes códigos de sofisticação, consoante os movimentos e as questões, antes e depois de implementado o ambiente de ensino (Tabela 7). *Antes da implementação* do ambiente de ensino, no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, foram atribuídos a cada um dos movimentos, respetivamente, código 2, 4 e 4. *Após a implementação* do ambiente de ensino, para os mesmos movimentos foram atribuídos a cada um deles, respetivamente, código 4, 7 e 5.

Tabela 7

Codificação, por movimento, no teste realizado pela Cláudia

Cláudia	Codificação para movimentos		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1,2,2,2,-	4,3,4,4,3	4,3,4,4,3
Após	0,4,4,6,-	5,7,4,7,0	5,5,0,5,7

Os pares perante as tarefas

Tal como já referi, a construção desta sequência de tarefas obedeceu às cinco fases de aprendizagem propostas por Van Hiele que, segundo o autor, possibilitam ao aluno a passagem para o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico seguinte (Jaime, 1993). Desta forma, foram criadas tarefas de resolução em pares, respeitando as cinco fases de aprendizagem, que possibilitassem a passagem do nível 1 para o nível 2 e, posteriormente, a passagem do nível 2 para o nível 3 do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Para o desenvolvimento das tarefas, os alunos tiveram à sua disposição uma caixa com diversos materiais e um portefólio onde iam colocando os enunciados das mesmas. Em alguns casos, houve utilização de outros tipos de materiais, como o *software* de geometria dinâmica GSP ou o retroprojektor.

Rogério e Dinis (par RD).

Tarefa 1.

Para a primeira situação dada - reflexão - o par considerou que teria “de virar a figura 1 para a direita e avançar meia casa novamente para a direita”. Seriam necessárias duas transformações geométricas para, a partir da 1.ª figura, se obter a 2.ª: “virar” e “avançar”. Ainda não usam os termos “reflexão” e “translação”, mas, no caso desta última, sentem necessidade de especificar a quantidade e a direção do deslize. Este par chegou a discutir se avançava uma ou meia “casa” mas, apesar da dúvida, não lhes ocorreu utilizar a régua para serem mais precisos.

Após a realização em pares, as respostas foram apresentadas e discutidas em grande grupo, com recurso ao retroprojetor, ao enunciado em acetato e a motivos, também em acetato. O primeiro par a fornecer as indicações foi o par RD que começou por dizer que “a figura tem de virar para a direita”, o par que executava os movimentos com o motivo em acetato fê-lo virando a figura sobre si própria, ficando sobreposta à figura 1. Como não era essa a intenção do par RD, eles acrescentaram que a viragem era sobre o lado direito da figura e assim o fizeram. Seguidamente, cumpriram a indicação de avançar para a direita, contudo a indicação “uma casa” revelou-se pouco precisa, uma vez que o enunciado não estava dividido em “casas”, ou em qualquer outra malha. Outro par contribuiu com a informação de que seria necessário avançar 1,7 cm para a direita.

Relativamente à segunda situação – translação – o par considerou que “foi preciso empurrar a fig.1 uma casa para a direita”, indicando a quantidade e a direção/sentido do deslize.

Para descrever a terceira situação – rotação – o par usou o termo “rodar” e caracterizou a amplitude o sentido da rotação, aspecto que lhes causou algumas dúvidas.

R – Ó professora, é para a direita ou para a esquerda que roda os 90⁰? Porque nós rodamos para a esquerda, mas a figura vai para o lado direito!

Prof. – Se calhar, esquerda e direita não serão as melhores indicações, pois pode criar dúvidas, tal como vos aconteceu. Quando falamos em rodar, qual o objeto do dia-a-dia de que nos lembramos em que se observa o movimento do rodar?

[depois de terem sugerido o relógio, continuei]

E neste caso, acham que a figura roda no mesmo sentido dos ponteiros do relógio?

RD – Não. É ao contrário.

Prof. – Então dizemos isso mesmo, “no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio”.

Curioso que, depois desta conversa, o par deixou de lado “90⁰” e usou “¼ de volta”, por ser a linguagem mais usada quando se fala dos ponteiros do relógio. Após alguma discussão, registou “a figura 1 rodou um quarto de volta no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e

movimentou-se uma casa para a direita”. Este par viu esta transformação também como uma composição de duas isometrias.

Após a aula, em entrevista individual com cada um dos alunos-caso, reparei que o par, depois da apresentação das respostas, tinha marcado aquele que seria o eixo de reflexão. Comecei pelo Rogério e perguntei o que tinham traçado e como, ao que ele me respondeu tratar-se do eixo de simetria e que o tinha traçado com auxílio do mira. Pedi-lhe que o definisse e como o traçaria se não tivesse a ajuda do mira. Disse-me “passa entre as duas figuras” e que para o traçar “marcava dois pontos e traçava o eixo”. Indaguei o material que iria utilizar e pedi-lhe que o fizesse: com a régua mediu a distância entre as duas figuras e marcou o ponto médio, de seguida, fez o mesmo mas escolhendo outros dois pontos simétricos das figuras e traçou a reta que passava nos dois pontos médios marcados. Relativamente à segunda situação, exemplo de uma translação, durante a entrevista, o aluno, voltou a confirmar-me:

R - É só arrastá-la, movê-la.

Prof. - Ora faz! Precisaste de ter algum cuidado especial?

R - Sim, tem que ser assim... [pegou em dois motivos, sobrepô-los e, mantendo o debaixo fixo, deslizou o de cima da esquerda para a direita, tentando manter a base da figura na mesma reta, mas sem usar qualquer reta suporte]

Prof. - [pegando em dois motivos da clave de sol, apresentei-lhe as figuras 1 e 2 mais afastadas, para que o aluno sentisse necessidade de recorrer a uma reta suporte para determinar a direção do deslize] Trata-se da mesma situação? O que mudou?

R - Sim, só mudou a distância entre as duas figuras.

Prof. - Como tens a certeza de ter continuado a deslizá-la na mesma direção?

R - Tinha que saber se estão nas mesmas paralelas.

Prof. - Como assim?

R - Uma em cima e outra em baixo. [fazendo, com o dedo, o prolongamento dos lados superior e inferior do motivo]

Passamos à terceira situação. Esclareceu que não tinha usado nenhum dos materiais disponíveis. Pedi-lhe, então, que escolhesse o material mais adequado. Tentou com o motivo e com o pionés, mas não conseguia espetar no centro, pois não se encontrava marcado. Perguntei-lhe se não haveria outro material mais indicado, ele pegou nos círculos e escolheu o que tinha o quadrado inscrito na circunferência. Contudo, mostrava-se descontente, dizendo “mas eu sei que podia fazer doutra forma, o Rui fez de outra maneira, usou outro”, referindo-se a um dos alunos do par que tinha apresentado a sua resposta na aula. Procurou entre os materiais e pegou noutra círculo, o pretendido, cujo centro coincide com o vértice superior direito do motivo. Usando como centro de rotação este vértice, a transformação estava completa usando apenas uma única isometria. Com as duas situações representadas com o auxílio do pionés e da placa de esferovite,

perguntei qual a diferença entre elas. Respondeu ser o sítio do pionés, “num caso o pionés encontra-se no centro da figura e no outro encontra-se num vértice”.

No que diz respeito ao Dinis, na entrevista individual que se seguiu à aula, relativamente à primeira situação, também questionei este aluno sobre a reta que o par tinha traçado. Dinis identificou a reta marcada como eixo de simetria e definiu-o como “reta que passa no meio”, mas não conseguiu traçá-la de forma precisa. Usou um par de pontos simétricos, uniu-os com um segmento de reta e traçou uma reta que dividiu esse segmento em duas partes iguais, não se preocupando em manter a perpendicularidade entre o eixo que traçou e o segmento de reta traçado. Na segunda situação, referiu “a figura tem de avançar, mas tem que estar na mesma linha” e que para o fazer precisava “de uma régua, uma reta”. Quanto à última situação, mostrou o mesmo raciocínio do seu par, usou o círculo com o motivo inscrito colocou o pionés no centro do motivo e do círculo, rodou 90^0 no sentido positivo, tirou o pionés e deslocou o motivo para a direita. Quando lhe pedi para gerar a 2.^a figura apenas com uma isometria, ele identificou o círculo em acetato que melhor lhe serviria, alegando ter sido aquele o escolhido por outro aluno, mas não conseguiu explicar a razão dessa escolha. Insisti mais um pouco, pedindo-lhe que tentasse colocar o pionés no centro dos vários círculos apresentados e, aplicando a rotação de 90^0 , verificasse qual deles permitia obter a figura na posição pretendida. O Dinis assim fez e pode confirmar a sua escolha.

Desempenho do par na resolução da tarefa. No desenvolvimento desta tarefa, os alunos deste par não recorreram, por iniciativa própria, a nenhum dos materiais disponíveis. Para a translação, usaram uma linguagem informal, os termos - “empurrar”, “avançar” e “movimentar” – e tentaram ser precisos indicando a grandeza e a direção do movimento. Revelaram ter a ideia de que este deslize se faz sobre retas paralelas, sugerindo até a utilização de uma régua para o fazer. Noutra situação, para a reflexão, usaram a composição de duas isometrias: reflexão seguida de translação. Para tal, usaram o termo “virar” mas não especificaram unidades ou linha de viragem, apenas disseram “para a direita”. Só quando apresentaram a sua resposta perante a turma é que constataram que essa informação era insuficiente, acrescentando que a viragem seria pelo “lado direito da figura”. Na rotação, este par usou uma composição de duas isometrias: rotação e translação. Para a rotação usaram o termo “rodar” e tiveram em conta dois dos três parâmetros, neste caso, direção e amplitude de rotação, mas nada disseram sobre o centro de rotação.

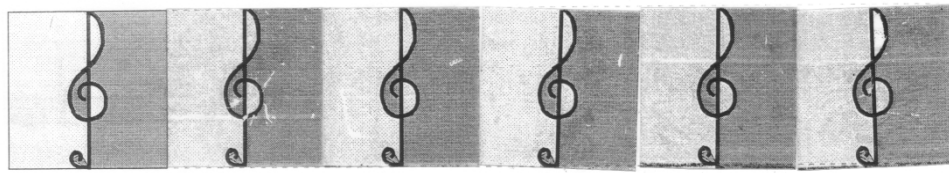
Dificuldades manifestadas. Os alunos deste par não sentiram dificuldades na realização da tarefa, durante a sua execução apenas precisaram do meu auxílio para ajudar a descrever o sentido da rotação. Antes da apresentação das respostas à turma, estavam convencidos de que tinham dado todas as informações necessárias para descrever cada uma das situações apresentadas. No entanto, quando apresentaram a resolução à turma perceberam a necessidade de serem mais precisos e completos nas suas indicações, por exemplo, ao pedirem para virar a figura para o lado direito, como não indicaram nenhuma linha de viragem, a figura não ocupou a posição pretendida, desde logo ficaram a saber que para caracterizar uma reflexão é necessário especificar a linha de viragem. Durante as entrevistas, pude perceber que, embora na resposta escrita não se tenham referido à linha de viragem, tinham conhecimento da mesma, reconheciam-na como “eixo de simetria” e sabiam que teria de passar “no meio das figuras”. Encontrar o melhor termo para designar a translação, também constituiu uma dificuldade, apresentando três termos diferentes: “avançar”, “empurrar” e “movimentar”. Indicar o ponto em torno do qual a figura roda, ou seja, o centro de rotação, também se revelou uma dificuldade, que foi contornada com recurso aos círculos em acetato.

Síntese. A tarefa despertou o interesse dos alunos, permitiu a troca e partilha de ideias e estabelecer conclusões. Os materiais disponibilizados mostraram-se adequados, embora não tenham recorrido a eles durante a tarefa, foi com recurso aos círculos em acetato e ao pionés que estes alunos, em entrevista, conseguiram determinar o centro da rotação.

No desenvolvimento da primeira tarefa, para os três movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar”, as respostas deste par situam-no no nível 1 do pensamento geométrico, com códigos diferentes de sofisticação nos diferentes movimentos, sendo na rotação que este par revela um pensamento mais desenvolvido. Relativamente ao deslize este par tenta ser preciso, apenas não usa a linguagem mais adequada para se referir ao deslize.

Tarefa 2.

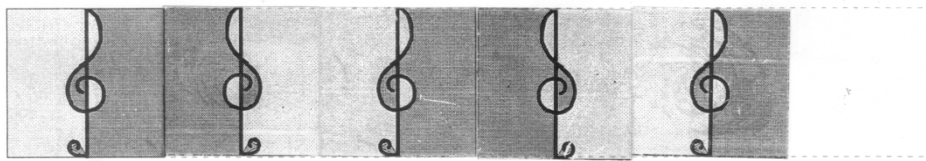
Das respostas dadas à tarefa 2A, pude denotar que este par, para caracterizar a translação, embora com um vocabulário pouco específico, tentou referir-se à sua grandeza, sentido e a direção (Figura 1).



Como procedeste? Avançamos sempre uma casa para a direita na mes-
ma direcção.

Figura 1. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento

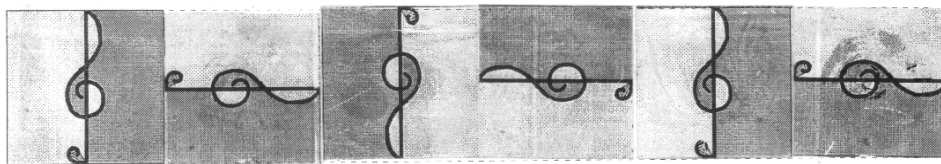
Na reflexão, o par completou o friso com reflexões de eixo vertical (Figura 2).



Como procedeste? Vira-mos a figura para a direita o parter do lado di-
reita da figura.

Figura 2. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento

No que diz respeito ao friso formado a partir de rotações, descreveram corretamente a amplitude de rotação, indicando a parte da volta dada, e o sentido da rotação, no entanto, não se referiram ao centro de rotação e associaram um deslize (Figura 3).



Como procedeste? Podamos sempre um quarto de volta no sentido dos
ponteiros do relógio uma casa para a direita.

Figura 3. Friso construído pelo par RD através de colagem e descrição do procedimento

Na apresentação das respostas, este par, que foi chamado a intervir, ditando o modo como tinha procedido para que outro par, no retroprojetor, executasse os passos, sentiu-se na necessidade de fornecer, de alguma forma, o centro da rotação, caso contrário a figura poderia ocupar uma posição não desejada. Perante a dificuldade destes e de outros alunos em determinar o centro de rotação, apelei ao uso do material que tinham disponível e reforcei a ideia de que o

centro de rotação não é mais do que o ponto onde colocamos o piónés que nos permite realizar a rotação, ou seja, o ponto em torno do qual giramos a figura. Recorrendo ao material e após algumas tentativas, este par foi descobrindo o centro da rotação que lhe permitiu gerar todas as figuras que constituíam o friso. Na conclusão da tarefa 2A (Figura 4), o par não teve quaisquer dúvidas em arrematar que, numa isometria, “o tamanho e a forma da figura nunca muda”.

O que podes concluir quanto à sua forma e tamanho?

O tamanho e a forma da figura nunca muda.

Figura 4. Resposta do par RD à segunda questão da tarefa 2ª

Na realização da tarefa 2B, na identificação das diferentes isometrias, o par conseguiu eliminar de imediato os pares de figuras que, por não serem congruentes, não tinham sido geradas por nenhuma isometria. Na justificação das suas opções este par não partiu das características visuais de cada uma das isometrias para concluir se era exemplo da isometria pedida, optou por identificar as isometrias presentes em todos os pares de figuras. Na primeira situação, em que se pretendia descobrir os pares de figuras resultantes de uma translação, este par referiu-se sempre à sua grandeza e direção e identificou todos os casos corretamente. Na seguinte, que pretendia reconhecer os pares de figuras resultantes de uma reflexão, conseguiu identificar corretamente todos os exemplos. Na justificação da sua escolha, referiu que as figuras viravam, para baixo ou direita, “conforme um eixo de simetria”, que nunca representaram, e apenas numa das situações se referiram à sua posição, dizendo “eixo de simetria oblíquo”. Relativamente à última situação, o par não identificou todos os exemplos dos pares de figuras obtidas por rotação, confundindo um deles com uma reflexão. Sugeri-lhe que verificasse a resposta àquela parte da tarefa, no sentido de constatar o erro e voltei a lembrar que podiam recorrer ao material sempre que precisasse.

Seguiu-se a discussão e apresentação das respostas. Depois de indicadas todas as figuras obtidas por translação, pedi que, olhando para os vários exemplos, caracterizassem o transformado de uma figura obtida por essa isometria. A primeira resposta dada foi “mantém a forma e as dimensões da figura”. Pedi que refletissem se essa propriedade era exclusiva da translação, ou seja, se só se verificava para essa isometria. O Rogério interveio prontamente acrescentando que também acontecia na reflexão e na rotação, ou seja, em todas as isometrias. Voltei à questão inicial, que foi respondida pelo par JC e que refiro à frente. Continuamos com a identificação de figuras obtidas por reflexão. Uma vez descobertas, questioneei:

Prof - Que características apresenta o transformado em relação à figura original?

R – A imagem aparece ao contrário, invertida.

Prof. – Isso, dizemos que há inversão da figura. Quem é que me ajuda a descobrir o eixo de reflexão?

R – Tem que passar exatamente entre as duas figuras.

Prof. – E como é que eu faço isso?

D – Tem que unir um ponto numa figura a outro na outra figura e descobrir o meio.

Propositadamente, uni um ponto (usei um dos vértices) a outro que não lhe era simétrico, e os alunos, em coro, disseram que não podia ser, que tinha de ser “o ponto que estava em frente”, pedi que o par RD melhorasse a indicação. Disse-me que tinha que unir “os mesmos pontos”, aproveitei para referir que se tratavam de “pontos simétricos”. Com a ferramenta “straightedg tool” uni um par de pontos simétricos e, depois de seleccionar o segmento de reta criado, mandei construir o ponto médio.

Prof. – E agora? Como é que sei qual a inclinação do eixo de reflexão, só sei que passa neste ponto!

R – Tem que fazer o mesmo com os outros dois vértices!

Solicitei ao Dinis que fosse ao quadro interativo realizar o que os colegas haviam sugerido. Depois dos dois pontos médios encontrados, expliquei-lhe como proceder para construir uma reta que passasse por eles. Aproveitei para perguntar sobre a posição dessa reta em relação aos segmentos traçados e para mostrar como se gerava o transformado por uma reflexão usando o GSP. Seleccionei uma figura e perguntei como poderia refleti-la. Disseram-me que teria de seleccionar “transform” e “reflect”. Eu assim fiz, mas como seria de esperar apareceu uma mensagem a pedir para construir uma reta ou segmento de reta e marcá-la como espelho, ou seja, como eixo de reflexão. Mais uma vez, puderam constatar que para obterem uma reflexão é condição obrigatória definir um eixo de reflexão. Tracei uma reta e mostrei como defini-la como eixo de reflexão.

Seguiu-se a realização de uma rotação no GSP. O Rogério foi chamado ao quadro interativo e começou por seleccionar a figura, clicou “transform”, escolheu “rotate” e a amplitude pretendida 180° . Como não tinha seleccionado nenhum centro de rotação, o programa escolheu aleatoriamente um dos pontos da figura e a imagem sobrepôs-se à original. Alguns alunos eram de opinião que ele se tinha enganado em algum momento, clicando onde não devia. O próprio não sabia por que razão a figura não tinha ficado no lugar esperado, tal como o exemplo que tinham na tarefa. Intervim, questionando se não haveria alguma indicação necessária na caracterização desta isometria que tivesse ficado por dar. O seu par, Dinis, lembrou-se que faltava

indicar o centro de rotação. Dei indicação para marcar um ponto qualquer exterior à figura original e expliquei o procedimento para o marcar como centro de rotação. Quando a isometria ficou concluída, pedi ao Rogério para movimentar o centro de rotação para que pudessem observar o que acontecia ao transformado.

Prof. – Rogério, que características tem uma figura gerada por uma rotação, o que é que muda e o que é que permanece igual?

R - A figura pode rodar e rodar que nunca fica invertida.

Prof. – Então, o que podemos dizer sobre o sentido dos ângulos da figura, ou seja, [peguei na placa de esferovite com um dos círculos em acetato com o motivo inscrito e, com a caneta de acetato, coloquei uma simples seta curva a indicar o sentido dos ponteiros do relógio], se eu rodar a figura, o que acontece ao sentido da seta, muda? [direcionei a questão ao D]

D – Não, é claro que não.

Prof. – Então, podemos concluir que o sentido, ou seja, a orientação da figura não se altera. Então e o que é que se altera, Dinis?

D - ... como é que eu posso dizer, fica assim, inclinada.

Os alunos puderam constatar que a rotação também é uma isometria que mantém o sentido dos ângulos da figura, embora eles não o refiram desta forma, verificam que por mais que se rode a figura, ela nunca muda a sua orientação, nunca fica invertida, o que pode mudar é a sua inclinação.

Desempenho do par na resolução da tarefa. O par aderiu bastante bem a esta tarefa, principalmente por envolver a parte das colagens na construção dos frisos (ver figuras 1, 2 e 3) e utilização do GSP na fase de Explicitação. Contudo, a parte da justificação das suas opções na tarefa 2B, não foi considerada tão interessante. O Rogério esteve particularmente interventivo na aula de apresentação das suas respostas, tal deveu-se ao uso do GSP.

Relativamente aos conhecimentos evidenciados, o par revelou ter noção que numa reflexão existe sempre uma reta que está equidistante das duas figuras, designando-a por “eixo de simetria” e nos seus registos refere-se a essa linha de viragem mas não a caracteriza com precisão. Refere-se a “pontos simétricos” como “os mesmos pontos”. A translação revelou-se sem dúvida a isometria que se tornou mais fácil de ser reconhecida e caracterizada, para isso o par usou o termo “deslizar” e referiu-se à sua grandeza e direção. Quanto à rotação, continuou sem caracterizar o centro da sua rotação, e esquece-se de usar o material para determinar o mesmo, mas descreveu corretamente a amplitude de rotação, indicando a parte da volta dada, e o sentido da rotação. Este par continuou algo relutante em usar o material. Em toda a tarefa só o vi usar os

motivos em acetato para verificar as respostas à última parte da mesma, quando eu o sugeri. Embora no registo escrito não se tenha referido às características visuais de cada uma das isometrias, durante a fase de explicitação, apercebeu-se facilmente das mesmas.

Dificuldades manifestadas. Na realização da tarefa, o par não apresentou qualquer dúvida. O enunciado da tarefa 2A era curto, simples e de fácil execução. Aliás, a construção de frisos com colagens foi bastante apreciada. A tarefa 2B já não foi recebida com tanto entusiasmo pois implicava apenas a justificação das opções. Para o fazer recorreram à descrição, talvez resultado da minha insistência para que fossem o mais completo possível nas suas respostas. Estava à espera que usassem uma justificação apoiada nas características visuais das figuras obtidas por cada uma das isometrias, na observação daquilo que permanece e do que se altera. Tal não aconteceu de forma espontânea, apenas teve lugar na fase de troca de ideias, com as questões que eu ia colocando. O par utilizou o material apenas quando eu lhe sugeri, pois considerou que usá-lo é sinónimo de dificuldade e tentou resolver tudo sem recorrer a ele. Continuou a não se referir ao centro de uma rotação.

Síntese. As tarefas com colagens e motivos acetatos, bem como o recurso ao GSP, despertaram o interesse destes alunos, mas o mesmo não aconteceu com a parte da tarefa que pedia para justificar as suas opções. Reconheceram que as isometrias conservam a forma e o tamanho das figuras; distinguiram visualmente as três isometrias.

No desenvolvimento da segunda tarefa, para os três movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar”, as respostas deste par situam-no no nível 1 do pensamento geométrico para os movimentos “virar” e “rodar”, e no nível 2 para o movimento “deslizar”. Notoriamente, é na translação que este par evidencia um nível de pensamento mais elevado, parecendo estar no nível 2. Tal deve-se ao facto de agora já usarem o termo “deslize”.

Tarefa 3.

Na pavimentação obtida por reflexões, o par justificou ter completado a pavimentação de forma correta alegando ter descoberto um padrão: “a figura 2 é a reflexão da figura 1, e é sempre a reflexão da figura anterior”. Na 2.ª pavimentação, o par identificou a isometria em causa, a translação, e voltou a falar na descoberta de um padrão, em que “cada figura resulta da translação da figura anterior”. Na 3.ª pavimentação, construída a partir de rotações, o par RD registou - “descobrimos que as figuras seguiam um padrão: a 1.ª figura roda um quarto de volta

no sentido dos ponteiros do relógio para baixo e para o lado”, “foi usada uma rotação de um quarto de volta no sentido dos ponteiros do relógio”.

Na continuidade das pavimentações, seguiu-se a pavimentação livre (Anexo D, Par RD, Tarefa 3A). Optaram por usar apenas rotações e na descrição das mesmas caracterizaram o sentido e a amplitude da rotação. A sua descrição foi feita por filas, tal como a colagem; descreveram a primeira figura de cada fila comparando-a com a posição da figura colada no primeiro espaço e depois por comparação com a anterior.

Selecionei uma das pavimentações livres realizadas pela turma e pedi aos alunos-caso que a reproduzissem no GSP, individualmente. Para isso, forneci, numa folha aberta do GSP, o motivo da clave de sol e, em papel, a pavimentação que teriam de reproduzir realizada por outra colega (Figura 5) e deixei-os fazer as suas tentativas.

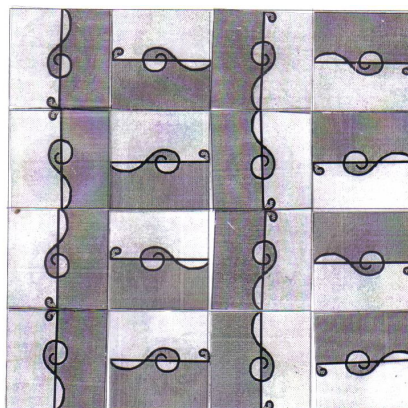


Figura 5. Pavimentação reproduzida no GSP

Para construir esta pavimentação no GSP, o Rogério construiu a primeira fila usando rotações de (-90^0) . Para indicar o centro de rotação, percebeu que teria de ser um dos vértices da figura, marcou o superior direito como centro de rotação, mas viu que não era o pretendido e tentou com o vértice inferior direito, resultando a rotação pretendida. Completou a fila procedendo sempre desta forma. Para construir a segunda fila, aplicou uma reflexão de eixo horizontal à primeira fila e apagou as figuras que se encontravam na segunda e quarta posição e construiu-as a partir de uma rotação da figura anterior de (-90^0) com centro no vértice inferior direito. De seguida, selecionou as duas filas e aplicou-lhes uma translação de 6 cm na vertical e 0 cm na horizontal. A imagem transladada apareceu na parte superior, contrariamente ao que o aluno estava à espera. Ia-me perguntar como se fazia, mas ocorreu-lhe uma ideia e explicou-me “se quero que vá para baixo, é ao contrário, é negativo”, e refez o movimento aplicando uma

translação de (-6) cm na vertical. Este procedimento mostra que o aluno reflete sobre o que está a construir e não precisou da minha intervenção para corrigir a opção que tinha tomado.

No caso do Dinis, para construir a mesma pavimentação no GSP, este aluno construiu a primeira fila usando rotações de (-90°) . Para indicar o centro de rotação, descobriu logo que era o vértice inferior direito. Completou a fila procedendo sempre desta forma. De seguida, refletiu a primeira figura, usando como eixo a base da figura, e repetiu o movimento refletindo a figura anterior até concluir a coluna. Depois, completou cada uma das filas usando rotações de (-90°) com centro de rotação no vértice inferior direito da figura anterior.

A tarefa que se seguiu (tarefa 3B) consistia em descobrir quantas peças teria um “dominó isométrico” construído a partir do motivo da clave de sol. Para isso, todas as peças teriam de ser formadas pelos transformados da clave de sol por aplicação de qualquer uma das isometrias. O par optou por primeiro pensar em todas as transformados isométricos da clave de sol e procedeu às colagens, experimentando colar o motivo nas várias posições possíveis. O número de espaços destinados a estas colagens, quadrados equivalentes ao motivo, era, propositadamente, mais do que o necessário, justamente para não condicionar as investigações dos alunos. O par conseguiu construir oito transformados diferentes e concluiu não haver mais hipóteses, pois não havia modo diferente de colar o motivo (Anexo E, Par RD, Tarefa 3B). Pedi que identificasse, em cada uma das figuras, a isometria que a tinha gerado, já que quando procedeu às colagens não pensou na transformação geométrica aplicada, mas sim em colar o motivo em posição diferente das anteriores. Para os transformados por uma reflexão de eixo oblíquo, o par viu-os como resultante de uma composição de duas isometrias: reflexão e rotação de 90° no sentido positivo ou negativo. Tal, levou-me a realizar no GSP esta isometria para que o par pudesse verificar o transformado da clave de sol por uma reflexão de eixo oblíquo.

Depois de descobertas todas as figuras que podiam usar na construção do dominó tinham de descobrir o número de peças que o formam. Para tal, proporcionei diferentes metodologias de trabalho. O par optou por usar o documento do Word com os espaços próprios à montagem das peças. Começou por atribuir letras (de A a H) para identificar todos os transformados e não se perder no raciocínio, seguiu o esquema AA, AB, AC, AD, AE, AF, BB, BC, ..., considerando que as peças AB e BA são isométricas e, por isso, já não as construiu, o que não corresponde à realidade.

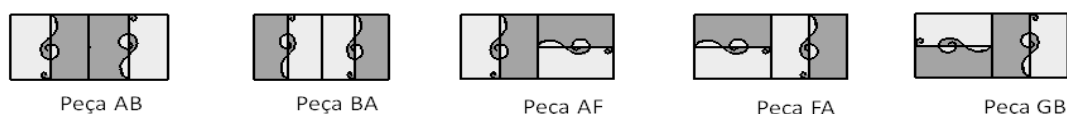


Figura 6. Exemplo de peças do dominó

Por outro lado, não identificaram outras peças que eram realmente isométricas. Por exemplo, não registaram a peça FA por considerarem que AF=FA e não reconheceram AF e GB como peças isométricas, ou seja, a mesma peça (Figura 6). É que, contrariamente ao jogo do dominó em que a peça, por exemplo, 1-6, é a mesma que 6-1, basta rodá-la 180°, e por isso só existe no jogo uma peça, neste dominó a peça, por exemplo, AH \neq HA. Este par chegou ao total correto de 36 peças, mas não encontrou todas e repetiu algumas, por ter tirado a ilação anteriormente explicitada. Para chegar a este resultado não precisaram de construir todas as possibilidades, uma vez que a forma como dispuseram as peças permitiu-lhes facilmente reconhecer um padrão e resolver o problema.

Assim, começaram por fazer uma coluna com todas as peças iniciadas pela mesma figura, a que chamaram A, e efectuaram todas as combinações possíveis num total de 8; na segunda coluna dispuseram todas as peças iniciadas pela figura que chamaram de B e, novamente, efectuaram todas as combinações possíveis, num total de 7 por considerarem erradamente haver peças congruentes (AB=BA); na terceira coluna, usando o mesmo raciocínio, repararam que o total de combinações possíveis era 6, na coluna seguinte era 5. Foi então que repararam que o total de peças seria dado pela soma de 8+7+6+5+4+3+2+1 e não terminaram as colagens (Figura 7).

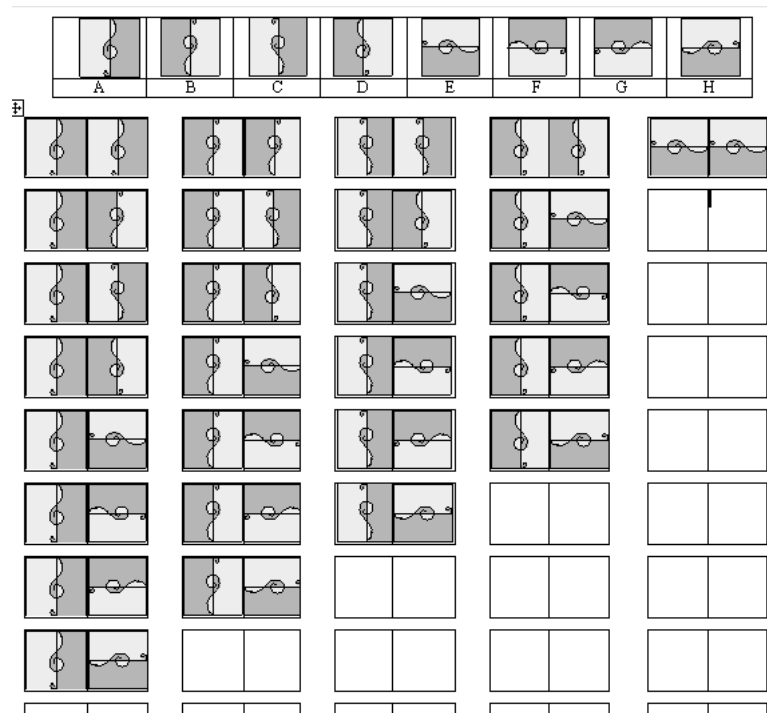


Figura 7. Estratégia usada para descoberta das peças do dominó

No mesmo dia desta aula, convidei este par a estar presente na aula de apoio, pois iríamos jogar com o “dominó isométrico” que eu havia previamente construído.

Para jogar, formei grupos de quatro elementos e expliquei que teriam de jogar usando apenas translações. Jogaram com bastante entusiasmo e, para minha satisfação, conseguiram encontrar sem dificuldade as peças que poderiam jogar e reconhecer alguma peça mal jogada.

Para apresentar as respostas, solicitei aos alunos que tinham encontrado as 36 peças logo na 1.ª aula destinada à tarefa e que, convictos da sua resposta não tinham investido mais na mesma, justificassem as suas descobertas. O par escolhido foi o RD. Começou por explicar a sua estratégia na organização da resposta, responsável por terem seguido o raciocínio $8+7+6+5+4+3+2+1$, mas quando referiu não colocar determinadas peças por considerar serem repetidas, tais como, $AB=BA$, $AC=CA$, ..., alguns alunos não concordaram, justamente os que tinham considerado existir 64 peças. Pedi à Cláudia, detentora dessa opinião, que justificasse por que razão não concordava. Apresentada a sua ideia, o par RD dispôs alguns motivos, rodou-os e verificou que a colega tinha razão.

Na última tarefa desta sequência, a tarefa 3C, o par identificou as peças obtidas por reflexão, rotação e translação. Nas peças obtidas por reflexão marcou corretamente o eixo e escreveu “vimos que tinha uma reflexão de eixo vertical”. No caso das geradas por rotação, assinalou na peça o centro de rotação, mas na sua descrição apenas falou da amplitude da rotação “vimos que tinha uma rotação de 180^0 ”. Relativamente ao sentido do ângulo de rotação, ficou na dúvida se teriam de o indicar ou não e, uma vez que se tratava de um ângulo com amplitude de 180^0 , concluiu que não era necessário. No caso das obtidas por translação, registou “vimos que tinha uma translação de 3 cm para a direita”.

Esta tarefa encerrou o conjunto de tarefas que percorreu as cinco fases de aprendizagem que, segundo van Hiele, permitem aceder ao nível seguinte do pensamento geométrico.

Desempenho do par na resolução da tarefa. Completar as três pavimentações relativas à tarefa 3A foi uma atividade bastante fácil e muito bem acolhida, novamente devido às colagens. O par completou e identificou as isometrias em causa corretamente, mas descreveu-as de forma nem sempre completa. Em todos os casos alegou ter descoberto um padrão que lhe permitiu continuar a pavimentação. Apenas na descrição da rotação é que caracterizou alguns dos seus elementos: o sentido e a amplitude da rotação. Relativamente à pavimentação livre, perante a mesma, os dois alunos não usaram a mesma forma de a reproduzir, mas ambos chegaram à pavimentação pretendida. Seguiram caminhos diferentes, a escolha do Rogério fez com que

tivesse terminado mais rapidamente, usando a rotação, a reflexão e a translação, porém teve de usar a estratégia tentativa-erro para encontrar o centro da rotação. Por outro lado, o Dinis mostrou uma particular apetência para as rotações e descobriu logo aquele que devia marcar como centro de rotação. Quando lhe perguntei como soube, respondeu-me “então, vi”.

A construção da pavimentação no GSP exige a indicação de todos elementos que caracterizam cada uma das isometrias, por isso, se estes alunos conseguiram reproduzir a pavimentação sugerida, obrigatoriamente, sabem indicá-los. Contudo, no registo escrito de como procederam, ainda não são suficientemente precisos.

Na construção do dominó isométrico, este par ficou desde logo bastante entusiasmado e criou prontamente a sua estratégia. Apesar da minha insistência para que verificassem se tinham pensado em todas as peças, eles mantiveram-se fiéis à sua ideia, pois já tinham utilizado aquela estratégia de resolução em vários problemas. De facto a estratégia conduziu-os ao total correto, mas não à construção de todas as peças do dominó. Durante o jogo de dominó, revelaram uma ótima capacidade de visualização fazendo todas as jogadas de forma correta e com entusiasmo.

Quanto à última parte, identificaram corretamente as figuras obtidas por reflexão, rotação ou translação da figura da esquerda. Conforme era pedido, identificaram (nas figuras), consoante os casos: o eixo de reflexão, o centro de rotação, a direção/sentido da translação; e descreveram a isometria em causa. Na descrição, foram precisos na reflexão e na translação, mas na rotação, não se referiram ao centro, apesar de o terem marcado. No final, identificaram corretamente as peças com simetria, neste caso, de reflexão e de rotação.

Dificuldades manifestadas. Pelas respostas dadas pude verificar que estes alunos ainda não sentem necessidade de indicar todas as características das diferentes isometrias, embora o consigam fazer, pelo menos nas situações apresentadas.

A utilização do GSP na atividade da pavimentação tentou colmatar essa lacuna, pois aí seriam obrigados a ser precisos nas suas indicações, caso contrário não obteriam a pavimentação pretendida. No entanto, no registo escrito não descrevem todos os passos de construção, podem inclusivamente marcar na figura mas não registam na resposta.

Síntese. O conjunto da tarefa permitiu um bom trabalho de par, com a partilha de ideias e o estabelecer de conclusões. O ambiente de ensino criado, desde os materiais às tarefas disponibilizadas, mostrou-se apelativo.

Tanto o Rogério como o Dinis conseguiram reconhecer e distinguir as três isometrias em

causa; realizar translações, reflexões e rotações com/sem o auxílio do material de apoio e utilizar o vocabulário apropriado. No entanto, só se referem a determinados elementos das isometrias quando são diretamente questionados sobre os mesmos, caso contrário nem sempre sentam necessidade de os caracterizar.

Pelo conjunto da tarefa, para os três movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar”, considero que o desempenho deste par situa-o no nível 2 do pensamento geométrico.

Tarefa 4.

A tarefa 4 propunha três frisos, cada um obtido pela aplicação de apenas uma das três isometrias estudadas. Seguindo um guião, os alunos foram levados a tirar algumas conclusões acerca das propriedades de cada uma delas (Anexo E-2, Par RD, Tarefa 4).

O 1.º friso apresentava simetria de reflexão. Eis o diálogo registado entre os elementos do par RD na realização desta tarefa:

R – É uma rotação!

D – Não, não pode. É uma reflexão.

R – Oh! Era isso que eu queria dizer!

D – Passa-me o material. [referindo-se aos motivos em acetato. Coloca um dos motivos sobre o 1.º do friso, vira-o segundo o lado direito do mesmo e conclui]

É sempre a reflexão do anterior a partir do lado direito da figura.

Seguindo os passos da tarefa, tentaram continuá-la mas sentiram alguma dificuldade em compreender a linguagem, tanto que me pediram para “traduzir” o 5.º passo e na última questionaram-me sobre o que tinham que concluir. Por fim registaram: “concluimos que este friso tem vários eixos de reflexão verticais. Se o ponto A tem x cm da reta, então tem em todos os casos...”.

No friso seguinte, obtido por translações, desta vez mais habituados à linguagem, revelaram mais facilidade em seguir os passos, não tendo solicitado a minha ajuda. Contudo, as conclusões foram novamente pouco completas: “...os pontos D e D’ assinalados no friso têm em todos os casos $3\text{ cm} = a$ uma figura”.

No seguinte, obtido por sucessivas rotações, tinham vários passos a percorrer e teriam de ser bastante rigorosos nas suas medições. Para esta isometria concluíram: “Todas as retas vão-se cruzar no ponto D que é o centro da rotação”.

A discussão da tarefa 4, com recurso ao GSP foi a atividade escolhida para a sessão seguinte e para desenvolver a fase 3 de aprendizagem. Com o friso dado no GSP, pedi ao par que

executasse os passos. Uma vez concluídos todos os passos da tarefa relativos à reflexão, coloquei questões de forma a poderem partilhar as suas conclusões e levá-los a melhorá-las tanto no conteúdo como na forma de se exprimirem.

Prof. – Qual a relação entre a distância do eixo aos pontos que são simétricos, tal como A e A' ?

R – É igual.

Prof. – Então, se eu disser que a distância entre A e o ponto onde se intersecta com r é de 1,5 cm, o que podes dizer sobre a distância entre o simétrico de A e esse ponto?

D – É também 1,5 cm, porque o eixo passa entre os dois.

Aproveitei para explorar a composição de isometrias.

Prof. – Veem mais alguma isometria neste friso?

D – Rotação não pode ser, só se for de 360° .

Conversam sobre o assunto, o Rogério tira o acetato circular com o motivo inscrito, roda-o e, em conjunto, reforçam o que o Dinis já havia dito.

Prof. – Então, a que conclusão chegaram?

D – A figura aparece ou invertida ou na mesma, quando está invertida não pode ser de uma rotação, é uma reflexão, a outra que está na mesma, para ser uma rotação teve de dar uma volta inteira para ficar na mesma posição, logo 360° , mas não podia sair do sítio. Tinha que haver uma ... posso dizer a resposta? [concordei] É uma translação da 1.ª fig. de 6 cm na horizontal para a direita.

Prof. – Atendendo a isso, será que descobrem alguma relação entre as reflexões e as translações?

R – De duas em duas reflexões há uma translação.

Prof. – Como assim? Não percebi.

R - [apontando para o friso] Reflete-se uma vez e fica assim [apontando para a 2.ª imagem do friso] se refletir outra vez, fica direita, na mesma posição, mas mais à frente 2 casas, ou 6 cm.

Prof. – Mas quaisquer duas reflexões seguidas são sempre uma translação?

R - Não, ainda na última aula vimos aquelas duas reflexões do Miguel que era o mesmo que uma rotação de 180° , lembra-se professora?

Prof. – Então, se bem se recordam, como eram as duas reflexões de que o Miguel falou? Eram como estas de eixos ...[deixei que eles completassem, como não o fizeram, insisti] ... qual era a posição de um eixo em relação ao outro?

R – Perpendicular.

Prof. – E neste caso? Os eixos são perpendiculares?

D – Não, são paralelos.

R – Professora, e se fossem reflexões de eixo horizontal era a mesma coisa, não era? Porque se virar e tornar a virar para baixo ficamos com a figura na mesma!

Prof. – Pois, então, podemos concluir que uma reflexão seguida de uma reflexão de eixos

paralelos é sempre uma ...
Par RD – ...translação.

Seguiu-se a exploração no GSP do 2.º friso, com simetrias de translação

Depois de traçados os segmentos de reta que unem pares de pontos simétricos, questionei:

Prof. – O que podemos concluir quanto à posição entre os vários segmentos de reta traçados?

R – Concluímos que são paralelos e medem todos 3 cm.

Prof. – Então, o que é que podemos concluir sobre as translações?

D – A distância entre eles [refere-se aos pontos e seus transformados] é a da figura.

Prof. – Então reparem, [transladei o mesmo motivo 4 cm] a distância entre os pares de pontos, A e A' continuará a ser 3 cm?

R – Não, agora é de... 3+1... é de 4.

Prof. – Então, será que o comprimento do segmento de reta que une cada ponto da figura original ao seu transformado tem sempre o mesmo comprimento que o motivo? [os alunos respondem em coro que não] Então a que corresponderá a distância entre, por exemplo, A e A' , ou B e B' ?

R – Ao espaçamento.

Prof. – Como assim? Ao espaço existente entre a figura original e a imagem?

R – Não, ao espaço que se deslocou.

Prof. – Ou seja, à grandeza da translação. [continuei] Há bocado, vimos que uma reflexão seguida de uma reflexão de eixos paralelos era uma [dei tempo para completarem] ... uma translação. E agora, o que podemos dizer duas translações seguidas?

R – É uma translação!

Prof. – Se eu quisesse obter a 6.ª imagem a partir diretamente da 1.ª, podia ou não? O que teria de fazer?

R – Teria de fazer uma translação de ... 3, 6, 9, 12... 15! De 15 cm.

Seguimos para o 3.º friso, que, por se tratar de rotações, envolvia mais passos.

Finda a construção e marcado o ponto D (5.º passo da tarefa), perguntei:

Prof. – O que representa este ponto, o ponto D ?

D – É por onde passam todas as mediatrizes, é o centro de rotação, por isso é que todas passam por ele.

Prof. – [para me certificar de que tinham compreendido, insisti] Se tivessem de colocar o piónés para fazer aquela rotação, onde o colocariam?

D – No ponto D .

Prof. – E o que podemos concluir relativamente à distância entre qualquer ponto da figura original e respetivo transformado ao centro de rotação?

R – É igual.

Prof. – Dá-me um exemplo.

R – Então a distância de A a D é de 3,3 cm e de A' a D , também é 3,3 cm.

Prof. – E quanto à amplitude de rotação?

D – É de 90° .

Prof. – De certeza? Vamos experimentar no GSP. [a indicação estava errada e quando o sombreado da imagem apareceu, aperceberam-se de que o sentido estava errado].

D – Não professora é de (-90°) .

Prof. – E olhando para este friso com todas construções traçadas, podem-me dizer, pelas respetivas letras, o ângulo que nos dá essa medida de amplitude?

D – Eu acho que sei, é o ângulo ADA' .

R – É o ângulo BDB' , o CDC' .

Desempenho do par na resolução da tarefa. O par, mais uma vez, iniciou a tarefa com entusiasmo, porém, a partir do 5.º passo ainda referente à primeira isometria, a reflexão, estes alunos começaram a ficar um pouco desanimados por não estarem a compreender o que lhes era pedido. O mesmo aconteceu na conclusão. No seguimento da tarefa, os alunos foram familiarizando-se com a linguagem, revelando mais facilidade em seguir os passos, precisando da minha ajuda pontualmente na interpretação. Contudo, as conclusões obtidas foram novamente pouco completas, não conseguiram reunir as várias descobertas feitas.

Notei que à medida que iam avançando na tarefa, as medições e construções foram se tornando maçadoras. Quando passamos para o GSP, os alunos voltaram a ficar mais entusiasmados. Além de poderem usar o computador, tornou-se bastante mais fácil e rápido desenvolver os passos no GSP do que no papel, com as ferramentas de desenho.

Dificuldades manifestadas. Embora tenham realizado com sucesso todos os passos e registado as respostas certas, sentiram alguma dificuldade em compreender a linguagem, tanto que me pediram para “traduzir” algumas questões e, no momento de tecerem as conclusões finais, foram parcos nas ilações. Além da linguagem pouco precisa e nem sempre a mais adequada, este par não conseguiu estabelecer conclusões que servissem de generalização para cada uma das isometrias. A dificuldade maior continuou a verificar-se no registo escrito, mais concretamente, em conseguir organizar uma resposta que transmitisse as suas descobertas. Contudo, conseguiram reconhecer as propriedades das diferentes isometrias, tal verificou-se na forma correta como preencheram o texto com lacunas, fornecido no final da aula.

Traçar com rigor o que lhes foi pedido, não constituiu propriamente uma dificuldade mas revelou-se uma tarefa cansativa. Fazer as mesmas construções no GSP, revelou-se uma atividade mais estimulante e mais apreciada.

Síntese. O par reconheceu sem dificuldade as propriedades visuais respeitantes a cada uma das isometrias. Relativamente às características, aos elementos necessários para descrever

cada uma das isometrias, constatei que, apesar dos registos escritos da tarefa 4 o contrariarem, globalmente, o par sabe enumerar todas essas características, porém nem sempre com a linguagem mais adequada e completa.

No desenvolvimento desta tarefa, que tinha como objectivo a descoberta de propriedades para as três isometrias, considero que o trabalho deste par o situa no nível 2 do pensamento geométrico.

Tarefa 5.

Utilizando as situações do enunciado da tarefa 5, num documento do GSP sem malha quadriculada, apresentei a 1.ª situação, exemplo de uma translação, e pedi ao par que executasse os passos necessários para obter aquele transformado.

D – Seleccionamos F_1 , clicamos em “transform” e “translate”. E agora? Pusemos aqui que avançava 9 casas para baixo e depois 12 para a direita, mas no GSP não está com casas.

R – Usamos as medidas! Olha duas casas são 1 cm.

D – Então, avança 4,5 cm e depois faz outra com 6 cm.

R – Mas temos de escrever na vertical 4,5 e na horizontal 6 cm. Pode-se já colocar as duas medidas? Mas aqui aparece ao contrário, primeiro pede a horizontal e depois a vertical...

D – Isso não interessa... Põe já as duas, na horizontal são 6 cm e na vertical 4,5.

Prof. – Então, para vocês F_2 é o transformado de F_1 por duas translações. E o que é que já tínhamos visto a propósito da isometria obtida por duas translações, era sempre uma ...[esperei que completassem] ... translação. Então vejam lá se em vez de duas translações não conseguimos obter F_2 apenas com uma translação.

R – É uma translação assim [erguendo no ar uma régua na oblíqua].

Limitada pela linguagem associada aos vetores que não pretendia usar, pedi que marcassem um segmento de reta que mostrasse a direção, o sentido e a grandeza desse deslize. O Dinis marcou o ponto do canto inferior de F_1 e fez o mesmo em F_2 . Questionei porque tinha marcado esses pontos.

D – Porque escolhemos uns pontos quaisquer.

Prof. – Se atribuíssem uma letra ao primeiro ponto que marcaste, por exemplo A , como designarias o ponto que marcaste em F_2 ?

D. – Chamava de A' .

Prof. – Porque em relação a A esse ponto é o seu ...

R. – Ai como é se chama...é o transformado.

D – Ah! Pois é! Agora, se unirmos esses pontos vemos o que a figura deslizou.

Passamos à discussão da 2.ª situação, que dizia respeito a uma reflexão.

R – Pomos um ponto no vértice superior esquerdo de F_1 e outro no ponto superior direito de F_2 .

Prof. – Pediram para marcar esses dois pontos, porque eles são ...

R - ... simétricos. Depois, com esses dois pontos simétricos, constrói uma semirreta.

Prof. – Uma semirreta?

R – Não, não... mas professora, [ganhando tempo para pensar na resposta] ... tenho uma dúvida ... temos de mandar selecionar primeiro os dois pontos? Se calhar é melhor por letras. Prof., pode marcar A e A' ?

Prof. – Sim [ajudei a legendar], e o que querem construir afinal?

R - ... um segmento de reta. Agora é pôr o ponto médio ... agora faz-se ... [estava com dificuldade em como mandar traçar a mediatriz de $[AA']$].

Prof. – O que vai ter de passar no ponto médio?

Par RD – O eixo de reflexão.

Prof. – E como o vamos mandar construir? [ajudei] Que posição irá ter esse eixo em relação ao segmento de reta $[AA']$?

D – Oblíquo. [confundindo a posição do eixo em relação a F_1 , com o que lhe foi pedido]

Prof. – Acho que não ouviste bem a pergunta. Que posição irá ter esse eixo, o eixo de reflexão, em relação ao segmento de reta $[AA']$?

D – [dando-se conta da confusão] Perpendicular, perpendicular!

Prof. – [pedi para assinalar os pontos BB' , sendo B um ponto qualquer de F_1] Se traçar o segmento de reta $[BB']$, que posição terá em relação ao eixo de reflexão?

R – Também vai ser perpendicular.

Movimentei F_1 para que verificassem que a relação de perpendicularidade entre os segmentos de reta que unem pontos simétricos ao eixo de reflexão não se alterava e fiz outra reflexão, com um eixo definido por mim, para que o pudesse movimentar. Pelo diálogo que fui estabelecendo com o par notei que tinham presente a equidistância de pontos simétricos ao eixo de reflexão.

Seguiu-se a exploração da 3.ª situação no GSP. No registo escrito consideraram tratar-se de uma rotação de 45° , mas não determinaram com rigor o centro da rotação.

D – Temos de marcar dois pares de pontos. [escolheram corretamente dois pontos e os respetivos transformados, atribuindo-lhes letras]

R – Agora unimos cada ponto ao seu transformado. Agora marcamos o ponto médio, o “midpoint”, de cada um deles e ... agora temos que traçar a mediatriz e tem que passar neste ponto.

Prof. – Então vamos, construam. [vi-os hesitantes]... já me disseram que tem que passar neste ponto, e qual a sua posição em relação ao segmento de reta traçados?

D – Pois, para traçar a mediatriz temos que mandar fazer uma perpendicular que passe pelo ponto médio.

[traçaram as duas mediatrizes e marcaram a sua interseção como C , o centro de rotação]

Desempenho do par na resolução da tarefa. Identificar a isometria em causa em cada uma das situações foi tarefa simples, porém descrevê-la por escrito, bem como descrever os passos

dados que permitem identificar o centro de rotação, o eixo de reflexão, entre outros, não foi tarefa tão bem aceite. Realizar a mesma atividade no GSP, em que os alunos em vez de registarem os passos, executam-nos, e em que não têm de ser eles a efetuar as medições, foi uma tarefa bem ao gosto destes alunos.

No que diz respeito à translação na oblíqua têm tendência para a verem como uma composição de duas translações: vertical e horizontal. Penso que esta situação está relacionada com os próprios comandos do GSP e com o facto de ainda não conhecerem a linguagem dos vetores. Reconhecem a comutatividade da translação, ao afirmarem que a translação pode ser vertical, seguida de horizontal ou vice-versa. Quanto à reflexão, o par não teve qualquer dúvida em descobrir o eixo de reflexão e mostrou reconhecer propriedades desta isometria. Relativamente à rotação, no papel, com as ferramentas de desenho não foram rigorosos na construção, mas no GSP, conseguiram descobrir o centro da rotação e, com ele, confirmar a amplitude da rotação.

Dificuldades manifestadas. Os alunos continuam a revelar alguma falta de vontade em descrever, por escrito, os passos dados na aplicação de uma isometria. Na base disso, encontra-se a dificuldade em usar a linguagem e vocabulário corretos, em organizar a sua resposta de forma clara e completa e ser uma tarefa demorada.

A falta de rigor no traçado geométrico impossibilitou-os de determinar com exatidão o centro da rotação, situação que foi ultrapassada com o GSP.

Síntese. No desenvolvimento desta tarefa considero que, para as três isometrias, este par situa-se no nível 2 do pensamento geométrico, pois consegue identificar, construir e caracterizar cada uma das isometrias atendendo às suas propriedades.

Por vezes vão mais além, conseguindo condensar uma rotação seguida de uma translação numa só rotação o que, de acordo com Costa (2005), é característico do nível 3 de van Hiele. No entanto, a falta de rigor no traçado geométrico não lhes permitiu apontar com exatidão o centro de rotação, situação que no GSP já não acontece.

Tarefa 6.

A primeira rosácea apresentada continha apenas simetria rotacional.

R – [questiona-me] Aqui estão seis motivos, isto é um hexágono, depois tem 60° de amplitude, está relacionado?

Prof. – Onde está o centro do hexágono? Quantos setores tem à sua volta? [foi-me respondendo acertadamente]

R – Ah, então $360:6!$

D – É que o Rogério tinha feito assim: aqui é 90° [apontando para um dos quartos do hexágono], e cabe um setor inteiro e este meio, então este é 30° [apontando para meio setor] e este é 60° [apontando para um setor completo].

Na seguinte, a rosácea tinha simetria rotacional e axial. Para descobrirem a amplitude de rotação, repararam que os motivos sofriam uma rotação de dois setores, logo 120° .

Fiz com que reparassem que o enunciado da tarefa continha um exemplo para rosáceas só com simetria de rotação e outro com simetria de rotação e de reflexão. Questionei se não haveria rosáceas sem simetria de rotação. Ficaram pensativos. Ia sugerir que voltassem a ler a definição de rosácea. Mas antes de terminar a minha sugestão, fui interrompida pelo Diogo, que sugeriu “...só se é porque podemos dizer que tem sempre a rotação de 360° ”.

A última parte desta tarefa permitiu aos alunos darem largas à imaginação e criarem as suas próprias rosáceas a partir de 3 motivos (assimétricos e em acetato). Consistia em construir três rosáceas, obedecendo a determinadas características (Anexo E-3, Par RD, Tarefa 6).

O par escolheu o motivo da clave de fá para fazer a primeira rosácea, cuja condição era ter apenas simetria rotacional. Para determinar a medida da amplitude dos ângulos de rotação, dividiu 360° pelo número de motivos usados.

Na 2.^a rosácea, era condição obrigatória construir uma rosácea com simetria rotacional e axial. Optaram por usar o mesmo motivo e repetidamente. Usaram os mesmos dez motivos (a clave de fá), fazendo reflexões sucessivas. Para descobrir a amplitude dos ângulos de rotação dividiram os 360° pelo número de simetrias de rotação, pois viram que, se dividissem pelo número de motivos, a amplitude seria a mesma da rosácea anterior e não se tratava da mesma situação.

Na última rosácea, como a condição era ter quatro rotações e também reflexões, o par continuou a escolher o motivo da clave de fá e usou oito.

Depois de todas as rosáceas apresentadas, perguntei ao par se conseguia reparar em alguma relação entre o número de rotações e de reflexões de uma rosácea. Já sabia que tinham notado que nas suas rosáceas o número de simetrias de rotação e de reflexão era igual e foi essa a resposta que deram. Contudo, o Rogério chamou a atenção para a primeira que fizeram e para algumas apresentadas por outros pares que apenas tinham simetrias de rotação e o colega concordou com ele, por isso, quando uma rosácea tem simetria de reflexão, o número de reflexões é igual ao número de rotações.

Desempenho do par na resolução da tarefa. Apesar das várias sessões dedicadas a este tema, esta tarefa com novos motivos veio, novamente, despertar o interesse dos alunos.

Na construção das rosáceas, embora não tenham sido muito criativos – usaram sempre um só e o mesmo motivo – fizeram-nas de acordo com as condições pedidas. Revelaram um grande à-vontade com as rotações, identificaram sem dificuldade o centro de rotação, as amplitudes de rotação e o número de simetrias rotacionais; relativamente à reflexão, identificaram corretamente os eixos de reflexão e o número de simetria axiais.

Dificuldades manifestadas. Os alunos deste par não revelaram nenhuma dificuldade na realização da tarefa, apenas pouca criatividade.

Síntese. Conseguiram desenvolver com sucesso os objetivos traçados para esta tarefa: estabelecer generalizações sobre o número de simetrias de rotação e de reflexão das rosáceas; reconhecer e aplicar propriedades das isometrias.

De acordo com os conhecimentos evidenciados ao longo da tarefa, estes alunos parecem oscilar entre o nível 2 e o nível 3 de van Hiele. Para descrever as isometrias, usam o vocabulário adequado e pensam nas transformações em termos das suas propriedades – características próprias de nível 2. Por vezes vão um pouco mais além, relacionam as propriedades e compreendem a equivalência de movimentos, o que é próprio do nível 3 de van Hiele.

Jorge e Cláudia (Par JC).

Tarefa 1.

Relativamente à primeira situação, exemplo de uma reflexão de eixo vertical, este par referiu “a fig. 1 virou-se ao contrário para a direita” e “encontramos também o seu eixo de simetria”, ou seja, viu tratar-se de uma viragem e traçou o eixo de reflexão, com o auxílio do mira. Assim, usaram apenas uma isometria para descrever a situação. No entanto, aquando das apresentações das respostas à turma, foi-lhes muito difícil transmitir ao par que executava as indicações dadas como traçar esse eixo sem auxílio do mira, mas tinham presente que teria de passar a igual distância das duas figuras.

Para a segunda situação, referiram que “a figura 1 não se alterou, só se deslocou para a direita mais um quadrado”.

Na terceira situação, este par usou dois movimentos rígidos - “rodar” e “avançar”, caracterizaram a amplitude da rotação, mas desprezaram o sentido e o centro de rotação, e

descreveram, tal como na situação anterior, a grandeza e direção/sentido do deslize: “a figura 1 rodou 90° e avança para a direita 1 quadrado”.

No que diz respeito à primeira situação, na entrevista individual que se seguiu à aula, o Jorge indicou que para conseguir traçar o eixo de reflexão sem o auxílio do mira, tinha de dividir a meio a distância entre as duas figuras, pois está à mesma distância das duas e conseguiu traçá-lo corretamente usando o mesmo método que o Rogério. Relativamente à segunda situação, indaguei como tinha a certeza de estar a deslizar a figura da forma pretendida. Esclareceu que imaginava uma linha reta para ter a certeza de estar a efetuar o deslize correto. Na terceira situação, coloquei o mesmo desafio proposto aos outros alunos, mostrar como fez e descobrir outra forma. Pegando num motivo em acetato, executou os movimentos que o par tinha descrito na tarefa. Pedi-lhe que procurasse outro material que também o pudesse ajudar. Após várias tentativas, ele viu que utilizando dois dos círculos em acetato conseguia obter a 2.ª figura, num dos casos teria ainda de deslocar a figura. Perguntei-lhe onde colocaria o pionés em cada uma das situações. Após várias tentativas concluiu que num dos casos era no centro da figura e no outro seria no vértice superior direito. Embora tenha colocado os pionés nos centros de rotação corretos, o aluno não verbalizou ser à volta desse ponto que se dava a rotação, que a figura girava.

Relativamente à primeira situação, a Cláudia, na entrevista individual, quando questionada sobre a posição do eixo de reflexão, referiu “o eixo de simetria tem de ser paralelo a cada um dos lados das figuras e tem que passar no meio”, contudo, para o traçar apenas marcou um ponto médio e traçou “a olho”, usando a régua, tal como o Dinis tinha feito. Quanto à segunda situação, pedi que esclarecesse como tinha sido deslocada a figura e a aluna fez o movimento com um dos motivos em acetato. Pedi-lhe uma garantia de estar a deslocar na direção certa e a aluna referiu ser necessário “ao deslocar a peça, manter sempre a mesma linha reta em cima e em baixo, paralelas uma à outra”. Quanto à terceira situação, a aluna manteve a opinião de que rodava 90° acrescentando “no sentido contrário aos ponteiros do relógio” e identificou o centro da figura como sendo o ponto onde colocaria o pionés, usando para tal o círculo com o motivo inscrito. Não identificou mais nenhum material que lhe permitisse realizar a transformação apresentada.

Desempenho do par na resolução da tarefa. No desenvolvimento desta tarefa, este par recorreu ao mira e aos motivos em acetato. Para descrever a translação, usou uma linguagem informal - “deslocar” – e tentou ser preciso indicando a grandeza e a direção do movimento. O

modo como descreveu a situação deixou perceber que, para este par, quando a figura “não se altera” está na presença de um movimento de deslize. Para a reflexão, contrariamente ao outro par, descreveu-a como uma única isometria. Para tal, usou o termo “virar” e traçou corretamente o eixo de reflexão, com o auxílio do mira, mas não referiu que era segundo essa linha que a figura virava. Só quando eu passei pelo par e questionei sobre aquela reta traçada é que considerou necessário completar o seu registo, acrescentando “encontramos também o seu eixo de simetria”. Na rotação, respondeu da mesma forma que o par RD, usando uma composição de duas isometrias: rotação e translação. Para a rotação usou o termo “rodar” e teve em conta dois dos três parâmetros, neste caso, direção e quantidade, mas nada disse sobre o centro de rotação; para a translação, usou o termo “avançar” e tentou ser preciso.

Dificuldades manifestadas. Este par não sentiu dificuldade na realização da tarefa, durante a sua execução nunca solicitou a minha ajuda. Mesmo assim, ia interpelando-os, sempre no sentido de os fazer refletir sobre a precisão das respostas. Por exemplo, este par tinha traçado a linha de viragem, mas na sua descrição não se tinha referido a ela, não sentindo necessidade. Antes da apresentação das respostas à turma, tal como o outro par, também estava convencido de que tinham dado todas as informações necessárias para descrever cada uma das situações apresentadas.

Encontrar o melhor termo para designar a translação, também constituiu uma dificuldade, apresentando dois termos diferentes: “avançar” e “deslocar”.

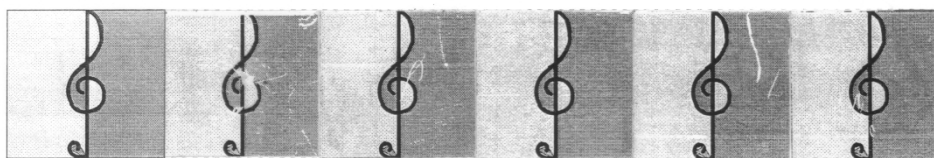
Indicar o centro de rotação, revelou-se de igual forma uma dificuldade, que foi contornada com recurso aos círculos em acetato e ao pionés.

Síntese. A tarefa despertou o interesse dos alunos, permitiu a troca e partilha de ideias. O par recorreu aos materiais disponibilizados que se revelaram úteis na realização da mesma. Foi com recurso ao mira que este par identificou a reflexão e traçou o eixo de reflexão e, individualmente, na fase da entrevista, foi graças aos círculos em acetato e ao pionés que estes alunos conseguiram descobrir o centro da rotação.

Para os movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar”, as respostas deste par situam-no no nível 1 de van Hiele, com códigos diferentes de sofisticação; é na reflexão que este par evidencia um nível de pensamento mais elevado, parecendo estar em transição para o nível 2.

Tarefa 2.

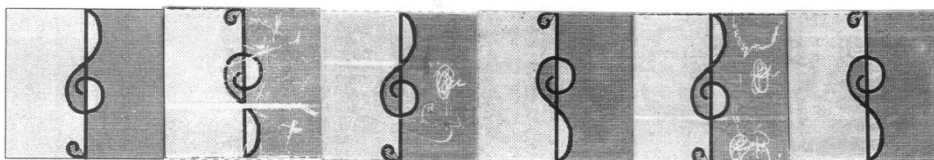
Nas respostas dadas à tarefa 2A, para caracterizar a translação, este par utilizou, pela primeira vez, o termo deslizar e tentou referir-se à sua grandeza e direção (Figura 8).



Como procedeste? Nós deslizamos, sempre, um quadrado para a direita.

Figura 8. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento

Na reflexão, considerou existirem duas formas de refletir a figura: “podemos reflecti-la para baixo ou para cima e para os lados”; completando o friso utilizando uma reflexão deslizante (Figura 9). Na descrição referiu “procedemos ao eixo horizontal da base e deslizamos um quadrado”. Como a expressão “procedemos” estava mal aplicada, questionei o que queriam dizer. Esclareceram-me que era como sinónimo de “escolheram”.

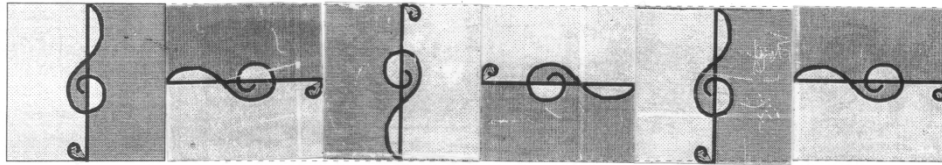


Como procedeste? Nós sabemos que a figura tem quatro formas de virar, para os dois lados, para cima e para baixo. Tendo em conta que procedemos ao eixo da horizontal da base e deslizamos um D.

Figura 9. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento

No que diz respeito ao friso formado a partir de rotações, descreveram corretamente a amplitude de rotação, indicando a amplitude de rotação em graus e o sentido da mesma, todavia, não se referiram ao centro de rotação (Figura 10).

Na conclusão da tarefa 2A, considerou que o tamanho nunca se alterava, mas quanto à forma, considerou que na reflexão e na rotação a forma da figura obtida alterava-se, confundindo a “posição” da figura com a “forma” (Figura 11).



Como procedeste? Não separamos que a figura tem quatro formas de se-
dar. Não utilizamos as quatro, rotacionamos 90° no sentido contrário dos pontei-
ros do relógio.

Figura 10. Friso construído pelo par JC através de colagem e descrição do procedimento

Compara a figura inicial com a dos seus transformados em cada uma das simetrias usadas.
O que podes concluir quanto à sua forma e tamanho?

Na I o tamanho e a forma se alteraram. Na II o tamanho
não se alterou apenas a forma, já na III o tamanho não se alterou

Figura 11. Resposta do par JC à segunda questão da tarefa 2A

Quando me deparei com esse registo, quis saber por que afirmavam que a forma se alterava. Aí, a Cláudia retorquiu que essa era a opinião do colega, mas com a qual não concordava. Pedi-lhe que apresentasse argumentos que convencessem o colega. Esta alegou “...então, se usamos sempre o mesmo motivo, eles são iguaizinhos”, é claro que têm a mesma forma, são geometricamente iguais. O Jorge rapidamente reconsiderou.

Na realização da tarefa 2B, este par também optou por descrever todas as isometrias presentes e assim justificar os exemplos escolhidos para a isometria pedida, em vez de indicar apenas os que eram exemplos dessa isometria, justificando com as características que lhe permitiriam fazer esse reconhecimento. Na generalidade, conseguiram identificar os pares de figuras simétricas gerados pelas isometrias indicadas, no entanto, sempre que as figuras se sobrepunham em algum ponto, deixavam de a considerar exemplo de isometria. Com a discussão dos resultados e o recurso ao GSP esta ideia foi facilmente posta de parte, pois surgiram exemplos em que transformado e figura original se intersetavam.

Relativamente à translação e à reflexão, o par conseguiu identificar corretamente todos os exemplos, exceto aqueles em que havia sobreposição das figuras, usando esse aspecto na justificação, por exemplo, “ a figura E não resulta de uma translação porque o vértice está sobreposto à aresta da figura.” Quanto à última situação, o par identificou todos os exemplos dos pares de figuras obtidas por rotação, num total de quatro, sendo que para três deles referiu ainda uma translação e no outro, um exemplo em que original e transformado têm um ponto em comum, justamente o centro da rotação, indicou o centro de rotação: “ a figura F roda, mas roda-

se num ponto, esse ponto é o da direita superior”. Pela primeira vez refere-se espontaneamente ao centro de rotação.

Durante a discussão e apresentação das respostas, cada par, na sua vez, foi indicando pares de figuras obtidas por translação e eu, no quadro interativo, confirmava as suas respostas. Ainda não tinham sido dados todos os exemplos, já o par JC se tinha dado conta que tinha tirado uma ilação errada. Tal aconteceu quando eu, “brincando” com o GSP, aumentando e diminuindo o comprimento do vetor orientador da translação permiti que aparecessem transformados que intersetavam as originais. Aí viram que tinham tirado uma conclusão errada e chamaram-me para perguntarem se apagavam e corrigiam a resposta. Depois de indicarem os pares de figuras obtidos por translação, pedi que, olhando para os vários exemplos, caracterizassem o transformado de uma figura obtida por translação. Nas suas palavras, o Jorge esclareceu “a figura mantém-se na mesma posição, ou seja, não se vira, não se inclina, fica na mesma, só muda de lugar”. Na tentativa de usar um vocabulário mais adequado, concluí que a translação mantém o sentido dos ângulos da figura e conserva sempre a sua inclinação.

Continuando com a correção da atividade, parti para a identificação das reflexões.

Prof. – E este caso, pode tratar-se de uma reflexão? [apontando para um exemplo de uma translação]

J – Não porque a figura está na mesma.

Prof. – Na mesma, como assim?

J - ...posição.

Prof. – Então trata-se de uma ...

J – Translação.

Passei à exploração de outro par de figuras.

Prof. – Qual a isometria em causa, Cláudia?

C – É uma rotação...ai, não, não é, estava a ver mal!

Prof. – Como assim?

C – Porque a figura aparece invertida, tem de ser uma reflexão.

Prof. – Consegues descobrir uma rotação?

C – Aquele par, o da pauta.

Prof. – Concordam? E trata-se de uma rotação de que amplitude?

C – De...posso usar o material?

Prof. – Sim, já sabem que quando necessitarem são livres de usar o material.

R – É fácil, é meia volta.

C – Então, já sei são 180^0 .

Prof. – [para lançar a dúvida, questioneei] E em que sentido?

D – Tanto dá, porque se dá meia volta, tanto pode rodar no sentido dos ponteiros do relógio, como ao contrário que vai dar ao mesmo.

Pedi ao Jorge que no GSP fizesse o transformado da mesma figura mas agora com outra amplitude, por exemplo 90^0 no sentido dos ponteiros do relógio, e determinei o centro de

rotação, para que houvesse a necessidade de indicar o sentido do ângulo. O aluno utilizou os comandos corretos mas, como seria de esperar, ao marcar “90°”, o sentido do ângulo foi positivo. Iniciando-se o diálogo seguinte:

Prof. – Então, achas que conseguiste obter o transformado que eu pedi?

J – Não, porque não foi rodado no sentido dos ponteiros do relógio, rodou ao contrário.

Prof. – Alguém tem alguma ideia de como obter a imagem que eu pretendo?

R – Já sei, manda rodar ... quanto é que é $360^{\circ} - 90^{\circ}$...? 270° , que é o mesmo que rodar 90° no outro sentido. [o Jorge seguiu as indicações do colega]

Prof. – Mas acham prático estar sempre a fazer esses cálculos? Há-de haver um modo mais simples de indicar o sentido de rotação que queremos aplicar, não acham?

Expliquei que outra forma de descrever o sentido do ângulo de rotação era usando os termos “positivo” e o seu antónimo “negativo”, em que positivo implica o sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio e, por oposição, o sentido negativo é o mesmo do movimento dos ponteiros do relógio. Pedi à Cláudia que repetisse a rotação, desta vez usando uma rotação de (-90°) , para que os alunos pudessem confirmar.

Desempenho do par na resolução da tarefa. Também este par aderiu bastante bem a esta tarefa, principalmente pela parte das colagens na construção dos frisos e por ter usado o retroprojetor, que de tão ultrapassado pelas novas tecnologias, fez sucesso por ser novidade para estes alunos. Também para este par, a parte da justificação das suas opções na tarefa 2B, não foi considerada tão interessante.

No seio do par houve alguma divergência de opiniões, mas o Jorge conseguiu sempre levar as suas ideias avante, pois por ter habitualmente um melhor desempenho nesta disciplina, conseguia convencer sempre a colega de que ele é que estava certo. Isso aconteceu na conclusão de que as figuras obtidas por uma das isometrias estudadas mudava de “forma”, quando se queria referir a “posição”, mas teve dificuldade em atender aos argumentos da colega; e também na conclusão de que figuras que se intersestavam não podiam ser resultado de uma isometria. Esta última foi posta de parte com a própria exploração da tarefa que lhes permitiu autocorrigirem-se. Relativamente aos conhecimentos evidenciados, globalmente, conseguiram identificar as figuras que tinham sido geradas pelas isometrias indicadas. No que diz respeito à reflexão, o par refere-se a um “eixo”, mas nem sempre o traça ou descreve. Tanto usa a explicação “resulta de uma reflexão pois tem um eixo de simetria” como “vira-se para baixo, para cima, na diagonal”. Na construção do friso recorrendo a reflexões foram criativos e usaram reflexões deslizantes. Para caracterizar a translação, este par utilizou, pela primeira vez, o termo deslizar e tentou referir-se à

sua grandeza e direção/sentido: “deslizamos sempre um quadrado para a direita”, mas no seguimento da tarefa apenas refere que desliza, sem caracterizar o deslize ou justificar porque se trata de um deslize. Quanto à rotação, o par identificou todos os exemplos dos pares de figuras obtidas por rotação, referindo apenas o sentido e, na parte 2A, também a amplitude. Apenas num dos casos se referiu ao centro de rotação, precisamente no exemplo em que as figuras tinham um ponto em comum. Nos outros, embora não o registre, considera o centro da figura como centro de rotação, implicando uma translação. Quando tem alguma dúvida recorre ao material disponível.

Embora no registo escrito o par não se tenha referido às características visuais de cada uma das isometrias, durante a fase de explicitação, mostrou reconhecer as características visuais das três isometrias em questão.

Dificuldades manifestadas. Na realização da tarefa, o par teve de confrontar diferentes opiniões. O Jorge, talvez por ser, do par, o aluno que costuma ter um melhor desempenho nesta disciplina, como já foi referido, conseguiu convencer sempre a colega de que ele é que estava certo. Alterar as conclusões erradas não chegou a constituir uma dificuldade. Num dos casos, essa alteração resultou da troca de ideias entre os elementos do par, a Cláudia conseguiu argumentar de forma a convencer o Jorge que, afinal, apenas estava a atribuir um significado diferente à palavra “forma”, considerando-a sinónimo de “posição”. No outro caso, a exploração da tarefa com o GSP, com a manipulação das figuras, permitiu a visualização de diferentes situações, com exemplos de figuras em que original e transformado se interseccionam e, sozinhos, repararam que tinham tirado uma conclusão errada.

Nem sempre sentiram necessidade de serem precisos na caracterização dos movimentos.

Também este par utilizou a descrição para justificar as suas escolhas em vez de as basear nas características visuais e na observação de relações invariantes.

Síntese. Tal como aconteceu com o outro par, a tarefa com colagens e motivos em acetatos, bem como o recurso ao retroprojetor e ao GSP, despertou o interesse destes alunos, mas o mesmo não aconteceu com a parte da tarefa que pedia para justificar as suas opções. Apesar da confusão com o vocabulário, o par mostrou reconhecer que as isometrias conservam a forma e o tamanho das figuras.

No desenvolvimento da primeira tarefa, para os três movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar”, as respostas deste par situam-no no nível 1 do pensamento geométrico, agora com códigos aproximados de sofisticação. Este par aparentemente regrediu no que diz respeito ao

movimento “virar”, tal vai ao encontro da ideia já avançada (Costa, 2005) de que para o mesmo movimento podem ser atribuídos códigos diferentes consoante as tarefas.

Tarefa 3.

Na tarefa 3A, este par registou: “reparamos que na horizontal e na vertical a figura seguinte é sempre a reflexão da anterior”, porém esta resposta não foi consensual, pois um dos elementos, o Jorge, insistia que se tratava da reflexão da 1.ª figura e não da anterior. A colega de grupo pega no material e mostra-lhe como tinha pensado.

C - Vês? É sempre em relação à anterior, se não como é que da 1.ª fig. obterias a 3.ª que se encontra na mesma posição?

J – Mas não é assim que eu estou a ver, estou a ver uma reflexão sempre da 1.ª fig. de cada fila ou de cada coluna.

C – Mas depois tem de refletir a anterior!

J – Pois é... ou uma translação.

Preferi não explorar naquele momento a conclusão do Jorge, tinha substituído duas reflexões de eixos paralelos por uma translação, e deixá-la para mais adiante, para ser desenvolvida nas tarefas de nível 2. Nenhum outro aluno manifestou ter observado esta relação. Na 2.ª pavimentação, identificou a isometria em causa: a translação, registando “a figura sofreu a translação de uma casa”. A 3.ª pavimentação, construída a partir de rotações, foi corretamente identificada, no entanto, para a completar, o par reparou num outro pormenor: na oblíqua verificava-se uma translação da figura e foi com base na descoberta desta regularidade que completou a pavimentação. Questionei sobre o modo como obtinham a primeira linha para que a partir desta completassem a pavimentação com translações. Disseram que era por rotações, e depois de pensarem mais um pouco, de 90^0 no sentido negativo, não referindo o centro da rotação.

Seguiu-se a pavimentação livre. Este par, para evitar uma exaustiva descrição, preencheu a pavimentação apenas com translações do motivo na posição estandardizada. Não produzindo uma descrição muito rica, apenas menciona que aplicou translações de uma casa na vertical e na horizontal. Pedi também aos alunos deste par que, individualmente, reproduzissem no GSP a pavimentação (Figura 5) feita por uma colega da turma.

Para construir a pavimentação fornecida no GSP, o Jorge começou por construir a primeira fila usando rotações de (-90^0) . Para indicar o centro de rotação, usou o método tentativa-erro e, para o sentido da rotação, começou por indicar “ 90^0 ”, mas como viu que não

tinha rodado no sentido desejado, lembrou-se de colocar o sinal negativo. Completou a fila procedendo sempre desta forma. De seguida, aplicou uma reflexão de eixo horizontal à primeira figura, usando como eixo a base da figura, e repetiu o movimento refletindo sucessivamente a figura anterior até concluir a coluna. Procedeu da mesma forma para completar a 3.ª coluna. Voltou às filas e por rotação completou a 2.ª fila. Com quatro espaços por preencher, reparou que se usasse uma translação de 6 cm para baixo já tinha completado a pavimentação e com menos passos. Aconteceu-lhe o mesmo que ao Rogério, deu indicação para que deslizasse 6 cm e a imagem deslocou-se no sentido contrário ao pretendido, emitiu “ah, já sei, é como no sentido dos ângulos, não é professora” e refez o movimento aplicando uma translação de (-6) cm na vertical.

Por sua vez, para construir a pavimentação no GSP, a Cláudia também começou por construir a primeira fila toda usando rotações de (-90^0) . Relativamente ao centro de rotação, recorreu aos círculos em acetato e ao piónés para confirmar a sua ideia. A amplitude de rotação foi indicada de imediato, quanto ao sentido, a aluna inquiriu-me “quando é no sentido dos ponteiros do relógio, é negativo, não é?”. De seguida, procedeu a uma reflexão de eixo horizontal, refletiu a 1.ª fila, usando como eixo a base da figura, e repetiu o movimento com sucessivas reflexões horizontais da fila anterior até concluir as colunas. Depois pensou em aplicar rotações a quatro das figuras (2.ª e 4.ª figuras da 2.ª e 4.ª colunas) que cobriam a pavimentação, para que ficassem na posição correta. No entanto, embora a ideia estivesse correta, ao fazer rotações usando o centro da figura, o transformado e a imagem original ficavam sobrepostos. Apagou as figuras que ocupavam aqueles espaços e aplicando uma rotação à 1.ª e à 3.ª figuras da 2.ª e da 4.ª linhas de (-90^0) com vértice no canto inferior direito das mesmas completou a pavimentação.

Na tarefa que se seguiu (tarefa 3B), começaram por utilizar a mesma estratégia usada pelo par RD. Uma vez descobertas todas as posições que a clave de sol podia assumir, tentaram descobrir as peças do dominó isométrico (Anexo E-4, Par JC, Tarefa 3B). O par dividiu-se na escolha da metodologia: a Cláudia optou por recortar e colar manualmente as figuras compondo as peças do dominó (Anexo E-4, Par JC, Tarefa 3B) e o Jorge fez uma tabela com as várias combinações (Anexo E-5, Par JC, Tarefa 3B). Assim, o Jorge construiu uma tabela de dupla entrada onde registou todas as combinações possíveis, atribuindo letras para representar os transformados e eliminando as repetidas. Mais uma vez, considerou que, por exemplo, $AB=BA$ e chegou à conclusão de que eram 36 peças. A sua colega optou por fazer recorte e colagem, seguindo a estratégia de formar todas as peças começadas por uma das figuras e de seguida todas as que terminam nessa figura, por exemplo, AA, AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, HA, GA, FA, EA, DA, CA, BA e o mesmo para todas as outras figuras, tendo o cuidado de não repetir as colagens. Foi um

trabalho que se revelou exaustivo, mas que a aluna se disponibilizou para acabar em casa. Para isso levou para casa o respectivo material. Em casa, a Cláudia não construiu todas as peças, mas chegou à conclusão de que, por exemplo, AB não corresponde a BA e sabia que não conseguiria construir 64 peças diferentes como alguns pares opinavam, pois tinha encontrado peças repetidas. Em vez de recortar e colar todas as figuras, esta aluna, a meio do trabalho, optou por designar as figuras por letras, e registar apenas as combinações das letras, no espaço destinado à colagem das figuras.

Durante a apresentação das respostas, o primeiro par a intervir foi o RD, tal como descrevi anteriormente. De seguida pedi à Cláudia, detentora de uma opinião diferente do par RD, que justificasse por que razão não concordava. A aluna recorreu a algumas das colagens que chegara a fazer e mostrou com exemplos de duas peças do tipo AB, BA que, por várias vezes que rodasse a peça, elas nunca seriam iguais. Explicou que primeiro tinha pensado que ia encontrar 64 peças porque não podia retirar as peças que combinavam as mesmas letras, tal como tinha mostrado. Contudo, quando recortou algumas das peças do seu dominó, encontrou peças repetidas. Coloquei a questão ao par, “como é possível haver peças repetidas se acabamos de verificar que, por exemplo, AB é diferente de BA?”. Com algumas das colagens que dispunham, tentaram compreender a situação; o Jorge que tinha usado a tabela como forma de chegar à resposta, teve mais dificuldade em perceber de que modo apareciam peças repetidas. Após o recorte de algumas peças, algumas tentativas e várias rotações, os alunos foram observando que algumas, depois de sofrerem rotação de 180° , eram iguais a outras já construídas, tendo sido apresentados os exemplos encontrados.

Convidei os alunos deste par para jogar com o “dominó isométrico” que eu havia previamente construído. Jogaram com bastante entusiasmo e conseguiram encontrar sem dificuldade as peças que poderiam jogar e reconhecer alguma peça mal jogada.

A sessão seguinte foi destinada à exploração da tarefa 3C. O par identificou corretamente as figuras que tinham reflexão, rotação e translação. Nas peças com reflexão marcou corretamente o eixo e registou “as figuras sofreram uma reflexão, pois encontramos um eixo vertical”. Nas peças com rotação, assinalou o centro de rotação, mas incorretamente, e na sua descrição apenas referiu a amplitude e o sentido da rotação. No caso da translação, registou “deslocou 3 cm para a direita”.

Seguiu-se a apresentação das respostas à tarefa 3C que, juntamente com a discussão das 3A e 3B, constituiu o desenvolvimento da última fase da aprendizagem – Integração. Para tal, solicitei a intervenção do par JC, para que conseguisse ultrapassar algumas das suas dificuldades.

Começando pelas peças obtidas por reflexão, pedi que indicasse o eixo. Usando o GSP numa delas, tracei uma reta onde me indicaram “entre as duas figuras” e marquei-o como “mirror”, selecionei a figura da esquerda e mandei-a refletir mas, tal como era de esperar, a imagem não se alterou. Perguntei ao par JC o que tinha acontecido. A resposta fez-se ouvir, a imagem tinha ficado “por cima”, ou seja, sobreposta à figura da direita. Confirmei, dizendo que tinha coincidido ponto por ponto, o que provava ter uma reflexão. Para confirmar a teoria, uma vez que a imagem por estar sobreposta não era visível, arrastei o eixo e os alunos puderam observar a imagem a movimentar-se. Para as peças geradas por rotação, no GSP deram a indicação correta para construir o transformado da figura da esquerda, no entanto, por terem marcado erradamente o centro de rotação, a imagem não coincidiu com a figura da direita. Hesitaram um pouco e o Jorge comentou, “ se não pode sair do sítio, o centro tem que ser o centro da peça”. Ajudei-os a marcá-lo e eles puderam concluir com êxito a rotação. Nas figuras com translação, o par executou corretamente os comandos no GSP, não tendo dúvidas em atribuir 3 cm na horizontal e 0 cm na vertical. Seguidamente confirmamos no GSP as peças que tinham sido identificadas como sendo simétricas, lembrei-lhes que para ter simetria a peça teria que permanecer invariável.

Desempenho do par na resolução da tarefa. O par completou as três pavimentações relativas à tarefa 3A com bastante entusiasmo, novamente devido às colagens. Completou e identificou a isometria em causa corretamente, referindo-se apenas ao nome e a nenhuma das suas características. Relativamente à pavimentação livre, o par optou por fazer algo de fácil descrição, preenchendo-a apenas com translações. Esta tarefa foi uma evidência da vontade que tinham em fazer as construções, mas não em descrever as isometrias em causa: quando receberam a tarefa 3A procederam de imediato às três construções e só no fim responderam às questões sobre as isometrias usadas, um pouco à pressa e sem muito empenho.

Na atividade de reproduzirem no GSP a pavimentação feita por um colega, não seguiram os mesmos passos de construção, mas ambos chegaram à pavimentação pretendida. A isometria mais difícil de aplicar foi a rotação, pela dificuldade em descobrir o centro de rotação. Neste par, o Jorge usou a estratégia tentativa-erro, selecionando como centro de rotação cada um dos vértices do motivo até obter a figura na posição desejada; a Cláudia usou o material da caixa (acetatos e pionés) para se certificar do ponto a escolher para centro da rotação. Outra dúvida que surgiu prendeu-se com a indicação do sentido negativo da rotação e/ou translação, visto ainda estarem pouco familiarizados com o mesmo, mas conseguiram ultrapassá-la.

A construção da pavimentação no GSP exige a indicação de todos os elementos que

caracterizam cada uma das isometrias, por isso, se conseguiram reproduzir a pavimentação sugerida, obrigatoriamente, sabem indicá-los. Contudo, no registo escrito, apenas o fazem quando lhes é diretamente solicitado, caso contrário não são suficientemente precisos.

Na construção do dominó isométrico, este par não conseguiu unir-se numa só estratégia e trabalhou cada um de modo diferente. O Jorge, usou a dedução lógica com recurso a uma tabela de dupla entrada, fazendo as combinações possíveis e eliminando os casos que considerou repetidos. Por sua vez, a Cláudia, optou por fazer a simulação, construindo, com colagens, as peças. A estratégia escolhida por esta aluna fez com que a realização da tarefa se tornasse bastante morosa, pois na sua ideia teria de formar 64 peças. Mesmo assim, a aluna não desistiu e pediu para concluir em casa. Contudo, em casa já não a prosseguiu da mesma forma, achou muito cansativo e, em vez de colagens, optou por representar por letras. Quando recortou algumas das peças reparou que uma estava repetida. Foi o suficiente para desistir da tarefa, pois teria de repensar toda a sua estratégia.

Durante o jogo com o dominó que lhes proporcionei, revelaram uma óptima capacidade de visualização fazendo todas as jogadas de forma correta e com grande entusiasmo.

Quanto à tarefa 3C, identificou as figuras obtidas por reflexão, rotação ou translação. Era-lhe pedido que identificasse (nas figuras) conforme os casos, o eixo de reflexão, o centro de rotação, a direção e o sentido da translação, e que descrevesse a isometria em causa. Destes elementos, apenas indicou corretamente o eixo de reflexão. Na descrição, foi preciso nas reflexões e translações, mas nas rotações, não se referiu ao centro de rotação. Conseguiu identificar as peças que eram exemplo de figuras simétricas.

Dificuldades manifestadas. Este par continua a ter opinião divergente na forma de solucionar algumas questões. Desta vez notei mais alguma recetividade da parte do Jorge em aceitar as ideias da colega, talvez pelo facto de a autoconfiança da colega ter vindo a aumentar, pela prestação nas últimas tarefas. Contudo, neste par nem sempre há um entendimento, o que acaba por acontecer é uma das ideias sair vencedora e não a procura por um consenso. Na descoberta das peças do dominó isométrico, deixei-os experimentar caminhos diferentes, na esperança que acabassem por reunir esforços, mas tal não aconteceu e nenhum deles chegou a uma resposta conclusiva.

O par continua a ter dificuldade em determinar o centro de rotação e raramente sente necessidade de se referir a ele.

Síntese. A tarefa, no seu conjunto, deixou a descoberto algumas fragilidades que este par tem na partilha de ideias e na discussão das mesmas.

Ambos conseguiram reconhecer e distinguir as três isometrias em causa; realizar translações, reflexões e rotações com e sem o auxílio do material de apoio e utilizar o vocabulário apropriado. No entanto, só se referem a determinados elementos das isometrias quando são diretamente questionados.

No desenvolvimento desta tarefa, para os dois movimentos “deslizar” e “virar” o desempenho deste par situa-o no nível 2 do pensamento geométrico e para o movimento “rodar” no nível 1, pela dificuldade em se determinar o centro de rotação.

Tarefa 4.

O 1.º friso apresentava simetria de reflexão (Anexo E-5, Par JC, Tarefa 4). Tal como o par RD, também este foi pedindo algumas explicações sobre o que lhe era questionado. Relativamente à conclusão, o par JC registou “O que concluímos foi que os pontos ao eixo de reflexão dava a mesma medida que os seus transformados com a reta.”

Passaram ao friso seguinte, obtido por translações (Anexo E-6, Par JC, Tarefa 4). Desta vez, mais habituados à linguagem, revelaram mais facilidade em seguir os passos, não tendo solicitado a minha ajuda. Contudo, a conclusão obtida foi novamente pouco completa e confusa “... os pontos têm sempre a mesma medida dos seus transformados.” Quando os interroguei no sentido de compreender melhor o que queriam dizer, percebi que o que queriam dizer era que todos os pontos se encontram à mesma distância dos respetivos transformados.

No friso seguinte, obtido por sucessivas rotações, o trabalho deste par esteve condicionado pela indisposição de um dos elementos, a Cláudia, que teve de abandonar a sala de aula. Este par fez apenas parte da tarefa (Anexo E-6, Par JC, Tarefa 4).

A discussão da tarefa 4 foi a atividade escolhida para a sessão. Para tal, coloquei os vários frisos no GSP e o par foi executando os passos das tarefas usando esse programa. Foi bastante mais fácil e rápido fazer no GSP do que no papel com as ferramentas de desenho. Uma vez concluídos todos os passos do guião, coloquei questões de forma a poderem partilhar as suas conclusões e levá-los a melhorá-las tanto no conteúdo como na forma de se exprimirem.

Prof. – Observando o friso, como descobriram que tem reflexões?

J – Porque o motivo aparece invertido.

Prof. – Considerando que A e A' são pontos simétricos, qual a relação entre a distância de cada um desses pontos ao eixo de reflexão r ?

J – É igual!

Prof. – Isso acontece só para A e A' ou para todos os pares de pontos simétricos?

C – Para todos. Nós para a distância de B' a r nem precisamos de medir, vimos aqui que a distância do ponto B à reta r era de 1,3 cm, então a de B' à reta r também era 1,3.

Prof. – Mas como é que sabes que está à mesma distância?

C – Porque a reta r passa no meio, entre os dois pontos. É a ... como é que se chama... a mediatriz .

J – [tenta explicar melhor] Entre B e B' há uma distância e a reta r é a reta que passa pelo ponto médio, entre os dois pontos, é o eixo.

Prof. – Podemos também dizer que os pares de pontos simétricos estão equidistantes ao eixo de reflexão. [expliquei a formação da palavra: equi+distante = distância igual] Veem mais alguma simetria presente neste friso?

Tal como o outro par, também este reconheceu a presença de translações.

J – Vejo uma translação da 1.^a para a 3.^a figura.

C – E da 2.^a para a 4.^a, e da 4.^a para a 6.^a.

J – E da 3.^a para a 5.^a. É sempre uma translação de... 6 cm.

Prof. – Haverá alguma relação entre as reflexões e as translações?

J – Sim, se fizermos duas reflexões, a figura volta a ficar na mesma, é uma translação.

C – Pois, é como se eu virar a camisola do avesso e depois tornar a virá-la, fica direita.

Prof. – Mas quaisquer duas reflexões seguidas serão sempre uma translação? Nós já exploramos uma situação destas numa das aulas, não se recordam? Então experimentem com o material.

Eles experimentaram, fazendo duas reflexões de eixos paralelos horizontais e viram que o resultado era uma translação. Sugeri-lhes que refletissem usando eixos não paralelos e eles reconheceram que uma reflexão seguida de uma reflexão nem sempre é uma translação, só quando os eixos de reflexão são paralelos.

Seguiu-se a exploração do 2.^o friso, com simetrias de translação. Depois de traçarem os segmentos de reta que unem pontos aos seus transformados, questionei:

Prof. – O que podemos concluir quanto à posição entre os segmentos de reta traçados?

J – São paralelos.

Prof. – E quanto ao seu comprimento, o que podemos dizer?

C – Têm todos o mesmo.

Prof. – E o que representa esse comprimento numa translação?

C – É aquilo que a figura deslizou.

Prof. – Já viram, na translação todos os segmentos de reta que unem um ponto ao seu transformado têm o mesmo comprimento, isso também acontece nas outras isometrias?

J – Não, só na translação, porque nós medimos nos outros frisos e não deu o mesmo.

Prof. – O que podemos dizer de uma translação seguida de outra translação?

Par – É uma translação!

Prof. – Se eu quisesse obter a 6.^a figura a partir diretamente da 1.^a, o que teria de fazer?

J – Teria de fazer uma translação de ... 1, 2, 3, 4, 5 ... 15 cm [pensou 5×3].

Seguimos para o 3.º friso, que, por se tratar de rotações, envolvia mais passos. Finda a construção no GSP e marcado o ponto D (5.º passo da tarefa), perguntei:

Prof. – O que representa o ponto D ?

J – É o centro de rotação.

Prof. – Já repararam no comprimento dos segmentos de reta que unem um ponto e o seu transformado ao centro de rotação?

Par – É o mesmo.

Prof. – Então, se eu marcasse um ponto F e este distasse 4 cm do centro de rotação, qual seria a distância de F' ao centro de rotação?

Par – Também seria 4 cm.

Relativamente à amplitude da rotação em causa, tinham mencionado no seu registo escrito tratar-se de rotações de 90^0 , mas sem efetuarem qualquer medição. Ao fazerem no GSP o 9.º passo desta parte, viram como deviam proceder para a determinar.

Desempenho do par na resolução da tarefa. A primeira aula destinada à execução desta tarefa não decorreu conforme o previsto. Por um lado, o Jorge encontrava-se com um pulso ligado e não devia escrever; pelo outro, a Cláudia encontrava-se emocionalmente fragilizada.

Também neste par foi visível alguma dificuldade em compreender o que lhe era pedido, o que se foi esvaecendo à medida que progrediam na tarefa e se familiarizavam com a linguagem. Todavia, as conclusões obtidas foram também pouco completas, não englobando as várias propriedades descobertas.

O par esteve entusiasmado em realizar a tarefa, mas apenas no GSP. Além de poderem usar o computador, tornou-se bastante mais fácil e rápido desenvolver os passos no GSP do que no papel, com o material de desenho.

Dificuldades manifestadas. Estes alunos sentiram alguma dificuldade em compreender a linguagem, tendo solicitado a minha ajuda em algumas questões, e em elaborar conclusões completas e claras. Deram respostas confusas e não conseguiram estabelecer conclusões que servissem de generalização para cada uma das isometrias. A dificuldade maior verifica-se no registo escrito, mais concretamente, em organizar uma resposta capaz de transmitir as suas descobertas. Contudo, conseguem reconhecer as propriedades das diferentes isometrias, como se verificou na forma correta como preencheram o texto com lacunas.

Traçar com rigor o que lhes foi pedido não constituiu propriamente uma dificuldade mas revelou-se uma tarefa pouco apreciada. Fazer as mesmas construções no GSP revelou-se uma

atividade mais estimulante e mais apreciada.

Síntese. O par não teve qualquer dificuldade em reconhecer as propriedades visuais respeitantes a cada uma das isometrias. Relativamente às propriedades, aos elementos necessários para descrever cada uma das isometrias, constatei que, apesar das conclusões incompletas que apresentaram, este par conseguiu descobrir e reconhecer propriedades destas isometrias.

No desenvolvimento desta tarefa, considero que o trabalho deste par o situa no nível 2 do pensamento geométrico.

Tarefa 5.

Utilizando as mesmas situações do enunciado, mas num documento do GSP sem malha quadriculada, apresentei a 1.ª situação, exemplo de uma translação.

J – Nós vimos uma translação primeiro na vertical e depois para a direita. [pedi-lhe que fizesse no GSP] Temos de selecionar F_1 , ir a “transform”, depois “translate” e agora, 6 cm na horizontal e 4,5 cm na vertical.

Prof. – E conseguem ver outra forma de se obter F_2 ?

C – Sim, primeiro para baixo e depois para a direita. [pedi-lhe que fizesse no GSP]

..., oh professora, mas vou ter que dar as mesmas indicações que o Jorge deu!

[proveitei para que reparassem que o resultado de duas translações, independentemente da ordem, resulta na mesma translação]

C – Mas também vimos uma translação assim. [apontando o trajeto mais curto de F_1 a F_2]

J – Na oblíqua.

Pedi que o representassem no GSP. O par marcou um ponto e o seu transformado, uniu-os com um segmento de reta e viu o seu comprimento. Associaram aquele comprimento à grandeza da translação.

Passamos à discussão da 2.ª situação, que dizia respeito a uma reflexão. Para descobrir o eixo de reflexão, o par marcou um par de pontos simétricos, assinalou-os como A e A' e mandou assinalar o ponto médio P . Hesitaram na execução do passo seguinte, embora no papel tivessem marcado dois pares de pontos simétricos, acharam que bastava um para traçar o eixo.

J – Professora, o eixo tem que ser perpendicular e tem de passar aqui, [apontando para o ponto P] como é que fazemos? [expliquei-lhes como deviam fazer]

O par foi respondendo às minhas questões de forma correta, identificando pontos

simétricos e reconhecendo a equidistância de pontos simétricos ao eixo e a sua perpendicularidade em relação aos segmentos de reta que unem dois pontos simétricos.

A 3.^a situação apresentava uma figura gerada por rotação. Na tarefa em papel este par viu esta rotação como resultado de uma rotação com centro de rotação no centro da figura, seguida de uma translação. Pedi-lhes que seguissem os passos da tarefa 4 para agora, no GSP, descobrirem o centro de rotação daquela isometria.

J – Primeiro marca-se dois pontos na figura original, escolhemos o canto superior direito e o esquerdo e na F_2 o superior esquerdo e também o superior direito, e também o ponto...

Prof. – [interrompi] Quantos pontos serão necessários?

J. – Ah, sim, bastam dois. Agora une-se o ponto superior esquerdo ao ...[é interrompido pelo par]

C – Porque é que não lhes dáis nomes?

J – [concordou e identificou os pontos por letras, mas só em F_1] Agora une-se U a U' .

C – Mas o ponto U' não está marcado.

J – É o transformado de U .

Agora, traça-se uma reta [olhei para ele, fazendo-o hesitar]... não, um segmento de reta de V a V' e outro que una U a U' . Agora marcamos o ponto médio de cada um deles e ... agora temos que traçar a mediatriz.

Prof. – E como é que se faz isso?

J – Tem de se construir uma perpendicular e depois o mesmo na outra reta [enganou-se outra vez e foi corrigido pela colega].

Prof. – Cláudia, observando as duas retas traçadas reparamos que ... [ela hesita perante o colega que está ansioso por responder] ... Estas duas retas que traçamos ... têm algo em comum?

C – Eu também tracei [atrapalhada]... e ...

J – Posso? Vemos que as duas retas se cruzam no ponto C , que é o centro de rotação.

Prof. – O Jorge disse que se intersectavam no ponto C , vamos marcá-lo. Que mais precisamos de descobrir para descrever esta rotação, Cláudia?

C – A amplitude.

Prof. – De que ângulo?

C – [pensou um pouco] A do ângulo ACA' . [mediu-se e verificou-se ter 45° de amplitude]

Prof. – E qual será a amplitude do ângulo BCB' ?

Par JC – Vai medir na mesma 45° .

Desempenho do par na resolução da tarefa. O par revelou facilidade em identificar as isometrias em causa, todavia continuou a revelar alguma dificuldade em descrevê-la por escrito. Neste caso, teve a preocupação de usar o vocabulário adequado, mas, na tentativa de ser completo, foi confuso na apresentação do seu raciocínio. Manifestaram um crescente desinteresse pela realização da descrição das isometrias, notando-se algum cuidado na descrição da 1.^a situação apresentada e depois uma diminuição do mesmo. Por outro lado, realizar a mesma atividade no GSP, em que, em vez de registarem os passos, executam-nos, ou melhor,

mandam executar, foi bastante mais apreciado.

No que diz respeito à translação, apesar de não ter sido a primeira resposta do par, conseguiram substituir uma composição de duas translações, vertical e horizontal, por uma oblíqua, apesar de ainda não poderem utilizar a linguagem mais adequada. Reconheceram a comutatividade da translação, ao constatarem que a translação pode ser vertical, seguida de horizontal ou vice-versa. Quanto à reflexão, o par não teve qualquer dúvida em descobrir o eixo e mostrou reconhecer propriedades desta isometria. Relativamente à rotação, continua a usar como uma composição de duas isometrias: rotação, com centro na própria figura, seguida de translação. No GSP, conseguiram substituir esta composição por uma só rotação, descobrindo o centro da rotação.

Dificuldades manifestadas. Também este par revela alguma falta de vontade em descrever, por escrito, como foi gerado o transformado de uma dada figura. Na base disso, encontra-se a dificuldade em usar a linguagem adequada na construção de uma resposta organizada, clara e completa.

Para as rotações, não chegam a determinar o centro de rotação exterior à figura, pois consideram que a figura roda em torno do seu centro e depois sofre uma translação. No GSP, conseguiram determinar o centro de rotação, seguindo os passos da tarefa 4, mas a Cláudia ainda sente algumas dificuldades.

Síntese. No desenvolvimento desta tarefa, que tinha como objectivo a aplicação das descobertas feitas na tarefa anterior, considero que para as três isometrias, o trabalho deste par o situa no nível 2 do pensamento geométrico, mas com algumas oscilações.

Os alunos deste par conseguem condensar duas translações de direcções perpendiculares numa só translação, o que é um raciocínio próprio de nível 3. No entanto, para a rotação, nem sempre indicam o centro de rotação, consideram que roda em torno do centro da figura, mas esquecem-se de o referir. Contudo, no GSP conseguem descobrir o centro da rotação.

Tarefa 6.

A primeira rosácea apresentada continha apenas simetria rotacional. Para descobrirem a amplitude de cada um dos setores, pensaram numa das metades do hexágono que sabiam ter amplitude de 180° e dividiram pelos 3 setores que aí cabiam.

No outro exemplo apresentado a rosácea tinha simetria rotacional e axial. Para

determinar a amplitude de rotação viram que correspondia à de dois setores, logo, 120° .

Para a construção da 1.ª rosácea, cuja condição era ter apenas simetria rotacional, o par escolheu o motivo da clave de fá (Anexo E-6, Par JC, Tarefa 6). Para determinar a amplitude dos ângulos de rotação, primeiro pensou em dividir 180° por 5, mas depois reparou que era mais fácil considerar o quociente entre 360° e 10. Na 2.ª rosácea, era condição obrigatória construir uma rosácea com simetrias rotacional e axial (Anexo E-7, Par JC, Tarefa 6). Usou seis motivos, não sem antes perguntar se podia deixar “espaços em branco”. Respondi com outra questão: “Conseguem respeitar as condições pedidas?”. Depois de investigar a hipótese, colou os seis motivos, conseguindo cumprir as condições exigidas. Para construir a última rosácea, o par dividiu o círculo destinado à sua construção em quatro partes congruentes, com duas retas perpendiculares passando pelo centro (Anexo E-7, Par JC, Tarefa 6). Colou os motivos, de modo a que um dos lados coincidissem com uma das semirretas com origem no centro e fazendo das semirretas eixos de simetria, refletiu o motivo. Este par usou oito motivos na construção da sua rosácea e reparou que o número de simetrias de rotação e de reflexão era o mesmo.

Desempenho do par na resolução da tarefa. O par esteve bastante empenhado na resolução desta tarefa, que na 1.ª e 2.ª questões não ofereceram qualquer dúvida. Na construção das rosáceas, tentaram ser criativos, usando diferentes motivos e respeitaram as condições exigidas. Identificaram sem dificuldade o centro de rotação, as amplitudes de rotação e o número de simetrias rotacionais; relativamente à reflexão, identificaram corretamente os eixos de reflexão e o número de simetria axiais.

Dificuldades manifestadas. Os alunos deste par não revelaram nenhuma dificuldade na realização da tarefa.

Síntese. Conseguiram desenvolver com sucesso os objectivos traçados para esta tarefa: estabelecer generalizações sobre o número de simetrias de rotação e de reflexão das rosáceas; reconhecer e aplicar propriedades das isometrias.

De acordo com o desempenho evidenciado no desenvolvimento desta tarefa, estes alunos apresentam um pensamento geométrico próprio do nível 2 de van Hiele e por vezes do nível 3. Usam o vocabulário adequado e pensam nas transformações em termos das suas propriedades e, por vezes, conseguem estabelecer relações entre elas.

Síntese dos alunos-caso

Como já referi, para determinar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele em que os alunos se encontravam, antes e após a implementação do ambiente de ensino, recorri a um teste escrito. Para análise das respostas, utilizei a codificação de Lewellen (1992, citado por Costa, 2005) anteriormente descrita no capítulo III.

Na síntese de cada um dos alunos-caso é apresentado um quadro comparativo do nível de pensamento evidenciado para cada um dos movimentos rígidos, antes e após a implementação do ambiente de ensino.

Rogério.

Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), *antes da implementação* do ambiente de ensino, o Rogério encontrava-se no nível 1 de van Hiele no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, com diferentes graus de sofisticação, incluindo uma resposta de nível 2 para o movimento rodar; *após a implementação* do ambiente de ensino, situa-se no nível 2 do pensamento geométrico para os três movimentos.

Tabela 8

Nível, por movimento, no teste realizado pelo Rogério

Rogério	Nível de pensamento geométrico		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1	1	1 ⁺
Após	2	2	2

Pela análise da tabela, podemos confirmar a evolução do Rogério nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Globalmente, situa-se no nível 2 de van Hiele.

Desempenho na resolução das tarefas.

No par, o Rogério assumiu a posição de líder. Revelou um bom desempenho e interesse em todas as tarefas, principalmente as que envolveram colagens e o recurso ao GSP. A parte das tarefas que envolvia o registo escrito da justificação das suas opções, da descrição das isometrias aplicadas ou dos passos para a realização de uma dada isometria, também foi a menos preferida

deste aluno. O seu desempenho no GSP foi muito bom e foi sem dúvida o aluno que mais entusiasmo mostrou em usar este programa, fazendo várias experiências por iniciativa própria.

Também no caso do Rogério, as construções realizadas corretamente no GSP, por exigirem a indicação de todos elementos que caracterizam cada uma das isometrias, foram uma evidência de que reconhece e sabe utilizar as propriedades das três isometrias.

Dificuldades manifestadas.

Tal como o seu par, no registo escrito, nem sempre descreveu de forma completa as características das isometrias, apesar de marcar alguns dos seus elementos nas figuras apresentadas.

Por vezes, teve dificuldade em controlar o seu entusiasmo e vontades em participar, permitindo uma colaboração mais ativa do colega.

No primeiro contacto com as tarefas de nível 2, também sentiu alguma dificuldade em compreender a linguagem e em elaborar conclusões completas.

Contributo do ambiente de ensino.

No que diz respeito ao movimento “deslizar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, usava uma linguagem informal - “encaixar”, “movimentar”, “arrastar”, “não sofre alteração”- e pouco precisa para se referir a esse movimento, exceto uma das vezes em que especifica o sentido desse movimento – para cima e para a direita. *Após a implementação* do ambiente de ensino, começou a usar o termo “translação” e às vezes “deslize” para designar este movimento, passando a usar uma linguagem mais formal e mais precisa, mas não o fazendo sempre de forma completa.

Relativamente ao movimento “virar”, o aluno, *antes da implementação* do ambiente de ensino, caracterizava este movimento quanto à direção para onde e como virava: “de pernas para o ar”, “para a esquerda/direita”, “vira ao contrário”. *Após a implementação* do ambiente de ensino, passou a referir-se a este movimento como uma reflexão de eixo vertical/horizontal. Mostrou saber traçar o eixo de reflexão, marcando dois pares de pontos simétricos e respetivas mediatrizes. Dos quatro alunos foi o único que ainda usou a reflexão associada à translação, em vez de uma única reflexão.

No que concerne ao movimento “rodar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, para caracterizar este movimento usava erradamente o termo “virar”, a direção “esquerda/direita” e ainda a amplitude e mostrava saber que no caso de uma rotação de 180°

não há necessidade de indicar o sentido. *Após a implementação* do ambiente de ensino, passou a referir-se a este movimento como “rotação” ou “rodar”, indicando a sua amplitude e o sentido (positivo/negativo) e por vezes o centro da rotação. Sempre que a rotação tem centro num ponto exterior à figura, o aluno considera uma composição de duas isometrias: rotação, em que o centro é o centro da figura, seguida de translação.

Dinis.

Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), *antes da implementação* do ambiente de ensino, o Dinis encontrava-se no nível 1 de van Hiele no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, com diferentes graus de sofisticação; *após a implementação* do ambiente de ensino, situa-se no nível 2 do pensamento geométrico para os três movimentos. Por vezes, o Dinis vai mais além e combina movimentos condensando-os num número mínimo, por exemplo, substitui uma rotação e uma translação por uma única rotação. Embora a codificação usada não preveja a análise da relação estabelecida entre os movimentos, própria do nível 3 de van Hiele, para o movimento rodar atribuí o nível 2+, representando por (+) a resposta de nível superior que o Dinis deu.

Tabela 9

Nível, por movimento, no teste realizado pelo Dinis

Dinis	Nível de pensamento geométrico		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1	1	1
Após	2	2	2+

Pela análise da tabela, podemos confirmar a evolução do Dinis nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Globalmente, situa-se no nível 2 de van Hiele, mas apresenta alguns raciocínios próprios do nível 3, principalmente no que diz respeito às rotações. Constata-se que o aluno apresenta diferentes raciocínios e diferentes níveis na realização de diferentes questões e nos diferentes movimentos, tal como Burger e Shaughnessy (1986) e Jaime (1993) constataram ser possível acontecer, reforçando o carácter dinâmico e contínuo dos níveis defendido por estes investigadores.

Desempenho na resolução das tarefas.

Embora o seu par fosse mais participativo e assumisse a posição de líder, o Dinis conseguiu fazer valer as suas opiniões e revelou um bom desempenho e interesse em todas as tarefas, principalmente as que envolveram colagens e o recurso ao GSP. Contudo, a parte das tarefas que envolvia o registo escrito da justificação das suas opções, da descrição das isometrias aplicadas ou dos passos para a realização de uma dada isometria, não foi tão do seu agrado, aliás, raramente foi ele a fazer os registos escritos, deixando essa parte para o seu par. Foi o aluno que esteve mais à-vontade na execução das tarefas em papel usando as ferramentas de desenho, mas, mesmo assim, teve melhor desempenho a executá-las no GSP; por outro lado, foi o aluno que menos recorreu aos materiais disponibilizados.

Também no caso do Dinis, as construções realizadas corretamente no GSP, por exigirem a indicação de todos elementos que caracterizam cada uma das isometrias, mostram que reconhece e sabe utilizar as propriedades das três isometrias.

Dificuldades manifestadas.

No início, teve alguma dificuldade em marcar a sua posição perante o seu par que assumiu a postura de líder. Por vezes, no registo escrito, não descreveu de forma completa as características das isometrias, apesar de marcar alguns dos seus elementos nas figuras apresentadas.

No primeiro contacto com as tarefas de nível 2, também sentiu alguma dificuldade em compreender a linguagem e em elaborar conclusões completas.

Contributo do ambiente de ensino.

No que diz respeito ao movimento “deslizar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, usava uma linguagem informal - “colocar”, “empurrar”, “avançar”, “ficar na mesma”- e pouco precisa para se referir a esse movimento, exceto uma das vezes em que especificou a direção desse movimento e a quantidade, referindo-se ao número de casas deslocadas. *Após a implementação* do ambiente de ensino, começou a usar o termo “translação” para designar o movimento de deslize, passando a usar uma linguagem mais formal e mais precisa, por exemplo, passou a referir-se à grandeza da translação em centímetros e tentou indicar a direção e sentido. Contudo, como não lhes foi apresentada a noção de vetor, esta pretensão tornou-se complicada.

Relativamente ao movimento “virar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, caracterizava este movimento quanto à direção para onde virava: “para cima/baixo”, “para a

esquerda/direita”, “vira ao contrário”. *Após a implementação* do ambiente de ensino, o aluno passou a referir-se a este movimento como uma reflexão de eixo vertical, horizontal ou oblíquo. Mostrou saber traçar o eixo de reflexão, marcando dois pares de pontos simétricos e respetivas mediatrizes.

No que concerne ao movimento “rodar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, para caracterizar este movimento usava o termo “rodar” e o sentido “esquerda/direita”, não indicando mais nenhuma das características da rotação, registando várias vezes “rodar de forma a ficar como...”. *Após a implementação* do ambiente de ensino, passou a referir-se a este movimento como “rotação” e consegue determinar a sua amplitude, sentido (positivo/negativo) e o centro da rotação. Substitui a composição de uma rotação seguida de translação por uma só rotação.

Jorge.

Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), *antes da implementação* do ambiente de ensino, o Jorge encontrava-se no nível 1 de van Hiele no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar; *após a implementação* do ambiente de ensino, situa-se no nível 2 do pensamento geométrico para os três movimentos. Por vezes, o Jorge vai mais além e combina movimentos condensando-os num número mínimo, por exemplo, substitui uma rotação seguida de uma reflexão por uma única reflexão. Assim, para o movimento virar atribuí o nível 2+, representando por (+) a resposta de nível superior que o Jorge deu.

Tabela 10

Nível, por movimento, no teste realizado pelo Jorge

Jorge	Nível de pensamento geométrico		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1	1	1
Após	2	2+	2

Pela análise da tabela, podemos confirmar a evolução do Jorge nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Globalmente, situa-se no nível 2 de van Hiele, mas apresenta alguns raciocínios próprios do nível 3, principalmente no que diz respeito às reflexões. Mais uma vez, confirma-se o carácter contínuo dos níveis: um aluno pode estar num nível para um

determinado tópico e apresentar raciocínios de nível seguinte noutra tópico (Jaime, 1993).

Desempenho na resolução das tarefas.

O Jorge mostrou-se empenhado nas várias tarefas, principalmente nas que envolveram colagens e o recurso ao GSP. Todavia, não esteve tão envolvido na parte que implicava o registo escrito da justificação das suas opções, da descrição das isometrias aplicadas ou dos passos para a realização de uma dada isometria, apresentando respostas confusas e incompletas. Teve um bom desempenho a executar as isometrias no GSP, mas não tanto no papel com os materiais de desenho.

No par, assumiu a posição de líder, não tanto pela sua própria vontade, mas mais pela postura que a colega adotou inicialmente. Com o decorrer das sessões, o Jorge pôde discutir as tarefas com o seu par que, gradualmente, se foi tornando mais ativo.

Nas tarefas nem sempre caracterizou de forma precisa e completa a isometria em causa, no entanto, as construções realizadas corretamente no GSP, por exigirem a indicação de todos elementos que caracterizam cada uma das isometrias, mostraram que o Jorge reconhece e sabe utilizar as propriedades das três isometrias.

Dificuldades manifestadas.

Durante as tarefas nem sempre descreveu de forma completa as características das diferentes isometrias. Contudo, nas atividades com o GSP, conseguiu construir o transformado de uma figura gerada por qualquer uma das isometrias, dando todas as indicações necessárias e corretas e, no teste realizado após a implementação do ambiente de ensino, descreveu de forma precisa a maior parte das isometrias identificadas.

Por vezes, fez confusão com o significado de alguns termos, tais como “forma” e “posição”, levando a conclusões erradas.

No primeiro contacto com as tarefas de nível 2, também sentiu alguma dificuldade em compreender a linguagem e em elaborar conclusões completas e claras.

Contributo do ambiente de ensino.

No que diz respeito ao movimento “deslizar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, usava uma linguagem informal - “colocar”, “vir para a frente/para trás”, “deslocar” - e pouco precisa para se referir a esse movimento, exceto uma das vezes em que especifica a direção desse movimento e a quantidade, referindo-se ao número de casas deslocadas. *Após a*

implementação do ambiente de ensino, o aluno começou a usar o termo “translação” para designar o movimento de deslize, passando a usar uma linguagem mais formal e mais precisa, caracterizando tanto a grandeza como a direção/sentido da translação.

Relativamente ao movimento “virar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, caracterizava este movimento quanto ao sentido referindo-se à forma como virava e em que sentido: “para a esquerda/direita”, “vira ao contrário”. Embora por escrito não se tivesse referido ao eixo de reflexão, durante a entrevista disse que “via um eixo a passar entre as figuras”. *Após a implementação* do ambiente de ensino, passou a referir-se a este movimento como uma reflexão de eixo vertical, horizontal ou oblíquo. Mostrou saber traçar o eixo de reflexão, marcando os segmentos de reta definidos por dois pares de pontos simétricos e respetivas mediatrizes. Foi o único a substituir uma rotação seguida de reflexão por uma única reflexão.

No que concerne ao movimento “rodar”, *antes da implementação* do ambiente de ensino, para caracterizar este movimento usava erradamente o termo “virar” não indicando nenhuma das suas características. *Após a implementação* do ambiente de ensino, passou a referir-se a este movimento como “rotação”, indicando sempre a sua amplitude, sentido (positivo/negativo) e o centro da rotação, se bem que, nos casos em que o centro era um ponto exterior à figura, cometesse alguns erros.

Cláudia.

Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico.

De acordo com a codificação usada por Costa (2005), *antes da implementação* do ambiente de ensino, a Cláudia encontrava-se no nível 1 de van Hiele no que concerne aos três movimentos elementares deslizar, virar e rodar, com diferentes graus de sofisticação; *após a implementação* do ambiente de ensino, situa-se no nível 1, 2 e 1⁺ do pensamento geométrico para os mesmos movimentos. O símbolo (+) corresponde ao número de códigos atribuídos a respostas de nível superior.

Tabela 11

Nível, por movimento, no teste realizado pela Cláudia

Cláudia	Nível de pensamento geométrico		
	Deslizar	Virar	Rodar
Antes	1	1	1
Após	1	2	1 ⁺

Pela análise da tabela, verifica-se que é no movimento “virar” que a Cláudia apresenta um nível de pensamento superior, não obstante, nos outros dois movimentos há também uma evolução, apresentando, num dos casos (rodar), uma resposta de nível 2 e no deslizar, apesar de se manter no nível 1, verificou-se uma sofisticação das respostas com códigos mais elevados. Consegue, ainda, apresentar raciocínios próprios de nível 3, como por exemplo, utilizar uma translação oblíqua para substituir uma composição de duas translações de direções perpendiculares. O facto de apresentar níveis diferentes dependendo do movimento em causa vem ao encontro da localidade defendida por Jaime (1993) em oposição à globalidade dos níveis e justifica-se com o carácter dinâmico (Burguer & Shaughnessy, 1986) e contínuo dos níveis, um aluno pode “raciocinar simultânea ou alternadamente em dois níveis consecutivos” (Jaime, 1993, p. 16).

Globalmente, situa-se em transição para o nível 2.

Desempenho na resolução das tarefas.

A Cláudia foi a aluna que mais recorreu aos materiais disponibilizados, principalmente os círculos em acetato e o piónés. Aderiu bastante bem às tarefas que envolveram colagens e o recurso ao GSP, mas não tão bem às partes que envolviam o registo escrito da justificação das suas opções, da descrição das isometrias aplicadas ou dos passos para a realização de uma dada isometria, apresentando respostas confusas e incompletas. Teve um melhor desempenho a executar as isometrias no GSP do que no papel com os materiais de desenho.

Mais tímida e insegura que o seu colega, raramente quis entrar em confronto com ele quando não tinha a mesma opinião, defendendo a sua apenas quando eu dava alguma indicação de que a resposta do par não estava correta. À medida que as sessões se foram desenrolando, foi tendo uma participação mais ativa.

As construções realizadas corretamente no GSP, por exigirem a indicação de todos os elementos que caracterizam cada uma das isometrias, mostraram que a Cláudia reconhece e sabe utilizar as propriedades das três isometrias. Contudo, no registo escrito, apenas as caracterizou quando lho foi diretamente solicitado, caso contrário não foi suficientemente precisa.

Dificuldades manifestadas.

A Cláudia sentiu alguma dificuldade em descrever de forma completa as características das diferentes isometrias. Contudo, com o GSP, conseguiu construir o transformado de uma figura por uma translação, reflexão ou rotação, dando todas as indicações necessárias e corretas.

Teve alguma dificuldade em expor o seu ponto de vista, acreditando nas decisões do colega e que este detinha mais conhecimentos que ela.

No primeiro contacto com as tarefas de nível 2, sentiu alguma dificuldade em compreender a linguagem e em elaborar conclusões completas e claras.

Contributo do ambiente de ensino.

No que diz respeito ao movimento “deslizar”, antes da implementação do ambiente de ensino, usava uma linguagem informal - “mover”, “pegar”, “descer”, “movimentar”- e pouco precisa para se referir a esse movimento. Depois das sessões de ensino, além de uma linguagem mais formal, refere-se à sua direção/sentido, mas nem sempre à grandeza da mesma, e substitui uma composição de duas translações por uma.

Relativamente ao movimento “virar”, no início deste estudo, caracterizava este movimento quanto à direção para onde virava: “para cima/baixo”, “para a esquerda/direita”. Após o ambiente de ensino, a aluna passou a referir-se a este movimento como uma reflexão de eixo vertical/horizontal e soube traçar o eixo de reflexão, marcando pelo menos dois pares de pontos simétricos e respetivas mediatrizes.

No que concerne ao movimento “rodar”, antes do ambiente de ensino, para caracterizar este movimento usava o termo “rodar” e o sentido “esquerda/direita” e, apenas uma vez, referiu a amplitude de rotação. Decorridas as fases de aprendizagem, a aluna passou a referir-se a este movimento como “rotação”, indicando sempre a sua amplitude e sentido (positivo/negativo). Não sentiu necessidade de dar informação relativamente ao centro da rotação, a não ser que lho fosse solicitado diretamente. Nesse caso, usou o centro da figura como centro da rotação e recorreu, sempre, a uma translação.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E REFLEXÃO FINAL

Síntese do estudo

Esta investigação teve como principal finalidade estudar o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico através da implementação de um ambiente de ensino para as isometrias baseado nas fases de aprendizagem de van Hiele. A escolha por um estudo no âmbito do tema “Geometria” foi desde logo uma certeza, por um lado por ser uma área que aprecio bastante, por outro por verificar que o mesmo não é habitual acontecer com outros professores e com alunos. Dentro da Geometria, a opção pelo sub-tópico Isometrias prendeu-se com o facto de, no momento da investigação, me encontrar a lecionar numa turma de 6.º ano usando o programa de matemática (PMEB) (ME-DGIDC, 2007), no ano letivo em que este entrou em vigor apenas para os quintos anos e, como tal, com poucos recursos, nomeadamente, sem manual, nem sugestões de atividades para o ensino das isometrias, tópico onde, com o PMEB foram introduzidas bastantes alterações. A escassez de recursos para o ensino das Isometrias no 2.º ciclo constituiu para mim um desafio e levou-me a compor um ambiente de ensino que possibilitasse o desenvolvimento do pensamento geométrico baseado no modelo de van Hiele.

Este estudo foi conduzido pelas seguintes questões orientadoras: i) Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico se encontram os alunos no 6.º ano de escolaridade?; ii) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica envolvendo isometrias?; iii) Que dificuldades manifestam os alunos na resolução das tarefas e como se podem ultrapassar essas dificuldades?; iv) Como é que o ambiente de ensino proposto contribuiu para a evolução do pensamento geométrico?

De forma a dar resposta a estas questões, optei por uma investigação de natureza qualitativa, de carácter exploratório, descritivo e interpretativo. Embora o ambiente de ensino tivesse sido aplicado a toda a turma, este estudo debruçou-se sobre quatro alunos que constituíram os estudos de caso. Os dados foram recolhidos em ambiente natural, durante aulas do 2.º e 3.º períodos, numa turma de 6.º ano da qual eu era professora, recorrendo à observação da realização das tarefas propostas, aos documentos produzidos pelos alunos, às transcrições dos registos vídeo e áudio e ainda às entrevistas usadas para clarificar e/ou aprofundar alguma questão. Para este estudo foram determinados os níveis de desenvolvimento geométrico manifestados pelos alunos-caso no que diz respeito às isometrias, antes e depois da

implementação do ambiente de ensino, que serviram de suporte à análise das alterações verificadas nesses níveis e do contributo dado pelas tarefas desenvolvidas. As respostas dadas no teste individual composto por cinco questões abertas, analisadas à luz da extensão do modelo de van Hiele para movimentos elementares desenvolvidos por Clements e Battista (citados em Costa, 2005), usando os descritores de níveis de pensamento para movimentos baseados na codificação de Lewellen, permitiram-me determinar o 1.º e o 2.º níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos observados. O 3.º nível foi reconhecido de acordo com as características gerais dos níveis de van Hiele, que descrevo no capítulo II, e com a descrição apresentada por Jaime (1993) para o ensino das isometrias e por Clements e Battista (citados em Costa, 2005) para os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares.

O ambiente de ensino criado respeitou as cinco fases de aprendizagem definidas no modelo de van Hiele, : informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. As sessões desenvolvidas permitiram-me observar o desempenho dos alunos na resolução de tarefas sobre isometrias e identificar dificuldades que manifestaram na resolução das mesmas.

Por fim, a análise dos dados recolhidos foi feita de modo a dar resposta ao objetivo desta investigação e às questões levantadas.

Conclusões do estudo

A análise dos dados obtidos foi feita com base em categorias de análise estabelecidas para o efeito. Primeiramente analisei os testes respondidos individualmente, antes da implementação do ambiente de ensino, por escrito e em entrevista, o que me permitiu identificar algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos-caso, verificar o seu desempenho em questões desta natureza e situá-los nos diferentes níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. Seguidamente, analisei o desempenho dos dois pares na realização das tarefas, identificando algumas dificuldades manifestadas no desenvolvimento das mesmas. Depois, analisei o modo como os alunos responderam às questões do teste após a implementação do ambiente de ensino, de maneira a identificar dificuldades, verificar o seu desempenho e situar os alunos nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Por fim, fiz a análise comparativa dos resultados obtidos nos dois momentos, de modo a compreender se houve progressão nos níveis de van Hiele e se as dificuldades diagnosticadas foram ultrapassadas. Esta análise permitiu-me compreender o contributo do ambiente de ensino implementado na evolução do pensamento geométrico.

As conclusões aqui apresentadas resultam da análise descrita no intuito de dar resposta

às questões orientadoras desta investigação.

Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do 6.º ano.

Antes da implementação do ambiente de ensino, o pensamento geométrico dos alunos, relativamente ao sub-tópico Isometrias, caracterizava-se pelo uso de uma linguagem informal para descrever os movimentos rígidos. Apesar de conseguirem reconhecê-los e distingui-los uns dos outros, os alunos tiveram dificuldade em utilizar termos que caracterizassem os movimentos, principalmente para o “deslize”, mas revelaram algum esforço em ser precisos. Porém, apesar desse esforço, quando fizeram uso de termos corretos, tais como “virar” e “rodar”, descreveram esses movimentos de forma incompleta, não indicando nenhum ou faltando a maior parte dos seus elementos (centro de rotação, sentido da rotação, eixo de reflexão, ...), ou ainda cometendo erros na especificação dos mesmos. De acordo com os descritores usados para determinar os níveis de desenvolvimento geométrico correspondentes aos níveis de van Hiele para movimentos elementares, os alunos-caso deste estudo situavam-se no nível 1 – Visualização – para os três movimentos deslizar, rodar e virar, embora com níveis de sofisticação diferentes, sendo o movimento virar aquele onde evidenciaram, globalmente, uma linguagem mais consistente e mais precisa. Tal não me surpreendeu, uma vez que, das três isometrias abordadas, a reflexão era a única que tinha sido trabalhada pelos alunos no 1.º ciclo. No que concerne à rotação, indicaram sempre a amplitude da rotação, o que também seria de esperar uma vez que o sub-tópico Ângulos tinha sido trabalhado no início do 6.º ano.

O nível que apresentavam no início desta investigação vai ao encontro dos revelados em diversas investigações nacionais e internacionais, que referem que neste grau de escolaridade o pensamento geométrico dos alunos situa-se entre o nível 1 e nível 2 de van Hiele. Por exemplo, Costa (2005), no final da sua intervenção com alunos do 4.º ano de escolaridade, concluiu que estes se situavam globalmente no nível 1 de van Hiele e alguns, em número reduzido, no nível 2; Matos (1994), no seu estudo focado na aprendizagem do conceito de ângulo, nos 4.º e 5.º anos de uma escola americana, concluiu que, na sua globalidade, os alunos situavam-se no nível 1 de van Hiele, tendo sido raros os que revelaram um pensamento geométrico de nível 2.

Após o desenvolvimento do ambiente de ensino a que foram sujeitos, estes alunos passaram a usar uma linguagem mais formal, com a substituição dos movimentos “deslizar”, “virar” e “rodar” pelos termos translação, reflexão e rotação, próprios da linguagem utilizada nas isometrias do 2.º ciclo. De forma geral, passaram a dominar o vocabulário formal relativo às isometrias, a descrevê-las em termos das suas propriedades, conseguindo especificar todas ou a

maior parte das suas características. Contudo, por vezes, cometiam alguns erros na descrição. De acordo com a codificação usada, estes alunos evidenciaram globalmente um pensamento geométrico de nível 2 – Descrição. Excetua-se a Cláudia que parece oscilar entre o 1.º e 2.º níveis, mas que por vezes apresenta raciocínios próprios do nível 3 de van Hiele, dificultando a tarefa de a situar globalmente num nível de van Hiele. Também Burger e Shaughnessy (1986) se depararam com a dificuldade de situar alunos nos níveis de van Hiele e identificaram estudantes que oscilavam entre níveis, até para a mesma questão, o que confirma o carácter contínuo dos níveis.

Com base nos descritores usados não foi possível determinar o nível 3 de van Hiele. No entanto, segundo os níveis de desenvolvimento geométrico para movimentos elementares desenvolvidos por Clements e Battista, “a este nível, os estudantes veem as relações entre os próprios movimentos e as suas propriedades. Eles compreendem a equivalência de movimentos e podem combinar movimentos para condensá-los num número mínimo de movimentos” (Costa, 2005, p. 84). Esta situação foi visível em várias respostas dos quatro alunos. Por exemplo, na translação, os alunos referiram-se geralmente a uma composição de duas translações, uma vertical e outra horizontal, enquanto a Cláudia condensou sempre as translações numa única. Apesar disso, foi o movimento onde teve um nível mais baixo, uma vez que para o descrever com precisão, precisava de possuir conhecimentos associados à linguagem dos vetores, que os alunos de 2.º ciclo não possuem. A decomposição em duas translações de direções perpendiculares usada pelos outros alunos facilitou-lhes a tarefa de as descrever, mesmo sem recorrer à linguagem dos vetores, obtendo um código de sofisticação mais elevado. Penso que a utilização do GSP usando a ferramenta *Translation Vetor Retangular*, poderá ter condicionado, ou pelo menos não estimulou, a substituição de duas translações por uma só, pois na aplicação informática é realizada com base no comprimento do deslize horizontal e do vertical.

Outro pensamento característico do nível 3 foi visível no raciocínio usado pelo Dinis, que determinou, a partir da interseção das mediatrizes de segmentos de reta que unem pontos aos respetivos transformados, o centro de rotação e descreveu uma só isometria, enquanto os colegas usaram, geralmente, uma composição de duas isometrias: rotação seguida de translação. Por seu lado, outro aluno, o Jorge, condensou uma rotação seguida de uma reflexão numa única reflexão. Estas situações constituem exemplos de raciocínio próprio do nível 3 - Dedução informal, o que me leva a considerar que, apesar de se situarem globalmente no nível 2 de van Hiele, dependendo das tarefas e dos tópicos que lhes são apresentados, podem revelar um pensamento geométrico do nível seguinte. As situações aqui retratadas levam-me a concordar com outros investigadores (e. g. Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime, 1993; Matos, 1999; Usiskin,

1982) cujos estudos confirmaram que os níveis são contínuos; se fossem discretos como defende a teoria de van Hiele, um aluno não poderia raciocinar em níveis diferentes em simultâneo, tal como aconteceu com estes alunos.

Os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos-caso no final deste estudo vão ao encontro dos evidenciados por alunos de outras investigações (e. g. Junqueira, 1994; Wu & Ma, 2006), em que se verifica um predomínio do nível 2 de van Hiele.

Desempenho dos alunos na resolução de tarefas de natureza geométrica.

O modo como os alunos desenvolveram a sequência de tarefas proposta permitiu-me caracterizar o seu desempenho na resolução das mesmas. Apesar da extensão da sequência, globalmente, os pares desenvolveram as tarefas com bastante entusiasmo e dedicação. Por vezes, tive receio que a concentração de um número elevado de sessões, num curto intervalo de tempo, como foi o caso, dedicadas à exploração deste tópico da geometria se tornasse cansativo para a turma e para os quatro alunos em particular já que, além das aulas, se reuniam comigo pelo menos uma vez por semana, para esclarecer/aprofundar algum aspeto das tarefas desenvolvidas na aula. Essa situação poderá ter acontecido pontualmente, porém estes alunos gostam muito de tarefas desafiadoras e de poderem mostrar aos outros como pensaram e que estratégia usaram; o ambiente de ensino desenvolvido proporcionou essas experiências.

Notei que o desempenho dos pares melhorou sempre que puderam usar material concreto, principalmente as colagens, ou o GSP. O facto de poderem manusear as figuras, com os acetatos ou no GSP, permitiu-lhes concretizar aquilo que pensaram, testar as suas ideias e, principalmente no caso do GSP, aperceberem-se de algumas incorreções e, a partir destas, conseguirem resolver o problema em causa. O uso dos materiais foi propositadamente da responsabilidade dos alunos, para que fossem os próprios a considerar vantajosa ou não a sua utilização. O recurso ao GSP foi pontual e serviu como complemento às atividades de papel e lápis e não como forma de as substituir, pois são estas que os alunos desenvolvem habitualmente no seu quotidiano. A utilização de um programa de geometria dinâmica foi deveras importante, não só como fator de motivação, mas principalmente por tornar as construções mais rápidas e precisas, constituir um ótimo meio para realizar experiências e, como já referi, levar o aluno a tomar contacto com o erro e a refletir sobre ele. Contudo, questiono-me se a minha opção de ensinar no GSP a translação usando a ferramenta *Translation Vetor Retangular*, não terá induzido os alunos a ver esta isometria como sendo sempre horizontal e/ou vertical, não substituindo duas translações de direções perpendiculares por uma só. Dos quatro alunos-caso, a Cláudia foi quem

menos apreciou o GSP, tendo preferido as colagens, e quem mais recorreu aos materiais disponibilizados. Tinha algum receio de experimentar no computador, recorria preferencialmente às colagens, experimentava com os materiais e, depois, com mais certezas, é que usava o GSP.

Com estas tarefas, os alunos-caso conseguiram atingir as Metas de Aprendizagens Intermédias de 5.º e 6.º anos previstas para o subdomínio Isometrias: identificam o transformado de uma dada figura através de uma isometria e justificam; constroem o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias; desenham padrões geométricos que envolvam simetrias; identificam as simetrias em figuras; constroem frisos e rosáceas que envolvam um ou dois tipos de simetrias, identificando e justificando as simetrias em causa. Por conseguinte, atingiram as Metas de Aprendizagens Finais de 2.º ciclo: compreendem as noções e propriedades da reflexão, translação e rotação; usam a visualização e o raciocínio geométrico na identificação de isometrias.

Dificuldades manifestadas na resolução das tarefas e como ultrapassá-las.

As principais dificuldades dos alunos prenderam-se com a linguagem e com a precisão da mesma; no início do estudo usavam uma linguagem informal para se referirem às três isometrias e não sentiam necessidade de especificar as características de cada uma delas. A questão da linguagem fez-se sentir sobretudo no que diz respeito à forma de se expressarem e, por vezes, na interpretação do que lhes era pedido, tal como aconteceu na resolução da tarefa 4. Contrariamente à realização das outras tarefas, que os alunos foram desenvolvendo de forma autónoma, completando frisos, pavimentações e rosáceas com colagens ou no GSP, completando alguns textos com lacunas e respondendo a perguntas diretas e curtas de forma correta, a tarefa 4 foi a única a possuir um enunciado longo e mais complexo, ditando passos de construção que os alunos tinham que seguir à risca, além de que constituiu a primeira tarefa de nível 2 implementada. Foram justamente os aspetos apresentados: extensão do enunciado, não poderem omitir nenhum dos passos, o rigor das construções e, principalmente, a linguagem matemática utilizada que dificultaram a realização desta tarefa, tendo precisado mais da minha ajuda. Contudo esta situação era expectável, atendendo à fase de aprendizagem que se pretendeu desenvolver com esta tarefa - Orientação dirigida. Nesta fase, o professor deve guiar os alunos na resolução de atividades para que estes descubram e aprendam a estabelecer relações entre os conhecimentos que devem formar, e orientar para a solução quando necessitem (Jaime, 1993). Ainda relativamente à tarefa 4, a dificuldade sentida pelos alunos em reunir todos os factos e tirar conclusões completas e capazes de generalizar as diferentes

isometrias, foi colmatada com a colaboração de toda a turma, durante a 3.ª fase de aprendizagem - Explicitação. Para mim, esta fase assume particular importância, na medida em que, tal como refere Jaime (1993), os alunos são levados a expressar os resultados obtidos, trocar experiências e discuti-las com o professor e com a turma, com o intuito de compreenderem as características e relações descobertas e adquirirem a linguagem formal correspondente ao nível e ao tema em desenvolvimento. Esta fase não esteve, temporalmente, entre a 2.ª e 4.ª fases, mas sempre que as atividades suscitaram justificação e discussão entre alunos ou entre estes e o professor.

No que diz respeito às dificuldades sentidas em cada uma das isometrias, globalmente, relativamente à rotação, primeiro não se referiam ao seu centro e, após o ambiente de ensino, marcá-lo constituiu uma das principais dificuldades, nos casos em que não coincidia com o centro da figura. Nas atividades para o 1.º nível de van Hiele, os materiais (discos em acetato e piónés) foram bastante úteis na identificação do centro de rotação (sendo este um ponto pertencente à figura), bem como o GSP, tendo sido usados, algumas das vezes, segundo a estratégia tentativa/erro. Nas atividades do 2.º nível, estes materiais começaram, gradualmente, a ser postos de lado. Marcar o centro de rotação, não sendo este um ponto da figura, constituiu uma das maiores dificuldades, pois exige medições rigorosas e algum trabalho. Como forma de contornar esse obstáculo e porque de facto era assim que visualizavam, a Cláudia e o Rogério optaram por admitir uma rotação com centro na própria figura seguida de uma translação. Por outro lado, o Dinis e o Jorge consideraram uma única rotação, mas apenas o Dinis descobriu corretamente o centro de rotação quando este não pertencia à figura, realizando as medições e construções necessárias. O Jorge tentou “adivinhar” onde era o centro de rotação, sem realizar qualquer medição. Ainda no que diz respeito à rotação, os alunos adotaram facilmente os termos “sentido positivo” e “negativo”, porém, no GSP, esqueciam-se por vezes deste facto e, no início, o Rogério optava por indicar sempre o sentido positivo, calculando a diferença entre 360^0 e a amplitude em causa.

Relativamente à translação, a opção por não falar de vetores, conteúdo de 3.º ciclo, condicionou a linguagem usada para esta isometria. O uso do GSP foi bastante útil para os alunos distinguirem a direção, aí referida como horizontal/vertical, do sentido, dado por um valor positivo ou negativo, e para constatarem a comutatividade da composição de translações. Porém, por outro lado, a utilização poderá ter condicionado alguns alunos no sentido de analisarem uma translação como um movimento horizontal e/ou vertical e não oblíquo; dos quatro alunos, apenas a Cláudia teve por hábito condensar duas translações numa só.

A reflexão era à partida a transformação conhecida pelos alunos. Todavia, apenas o Jorge

se sentia familiarizado com ela e sabia usar o mira, antes do ambiente de ensino. Após a sua implementação, os alunos conseguiram indicar sempre o eixo de reflexão a partir da marcação de, no mínimo, dois pares de pontos simétricos. No entanto, na presença de uma reflexão de eixo oblíquo (Anexo B-6), consideram uma composição de duas isometrias: rotação de 90° seguida de reflexão de eixo vertical ou reflexão de eixo horizontal seguida de uma rotação de 90° . Apenas o Jorge condensou estas duas isometrias numa só.

Outra dificuldade sentida no início, mas apenas por um dos pares observados, residiu no facto de não considerarem exemplo de isometria os transformados que tinham pontos em comum com as figuras originais, ideia que com a discussão em grupo e o recurso ao GSP facilmente foi ultrapassada.

As dificuldades surgidas ao longo da implementação do ambiente de ensino foram sendo ultrapassadas com recurso aos materiais disponibilizados e à metodologia usada. Como materiais destaque, numa primeira fase, os círculos em acetato e, depois, o recurso ao GSP. O trabalho de pares e a fase de explicitação envolvendo toda a turma, por exemplo, colocando um par a ditar os comandos para outro que os executa no GSP, também contribuiu para a superação das dificuldades diagnosticadas.

Contributo do ambiente de ensino para a evolução do pensamento geométrico.

Atendendo à evolução dos alunos nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, sou levada a considerar que o ambiente de ensino implementado se mostrou adequado à realidade destes alunos, tendo contribuído de forma significativa para a passagem do nível 1 para o nível 2 de van Hiele. A passagem do nível 2 para o nível 3 não se verificou. No entanto, qualquer um dos alunos-caso apresentou raciocínios de nível 3 em alguma situação.

O ambiente de ensino criado permitiu, igualmente, que os alunos atingissem as Metas de Aprendizagem estipuladas para o 2.º ciclo no que concerne às Isometrias. Para tal, penso ter sido fundamental o facto de assentar nas cinco fases de aprendizagem propostas pelo modelo de van Hiele, bem como a escolha pelos recursos adotados. Assim, tal como Ponte (2009) advoga ser necessário, no ambiente de ensino implementado usei tarefas motivadoras e diversificadas, nomeadamente no que diz respeito à complexidade, ao material que requereram, ao modo como foram trabalhadas pelos alunos e como serviram de base à discussão e aquisição de novo conhecimento. Considero também a escolha dos materiais e a oportunidade dada aos alunos de poder usá-los mediante as suas necessidades uma boa estratégia, bem como o recurso ao GSP, que além de funcionar como fator de motivação, permite resultados imediatos e a possibilidade

de descobrir e verificar a qualidade das suas descobertas. A opção por uma sequência de tarefas realizada em pequeno grupo (par) teve também um papel preponderante, pois permitiu, além da discussão de ideias no seio do par, a indispensável apresentação do trabalho dos pares à turma, fomentando a discussão e argumentação e assim, como refere Ponte (2009), o desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente e, neste caso acrescento, o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nas aulas esforcei-me por usar um discurso que Ponte (2009) apelida de contributivo e reflexivo, estimulando os alunos a contribuir com as suas opiniões e descobertas e levando-os a refletir sobre o seu trabalho na tentativa de estabelecerem relações e a partir daí construir um novo conhecimento.

Mais uma vez, reforço que todo o ambiente de ensino teve por base as fases de aprendizagem de van Hiele, que considero essencial serem respeitadas para que o pensamento geométrico se desenvolva, em consonância com a metodologia inerente ao PMEB (ME-DGIDC, 2007) constituindo uma oportunidade para: valorizar processos matemáticos fundamentais como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação; dar ênfase às atividades de exploração e investigação matemática e desenvolver o uso da tecnologia.

Em suma, considero que o ambiente de ensino implementado (materiais disponibilizados, metodologia adotada, as tarefas criadas) desenvolveu aspetos como: visualização, experimentação, intuição e inferência de resultados, comunicação e justificação e, assim, o pensamento geométrico.

Reflexão final

O desenvolvimento desta investigação serviu-me de mote à reflexão sobre a importância que o ambiente de ensino proporcionado aos alunos pode assumir no desenvolvimento do pensamento geométrico. No ensino da Geometria, o professor deve proporcionar diferentes materiais aos alunos e estruturar adequadamente as tarefas a desenvolver, respeitando as fases de aprendizagem de van Hiele e as características do seu modelo. Deve apresentar muitas e variadas figuras obtidas pelas diferentes isometrias, assim como uma variedade de figuras que não sejam exemplo de transformações isométricas. A construção de frisos, pavimentações e rosáceas foram atividades que reuniram a preferência dos alunos e evidenciam propriedades e relações das isometrias. O programa de geometria dinâmica, GSP, constituiu um excelente meio para trabalhar isometrias, não só por tornar as construções mais fáceis e rápidas, mas também por permitir a realização de experiências e a reflexão sobre os resultados. As figuras em acetato também foram um material precioso na exploração de isometrias e na construção de frisos e

rosáceas, uma vez que são mais apelativas do que as ferramentas de desenho e permitem resultados mais rápidos do que desenhando, além de serem um ótimo meio de fazer reflexões.

Um dos objetivos principais do nível 2 de van Hiele deve ser o desenvolvimento da capacidade dos alunos para entender a terminologia matemática a fim de poderem usá-la nas suas explicações (Jaime, 1993). Assim, o vocabulário usado deve ser progressivamente mais formal, “o vocabulário próprio do tema surge integrado na abordagem dos conceitos e a sua apropriação faz-se de um modo gradual” (ME-DGIDC, 2007, p.20). Contudo, Jaime (1993) adverte que é conveniente evitar os casos em que essa linguagem ou notação podem criar dificuldades aos estudantes, devendo atrasar-se o seu uso até ao momento adequado. Baseada nisso, e no próprio Programa de Matemática, achei prudente não utilizar a linguagem associada aos vetores, para descrever as translações, e a única notação matemática utilizada foi a representação de um ponto e respetivo transformado.

Lamento não ter tido mais tempo para dedicar à implementação do ambiente de ensino, em particular às sessões em que se desenvolveram atividades do nível 2 de van Hiele, pois penso que poderia ter permitido a passagem dos alunos para o nível de pensamento seguinte. Apesar de ter considerado as tarefas implementadas interessantes e terem dado um contributo bastante válido para o desenvolvimento do pensamento geométrico, não considero a possibilidade de voltar a usá-las integralmente na próxima vez que explorar este tema. A razão é simples, requer um elevado número de figuras em acetato, que além do custo económico é um material mais difícil de ser cortado do que o papel e que com o manuseio vai perdendo alguma qualidade. Talvez reduza o número de colagens e substitua por atividades no GSP.

A turma em que foi realizado este estudo, durante o 1.º ciclo, não tinha sido sujeita ao novo programa de Matemática (ME-DGIDC, 2007) e apenas tinha tido contacto com a reflexão; doravante, com a introdução, de modo informal, das transformações geométricas logo no 1.º ciclo, talvez possa ser dispendido menos tempo com as atividades de nível 1, pois serão exploradas no 1.º ciclo podendo dedicar-se mais atenção às tarefas de nível 2. Assim, seria curioso fazer esta investigação com alunos que tivessem realizado o 1.º ciclo orientados pelo programa de Matemática de 2007, em que a Geometria surge numa perspetiva de desenvolvimento do sentido espacial, dando ênfase à visualização.

Como docente, considero que a Geometria, nomeadamente as isometrias, possibilita a ligação do aluno com o meio que o rodeia, pelo que dedicar mais tempo ao seu ensino será sempre vantajoso para qualquer estudante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.
- Alves, B. (2008). Transformações Geométricas: Isometrias. In Ema Mamede (Coord.), *Matemática - Ao Encontro das Práticas - 2.º Ciclo*, (pp. 169-192). Instituto de Estudos da Criança - Universidade do Minho.
- Bastos, R. (2007). Notas sobre o Ensino da Geometria – Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, vol. 94, pp. 23-27. Lisboa: APM.
- Bogdan R., Biklen S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17 n.º 1, pp. 31-48.
- Carneiro, C. (2005). *O contributo da linguagem Logo no ensino e aprendizagem da geometria*. (Tese de Mestrado). Universidade do Minho.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.
- Clements, D., Battista, M. e Sarama, J. (1998). Development of geometric and measurement ideas, Em Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 201-226) Londres: Lawrence Erlbaum.
- Costa, M. C. (2005). *Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. (Tese de Doutoramento). Universidade Nova de Lisboa.
- Crowley, M. (1987). The van Hiele model of development of geometric thought. In M. M. Lindquist, (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp.1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Davis, J. P. e Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Boston. Acedido em 15 de Julho, 2010, de <http://books.google.pt/books?id=IMdz84dWNnAC&pg=PR4&lpg=PP1&ots=Bq72RmJ9rZ&dq=Davis+e+Hersh&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false>
- DEB (2004). *Organização Curricular e Programas do Ensino Básico — 1.º Ciclo (4.ª ed.)*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.
- Gabinete de Comunicação e Identidade da Universidade de Coimbra. (2007). *Marcelo Viana "chama" Professores, Pais e Media para o Combate ao Insucesso na Matemática*. [online].

- Acedido em 10 de Maio, 2010, de http://www.uc.pt/media_uc/pr_0703/070301P1.pdf
- GAVE (2007). *Resultados do Estudo Internacional PISA 2006 – Competências científicas dos alunos portugueses*. Lisboa: Ministério da Educação, GAVE.
- GAVE (2009). *Relatório de análise de resultados Prova de Aferição de Matemática do 1.º/2.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação, GAVE.
- Gomes, A. & Ralha, E. (2005). Sobre o Ensino Superior da Matemática: A Geometria e os Professores do 1º ciclo “Novos Desafios, Velhas Deficiências”. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 52, Maio 2005, pp. 1-25. Acedido em 23 de Julho, 2010, de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/3597/1/GomesRalha%28SPM%20final%29.pdf>
- Gonçalves, M. & Kaldeich, C. (2007). *E-Learning in the School: Applied to Teaching Mathematics in Portugal*. Informing Science and IT Education Joint Conference. Escola de Engenharia. University of Minho. Acedido em 20 de Julho, 2010, de <http://proceedings.informingscience.org/InSITE2007/InSITE07p023-47Gonc431.pdf>.
- Gutierrez, A., Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20.2/3, pp. 27-46. Acedido em 12 de Janeiro, 2011, de <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf>
- Guimarães, R. (2006). *Um estudo do pensamento geométrico de professores das séries iniciais do ensino fundamental segundo o modelo de van hiele*. Belo Horizonte.
- Hamazaki, A. (s/d). *O ensino da geometria por meio da metodologia van Hiele: uma experiência*. Universidade Guarulhos. Acedido em 23 de Agosto, 2010, de http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0109.doc
- Inoue, R. (2004). *O Processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6.ª série do ensino fundamental*. Universidade do Vale do Itajaí.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Univesidad de Valência. Acedido em 23 de Dezembro, 2010, de <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>.
- Jones, K. & Bills, C. (1998), *Visualisation, Imagery, and the Development of Geometrical Reasoning*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1-2), 123-128. Acedido em 20 de Julho, 2010, de <http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip18-12/BSRLM-IP-18-12-21.pdf>.
- Junqueira, M. (1994). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos*. (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.
- Lehrer, R., Jacobson, C., Thoyre, G., Kemeny, V., Strom, D., Horvath, J., Gance, S. and Koehler, M. (1998). Development understanding of geometric and space in the primary grades, Em Richard Lehrer e Daniel Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 169-200) Londres: Lawrence Erlbaum.

- Lüdke, M. e André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. S. Paulo: E.P.U.
- Marques, R. (s/d). *O Conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal em Vygotsky*. Acedido em 29 de Julho, 2010, de http://www.eses.pt/usr/ramiro/docs/etica_pedagogia.
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática.
- Matos J. e Serrazina M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2007). *Portal da Educação*. [online]. Acedido em 20 de Julho, 2010, de <http://www.min-edu.pt/np3/853.html>
- Ministério da Educação. *Metas de Aprendizagem* [online]. Consultado a 20 de Outubro de 2011 em <http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/ensino-basico/apresentacao/>
- Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence*, 35(138), pp. 365-379.
- NCTM (1994). *NORMAS Profissionais para o ensino da Matemática – tradução dos Professional Standards do NCTM*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a matemática escolar*. (Tradução portuguesa de Principles and standards for school mathematics, 2000). Lisboa: APM.
- Pimentel, T., Vale, I., Freire, F., Alvarenga, D., Fão, A. (2010). *Matemática nos primeiros anos – tarefas e desafios para a sala de aula*, pp. 87-102. Lisboa: Texto Editores.
- Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência. Publicado originalmente em inglês em 1945. 196p. Acedido em 30 de Janeiro, 2011, de <http://www.mat.ufmg.br/~michel/inicmat2010/livros/polya.pdf>.
- Ponte, J. P. (1994). O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, 3 (1), pp. 3-18.
- Ponte J. e Serrazina M. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interações*, 12, pp. 96-114. Acedido em 3 de Junho, 2010, de <http://www.eses.pt/interaccoes>

- Pusey, E. L. (2003). *The van Hiele Model of Reasoning in Geometry: A Literature Review*. Raleigh. Acedido em 2 de Fevereiro, 2011, de <http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/2275/1/etd.pdf>
- Roldão, M. C. (1999). *Gestão Curricular: fundamentos e práticas*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.
- Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C. e Lopes, I. (2001). *Matemática B 10 ou 11º anos*. Ministério da Educação, Departamento do ensino Secundário.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), pp. 114-145.
- Teixeira, M. (2008). *O Pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade*. (Tese de Mestrado). Universidade de Lisboa.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry: Cognitive development and achievement in secondary school geometry project*. Chicago: University of Chicago Press.
- Vale, I. (2004). Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática, O Estudo de Caso. In Vale, I., Portela J., e Subtil J., *Revista da Escola Superior de Educação* (Vol. 5, pp. 171-202). Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.
- Vale, I. (2009). *Das tarefas com padrões visuais à generalização*. Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.
- Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: IIE.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2006). The distributions of van hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 409-416). Prague: PME.
- Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Newbury Park: Sage Publications.

ANEXOS

Anexo A

Questionário de opinião

Para cada uma das questões, **rodeia** a letra correspondente à tua resposta.

1- Como têm sido os teus resultados em geometria nos últimos anos?

- A- Muito bons B- Bons C- Satisfatórios D- Pouco satisfatórios E- Não satisfatórios

2- Como te sentiste em relação à geometria que estudaste?

- A- Gostei muito. B- Gostei. C- Não gostei. D- Não gostei nada.

3- Na geometria, tiveste de memorizar “coisas”?

- A- Sim, muitas. B- Sim, algumas. C- Não muitas.

4- Na geometria, tiveste de usar a tua capacidade de raciocínio?

- A- Sim, muitas vezes. B- Sim, às vezes. C- Sim, mas pouco. D- Pouco ou nada usei.

5- Quando aprendi as fórmulas das áreas das diferentes figuras, disseram-mas e tive de as decorar.

- A- Nunca B- Às vezes. C- Muitas vezes

6- Na escola, fiz atividades de investigação para a descoberta das fórmulas da área de figuras.

- A- Nunca B- Às vezes. C- Muitas vezes

7- Usei material manipulável na aprendizagem da geometria.

- A- Nunca B- Às vezes. C- Muitas vezes

8- Para ti, a geometria é:

- A- Muito fácil. B- Fácil. C- Às vezes difícil. D- Difícil a maior parte das vezes.

Explica porquê: _____

9- Para ti, geometria é:

- A- Muito útil. B- Útil. C- Pouco útil. D- Inútil.

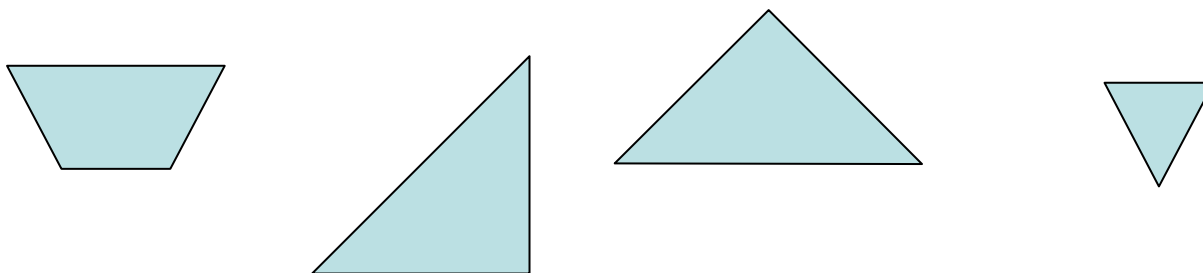
Explica porquê: _____

Anexo B

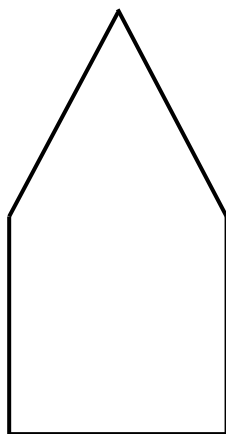
Teste para determinar os níveis de van hiele

I (A)

Com estas 4 peças



Podes construir a casa que a seguir te mostro?

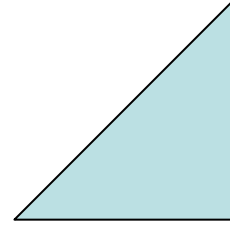


Sim _____

Não _____

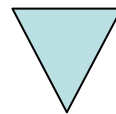
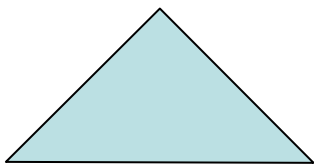
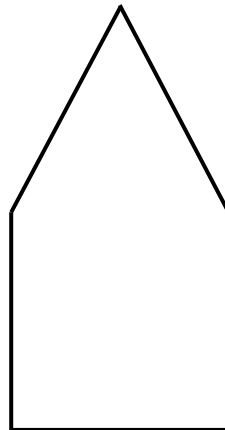
I (B)

Descreve o movimento que terias de fazer com cada uma das peças para poderes construir a casa. Mostra no desenho como é possível.



Descrição dos movimentos:

Descrição dos movimentos:



Descrição dos movimentos:

Descrição dos movimentos:


II

Nas figuras a seguir, há pares delas que são geometricamente iguais.


Quais são esses pares? R.: _____

Como me mostravas que tinhas razão?

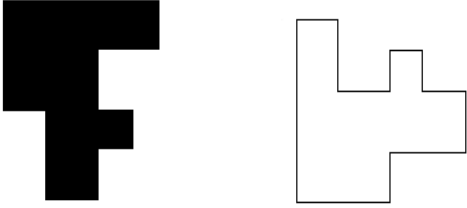
1



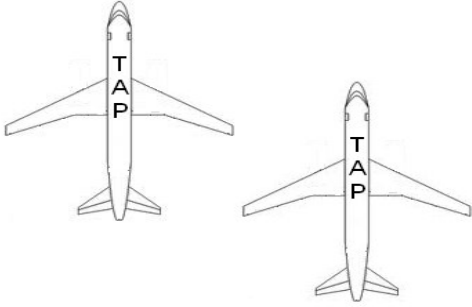
2



3



4



III

Qual destas três figuras retangulares, dispostas horizontalmente na segunda linha desta folha, é a mesma que a figura retangular que está na linha de cima? Porquê?

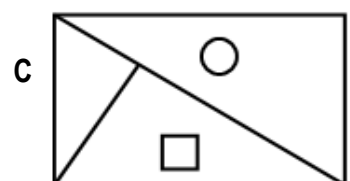
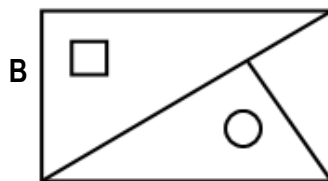
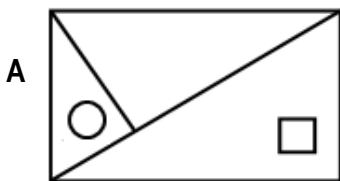
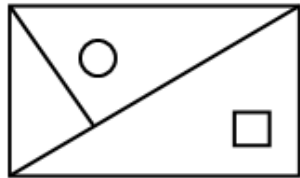
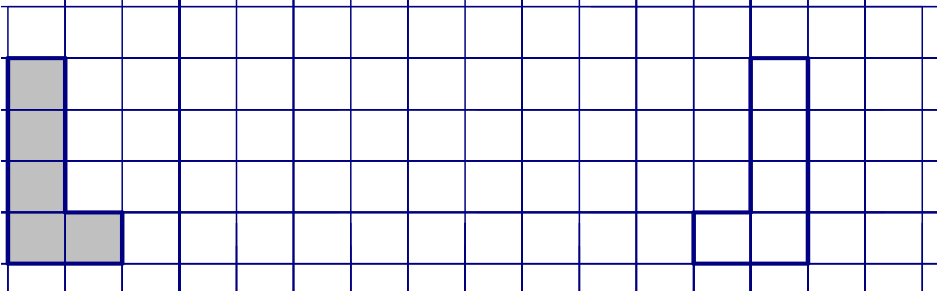


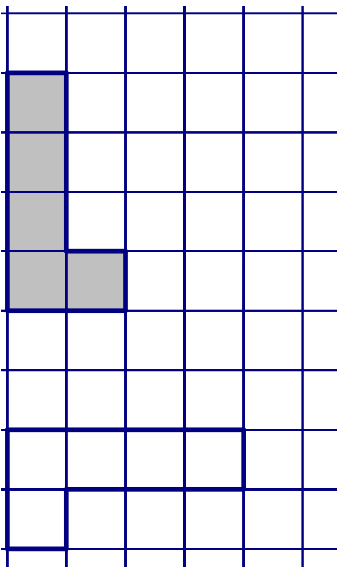
Fig. A	Sim _____ Não _____	Justificação: _____ _____ _____ _____ _____
Fig. B	Sim _____ Não _____	Justificação: _____ _____ _____ _____ _____
Fig. C	Sim _____ Não _____	Justificação: _____ _____ _____ _____ _____

IV

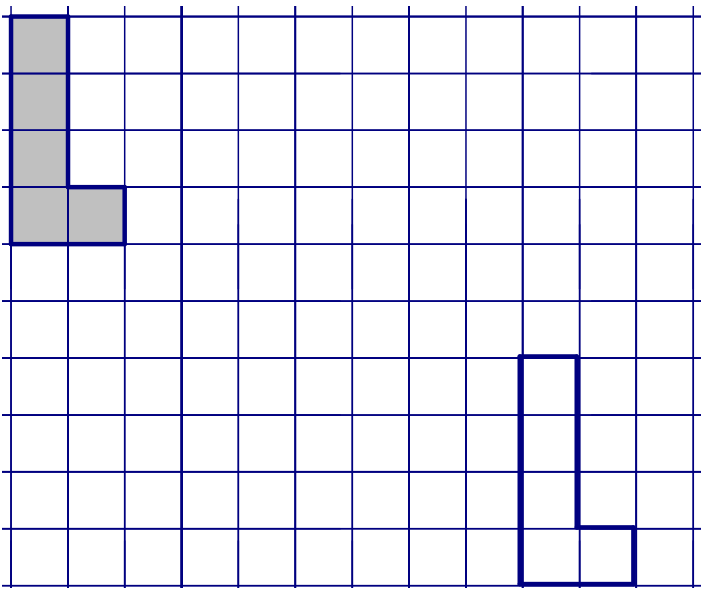
Com que movimentos se pode mover a figura sombreada até a fazer coincidir com cada uma das outras figuras? Descreve o mais pormenorizadamente possível.



Descrição: _____



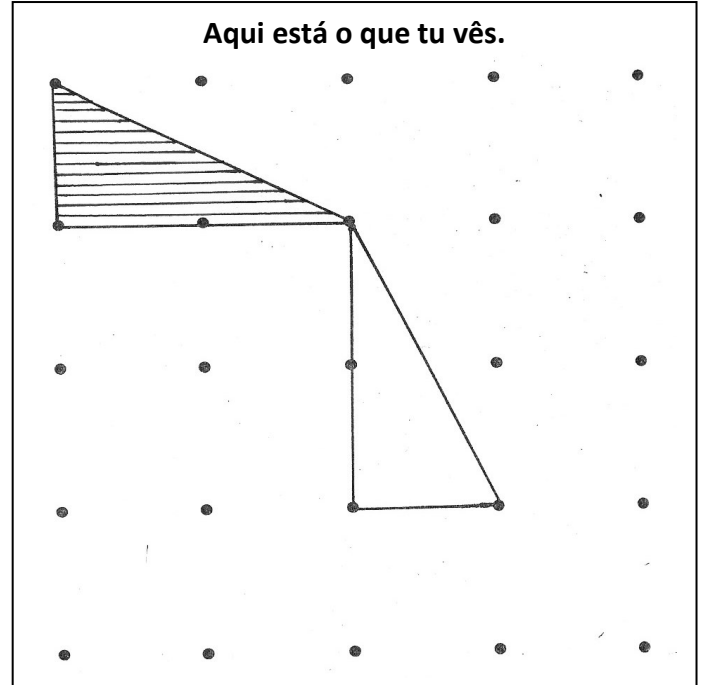
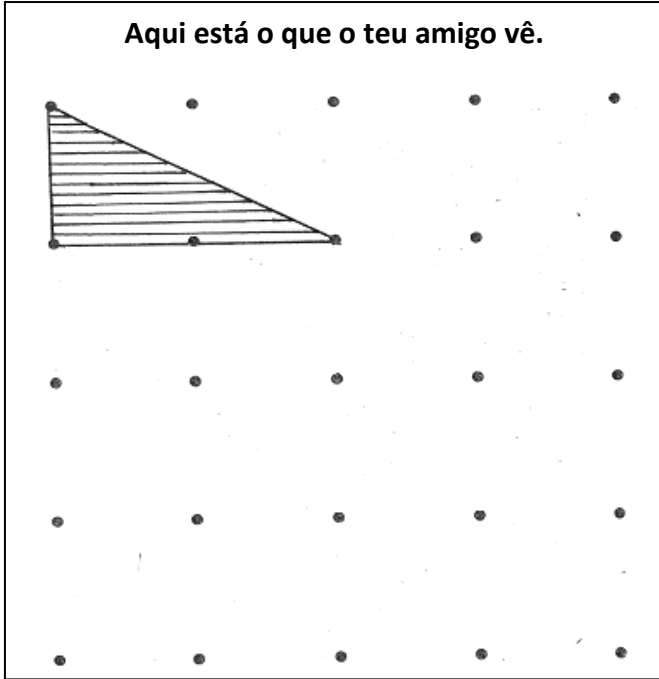
Descrição dos movimentos:



Descrição dos movimentos:

V

Tu e um teu amigo ides fazer um jogo ao telefone.



Como dirias ao teu amigo para movimentar a peça triangular a tracejado de forma que ela se encaixe perfeitamente no segundo triângulo? Lembra-te que estás a falar ao telefone, o teu amigo não te pode ver, nem à tua figura. Podes usar uma peça triangular para te ajudar.

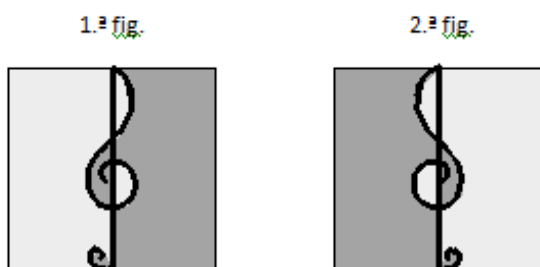
Anexo C

Tarefas

TAREFA 1

Para cada uma das situações, explica como foi gerada a 2.ª figura a partir da 1.ª fig. Usa, se precisares, o material que tens disponível.

I)



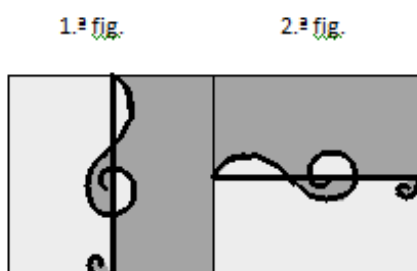
Explicação:

II)



Explicação:

III)

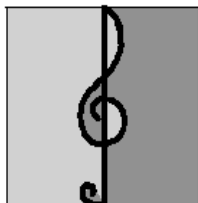


Explicação:

TAREFA 2A

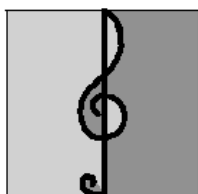
Com o motivo dado e o material que te foi fornecido, completa o friso:

I) usando apenas translações (o “deslizar”);



Como procedeste?

II) usando apenas reflexões (o “virar”);



Como procedeste?

III) usando apenas rotações (o “rodar”).

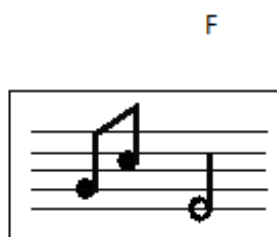
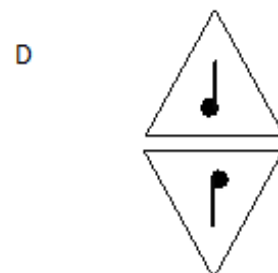
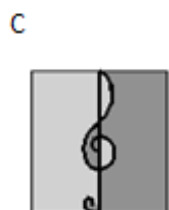


Como procedeste?

Compara a figura inicial com a dos seus transformados em cada uma das simetrias usadas.
O que podes concluir quanto à sua forma e tamanho?

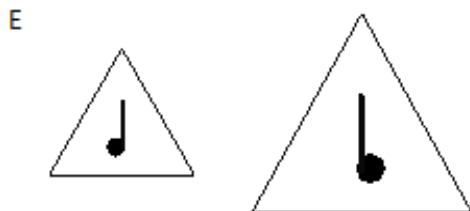
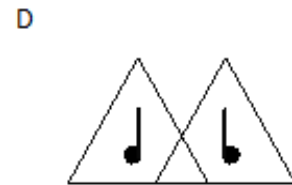
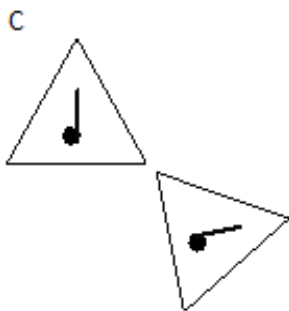
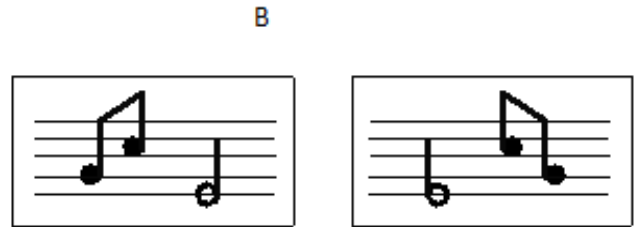
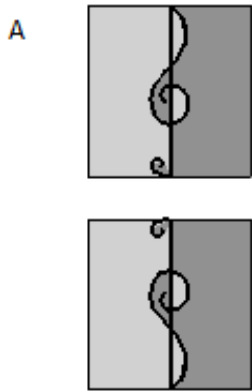
TAREFA 2B

Dos seguintes pares de figuras, descobre, rodeando a respectiva letra, aqueles que resultam de uma translação.



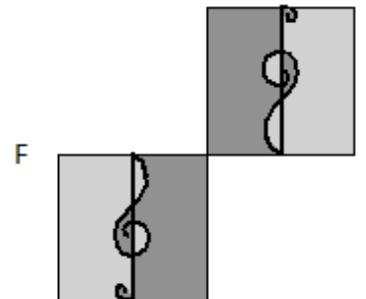
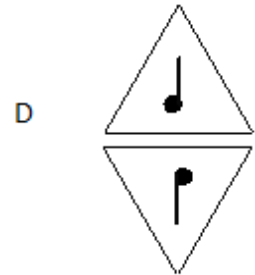
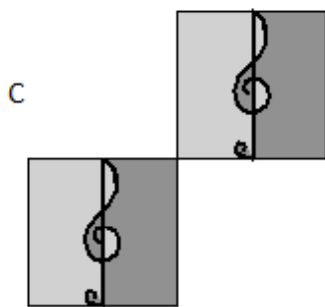
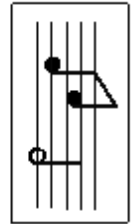
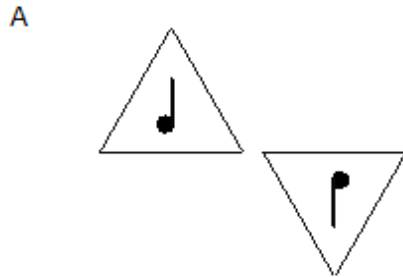
Justifica as tuas opções:

Dos seguintes pares de figuras, descobre, rodeando a respectiva letra, aqueles que resultam de uma reflexão.



Justifica as tuas opções:

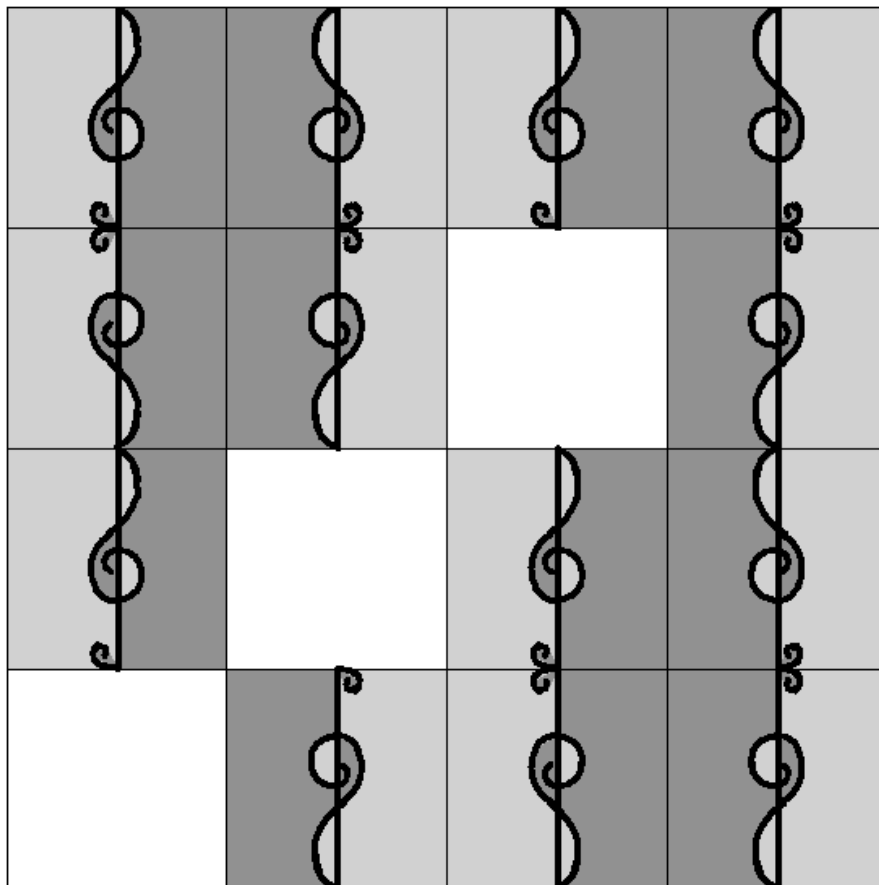
Dos seguintes pares de figuras, descobre, rodeando a respectiva letra, aqueles que resultam de uma rotação.



Justifica as tuas opções:

TAREFA 3A

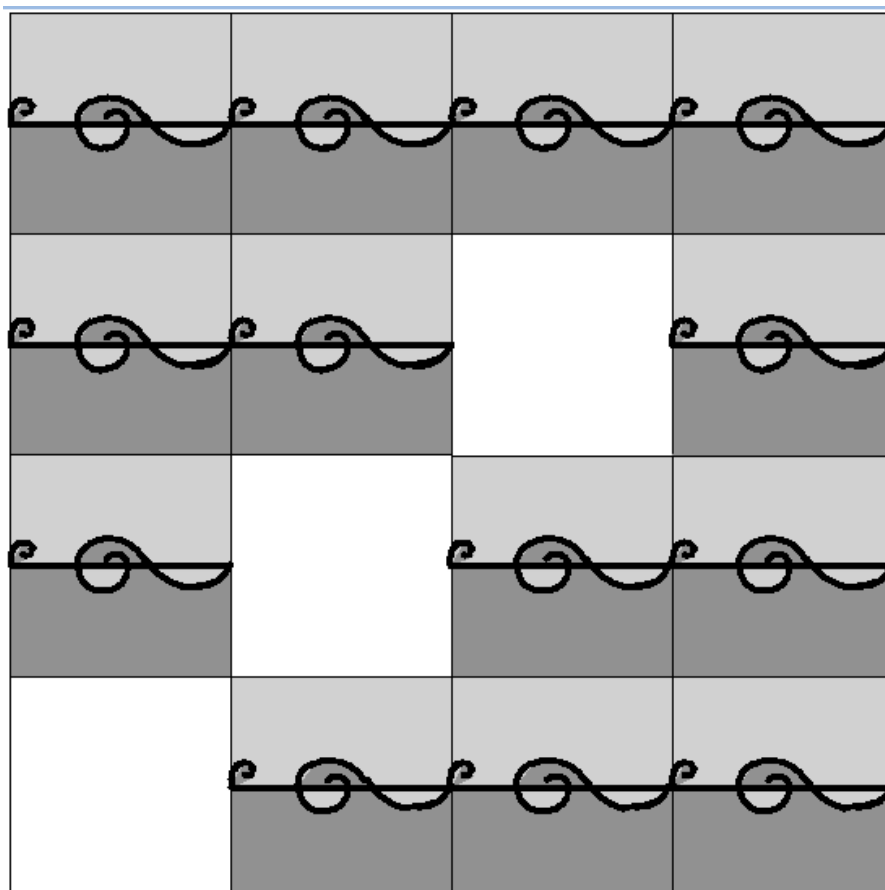
1) Descobre as isometrias usadas para construir esta pavimentação e completa os espaços em branco.



Como tens a certeza que completaste da forma correta?

Qual foi a isometria usada na construção desta pavimentação?

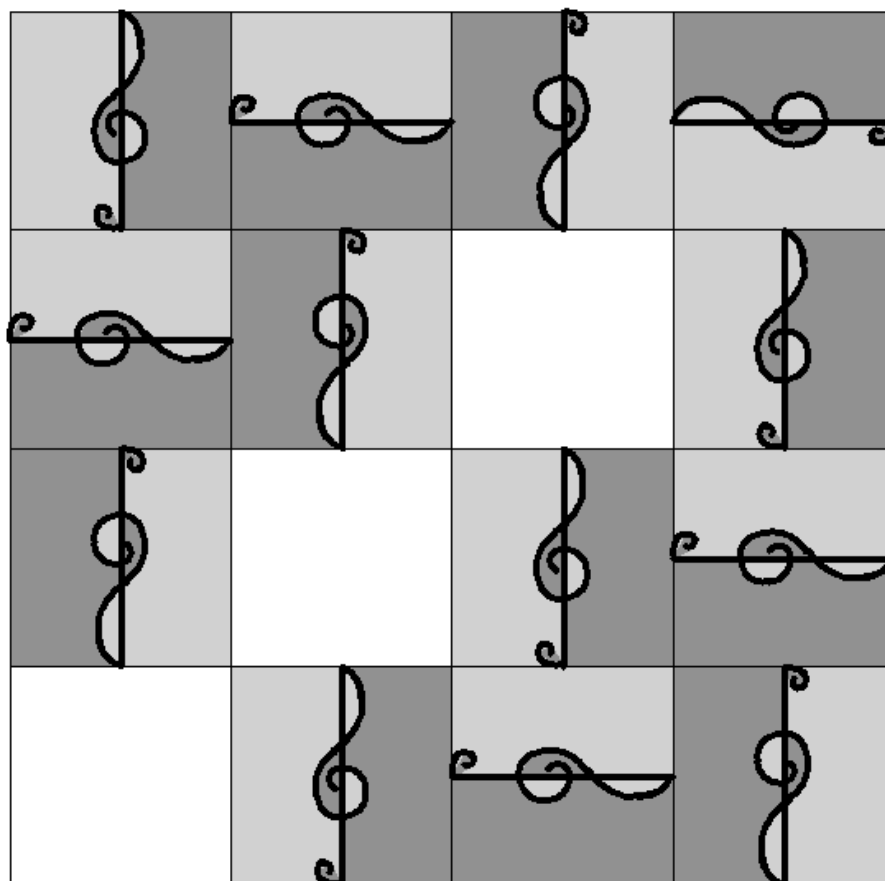
II) Descobre as isometrias usadas para construir esta pavimentação e completa os espaços em branco.



Como tens a certeza que completaste da forma correta?

Qual foi a isometria usada na construção desta pavimentação?

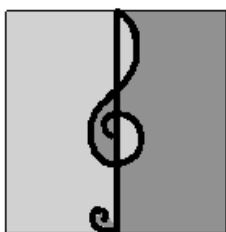
III) Descubra as isometrias usadas para construir esta pavimentação e completa os espaços em branco.



Como tens a certeza que completaste da forma correta?

Qual foi a isometria usada na construção desta pavimentação?

IV) Usando o motivo dado, ou outro por ti escolhido, constrói uma pavimentação ao teu gosto.



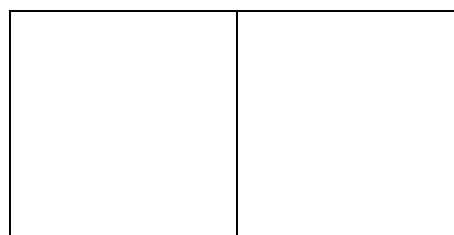
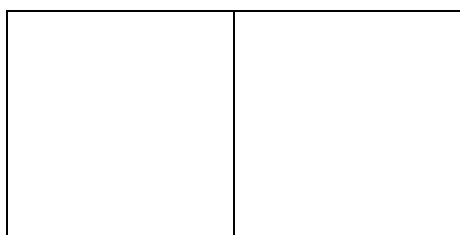
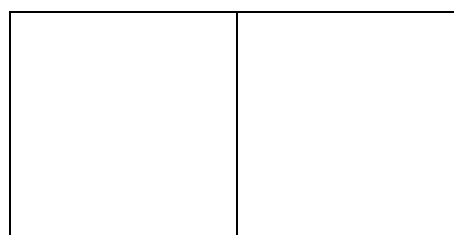
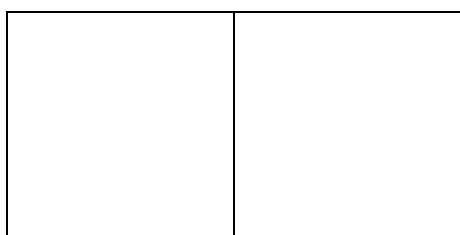
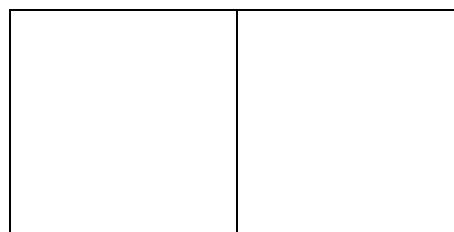
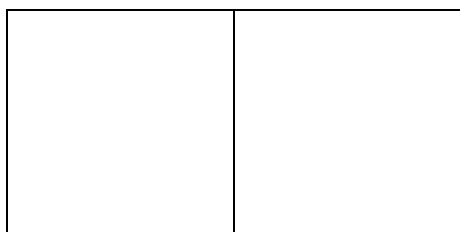
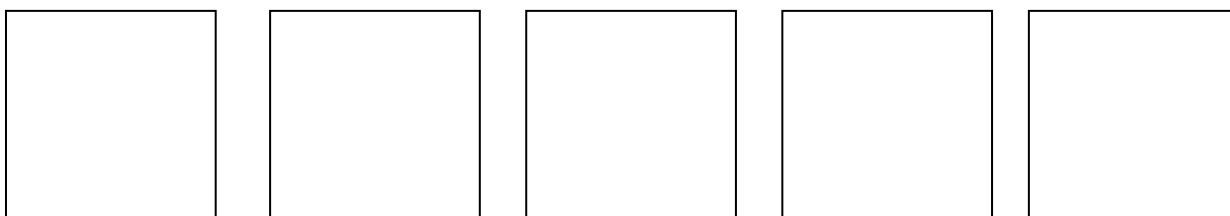
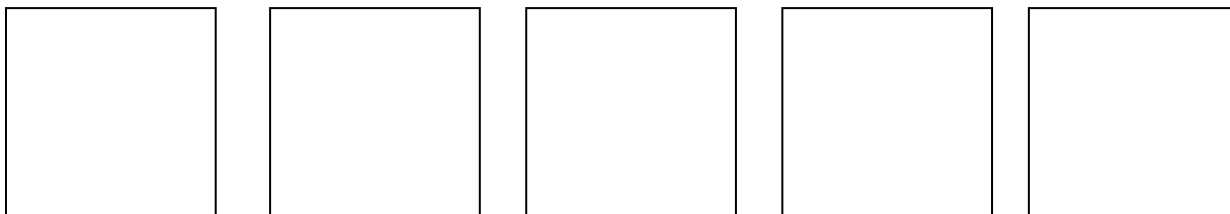
Descreve as isometrias que usaste na construção da pavimentação.

Tenta reproduzi-la no GSP. Descreve os passos que deste.

TAREFA 3B

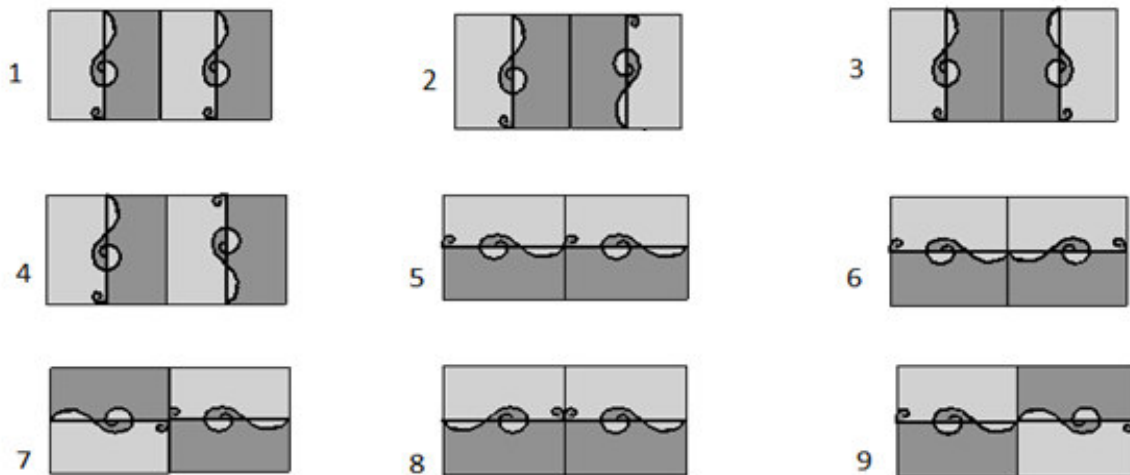
Com o motivo dado, a clave de sol, pretende-se construir o “dominó isométrico”. Para isso, todas as peças terão de ser o transformado da clave de sol por uma das isometrias estudadas, ou seja, cada uma das peças é o resultado da translação, ou da reflexão, ou da rotação da clave de sol.

Quantas peças irá ter este dominó? Descubra e faz o registo de todas as peças.



TAREFA 3C

Eis algumas peças do dominó isométrico que construístes:



Das peças apresentadas descobre as que podem ser construídas a partir da figura da esquerda por:

a) reflexão: _____

Identifica os eixos de reflexão das peças que indicaste e descreve a isometria em causa.

b) rotação: _____

Identifica o centro de rotação das peças que indicaste e descreve a isometria em causa.

c) translação: _____

Identifica a direção e o sentido da translação das peças que indicaste e descreve a isometria em causa.

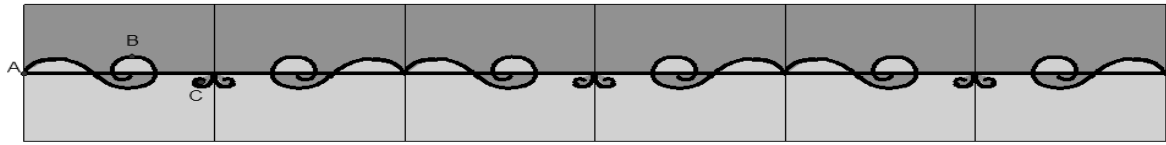
FIGURAS SIMÉTRICAS

Uma figura é simétrica se tiver, pelo menos, uma simetria diferente da identidade que não a altere. Assim, uma figura pode ter simetria de reflexão (ou axial), de rotação (ou rotacional), de translação ou de *reflexão deslizante*.

Das peças de dominó apresentadas, indica as que são simétricas e o tipo de simetria que possuem.

TAREFA 4

(I) Como se terá obtido este friso?



1.º Assinala no 2.º “azulejo” do friso o transformado dos pontos A e B , ou seja, os pontos A' e B' .

2.º Traça $[AA']$ e $[BB']$.

3.º Marca o ponto médio de cada um dos segmentos de reta, como C e D , respectivamente.

4.º Traça a reta r que passa pelos dois pontos médios.

5.º Considera a reta r e os segmentos de reta $[AA']$ e $[BB']$.

O que podes dizer acerca da posição relativa entre cada um deles e a reta r ?

- $[AA']$ e $[BB']$ são _____
- $[AA']$ e r são _____
- $[BB']$ e r são _____

6.º A reta r que marcaste é o eixo de reflexão dos dois primeiros “azulejos”.

Consegues descobrir outros eixos de reflexão no friso? Em caso afirmativo, marca-os no friso.

7.º Com auxílio da régua graduada, indica a distância de cada um dos pontos marcados à reta r e a distância entre os pontos A e B , A' e B' .

Distância entre A e C = _____ cm

Distância entre A' e C = _____ cm

Distância entre B e D = _____ cm

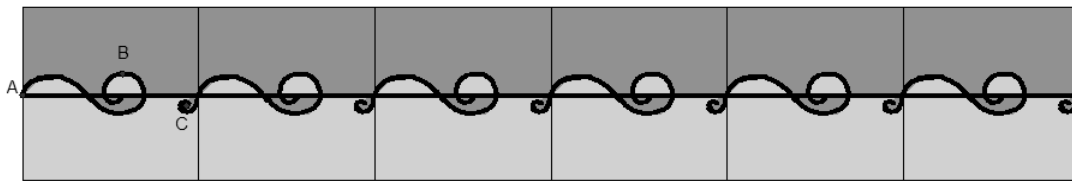
Distância entre B' e D = _____ cm

Distância entre A e B = _____ cm

Distância entre A' e B' = _____ cm

O que podes concluir?

(II) Como se terá obtido este friso?



1.º Assinala no 2.º “azulejo” do friso o transformado dos pontos A , B e C do 1.º “azulejo”, ou seja, os pontos A' , B' e C' .

2.º Traça $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$.

3.º Considera os segmentos de reta $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$.
O que podes dizer acerca da posição relativa entre eles?

- $[AA']$ e $[BB']$ são _____
- $[AA']$ e $[CC']$ são _____
- $[CC']$ e $[BB']$ são _____

Os segmentos de reta que unem cada um dos pontos ao seu transformado são _____ entre si.

4.º Com auxílio da régua graduada, indica as seguintes distâncias:

Distância entre A e A' = _____ cm

Distância entre B e B' = _____ cm

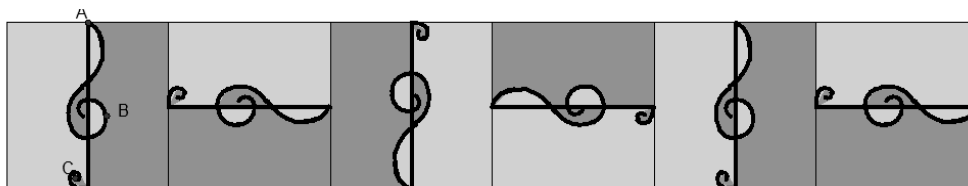
Distância entre A e B = _____ cm

Distância entre A' e B' = _____ cm

5.º Verifica o que acontece com a distância entre outros pontos e os respectivos transformados entre dois “azulejos” consecutivos.

O que podes concluir?

(III) Como se terá obtido este friso?



- 1.º Assinala no 2.º “azulejo” do friso o transformado dos pontos A e B , ou seja, os pontos A' e B' .
- 2.º Traça $[AA']$ e $[BB']$ e marca o ponto médio de cada um dos segmentos de reta.
- 3.º Traça a reta r perpendicular a $[AA']$ e que passe pelo seu ponto médio.
- 4.º Traça a reta s perpendicular a $[BB']$ e que passe pelo seu ponto médio.
- 5.º Marca o ponto de intersecção das duas retas como o ponto D .
- 6.º Marca o transformado de C , o ponto C' , no 2.º “azulejo”, une C a C' , marca o ponto médio desse segmento de reta e seguidamente uma reta t perpendicular a $[CC']$ que passe no seu ponto médio, ou seja, a mediatriz de $[CC']$.
- 7.º Qual é o ponto de intersecção das retas r , s e t ?

Esse ponto de intersecção, o ponto ___ é o centro da rotação que transforma A em A' e B em B' e qualquer outro ponto da fig. original no seu transformado.

8.º Indica a distância entre os pares de pontos simétricos ao centro de rotação.

$$\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{A'D} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \underline{\hspace{2cm}} \qquad \underline{\hspace{2cm}}$$

9.º Indica a medida da amplitude dos ângulos ADA' , BDB' e CDC' .

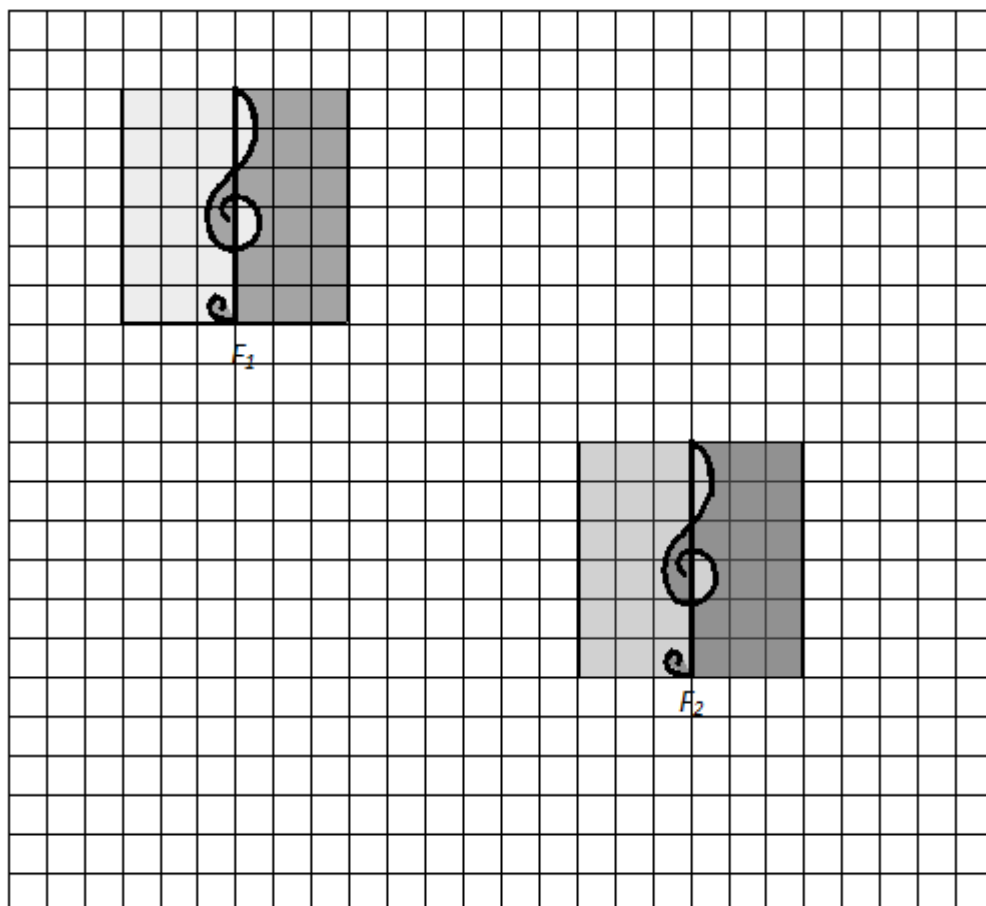
$$\hat{ADA}' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ \qquad \hat{BDB}' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ \qquad \hat{CDC}' = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

O que podes concluir? A que corresponde essa medida de amplitude?

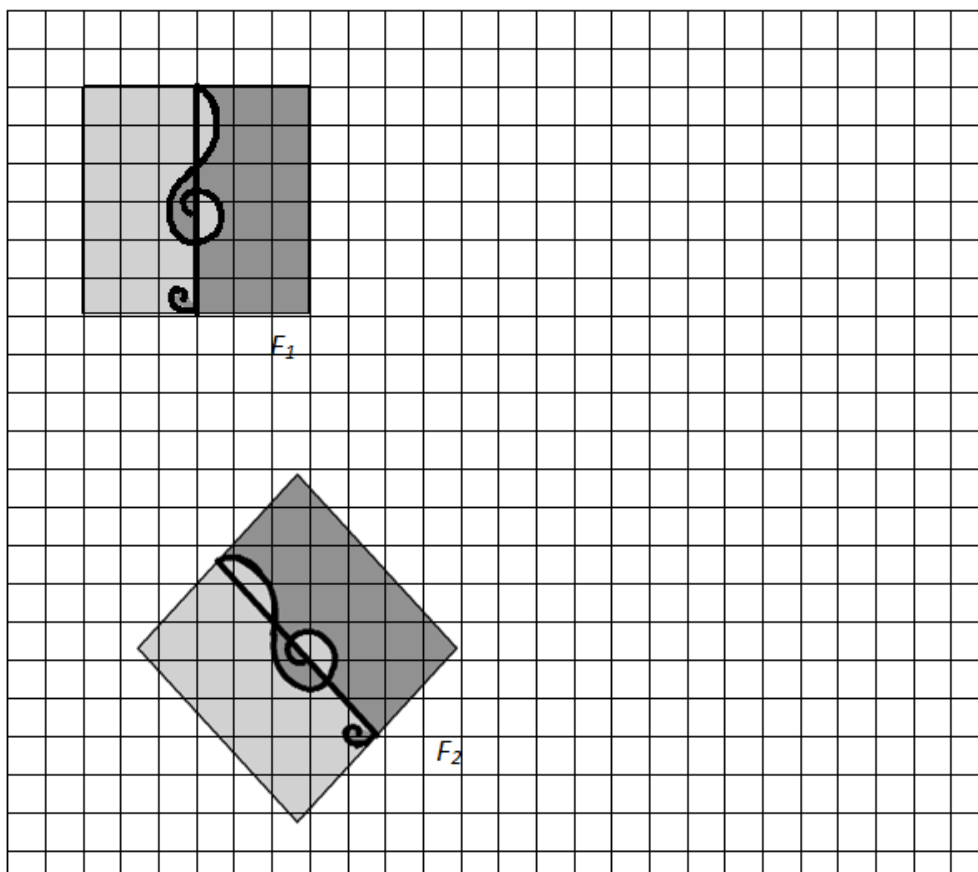
Como deves proceder para descobrir o centro de rotação que transforma um ponto da fig. original no seu transformado?

TAREFA 5

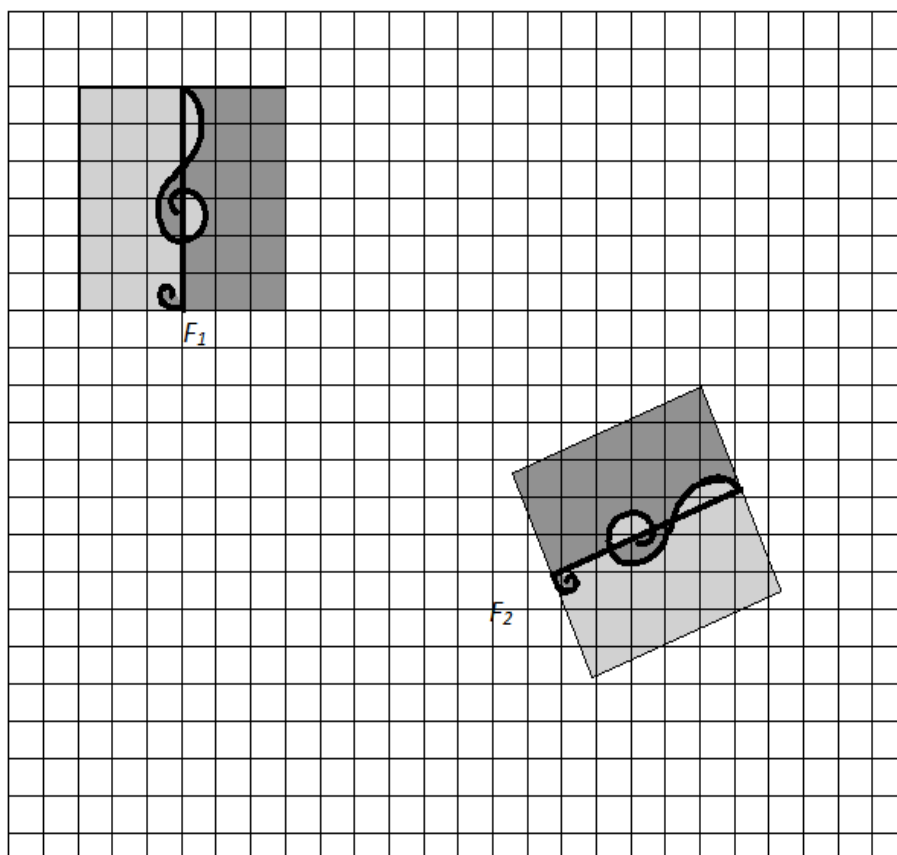
1) Sendo F_2 o transformado de F_1 , identifica a isometria em causa e descreve o modo como F_2 foi gerada a partir de F_1 .



II) Sendo F_2 o transformado de F_1 , identifica a isometria em causa e descreve o modo como F_2 foi gerada a partir de F_1 .



III) Sendo F_2 o transformado de F_1 , identifica a isometria em causa e descreve o modo como F_2 foi gerada a partir de F_1 .



TAREFA 6

Numa rosácea, existe sempre um ponto do plano que é fixo para todas as simetrias da figura. Eis dois exemplos de rosáceas (I e II)), observa-as atentamente e responde às questões.

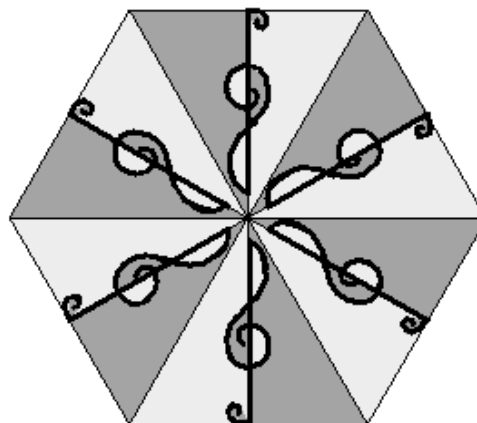
I)

Quantos setores tem esta rosácea?

Qual a amplitude dos setores?

Qual o motivo que se repete?

Que simetria(s) apresenta esta rosácea?



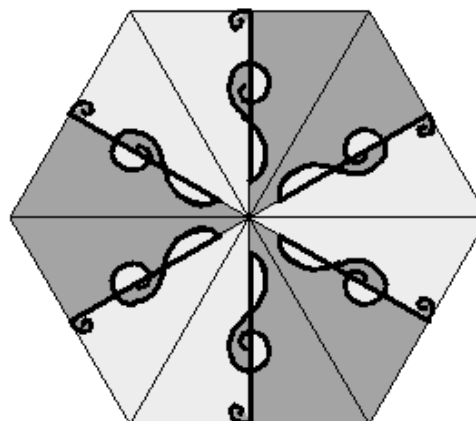
II)

Quantos setores tem esta rosácea?

Qual a amplitude dos setores?

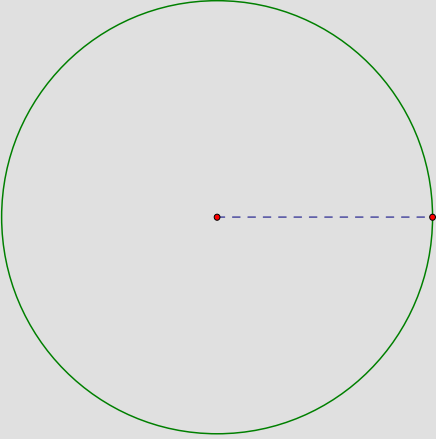
Qual o motivo que se repete?

Que simetria(s) apresenta esta rosácea?

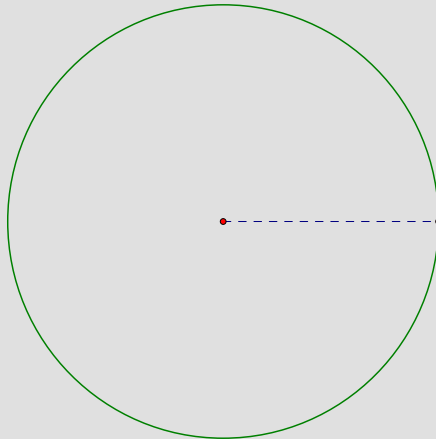


Considera vários exemplares dos três tipos de triângulos que te foram fornecidos.
Com eles, constrói diferentes rosáceas com as seguintes características:

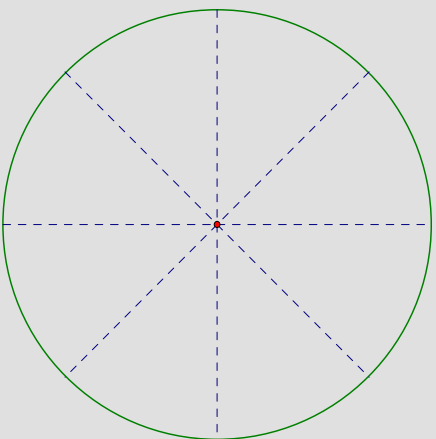
I) Apenas com simetrias de rotação.

	SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	Rotação		Centro de rotação: _____ Medida de amplitude dos ângulos de rotação: _____

II) Com simetrias de rotação e de reflexão.

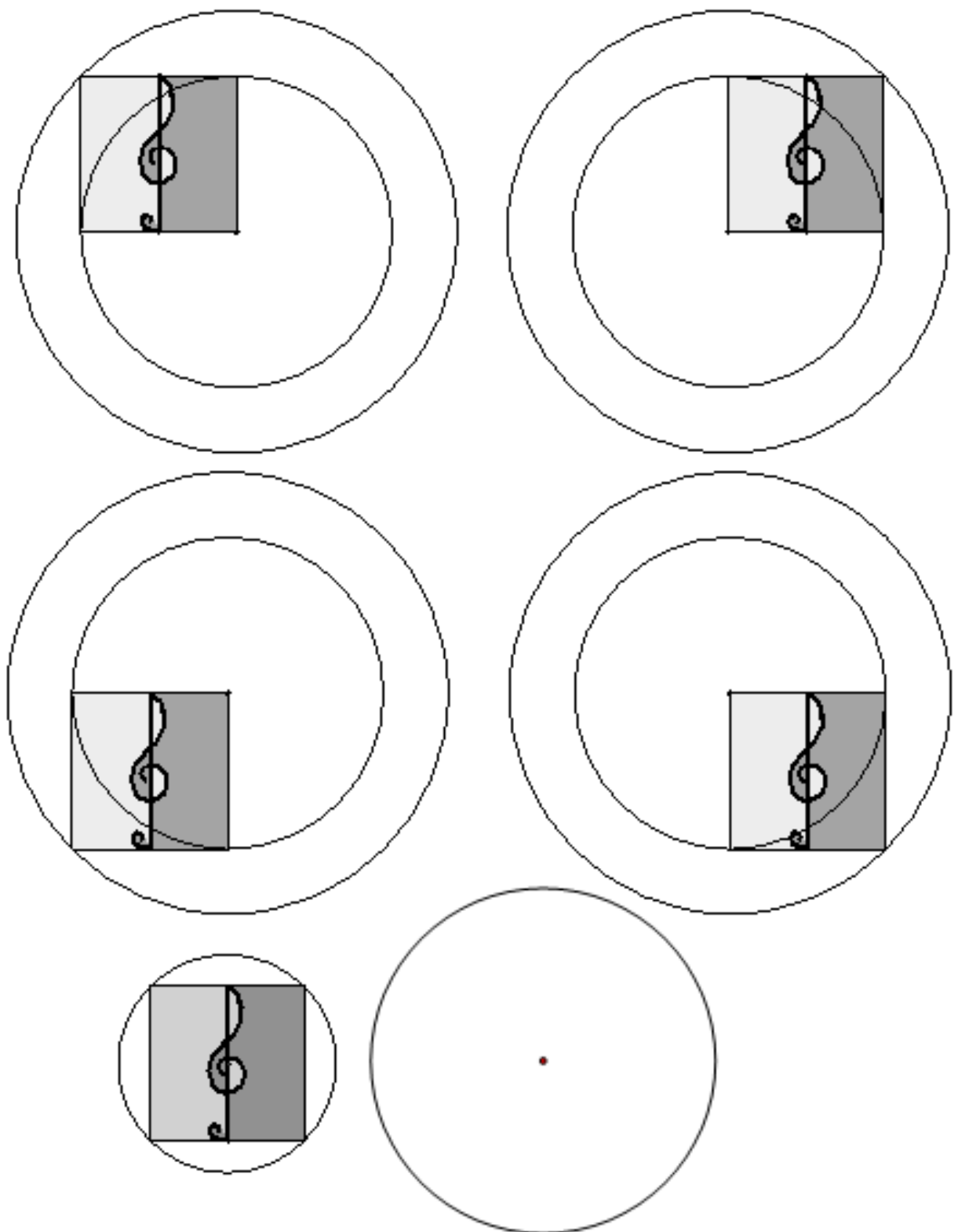
	SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	Rotação		Centro de rotação: _____ Medida de amplitude dos ângulos de rotação: _____
	Reflexão		Eixos de simetria: _____

II) Com 4 simetrias de rotação.

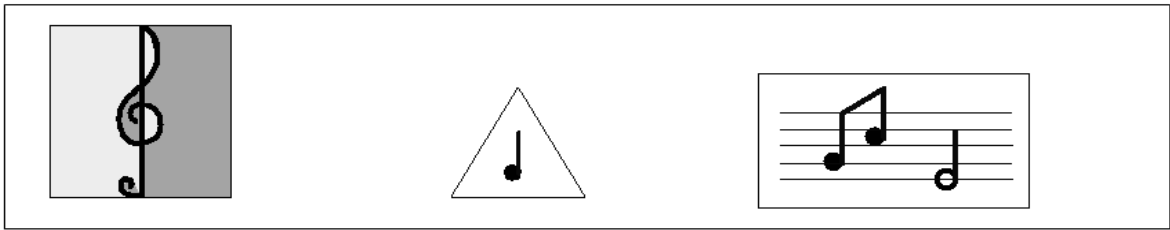
	SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	Rotação	4	Centro de rotação: _____ Medida de amplitude dos ângulos de rotação: _____
	Reflexão		Eixos de simetria: _____

Anexo D

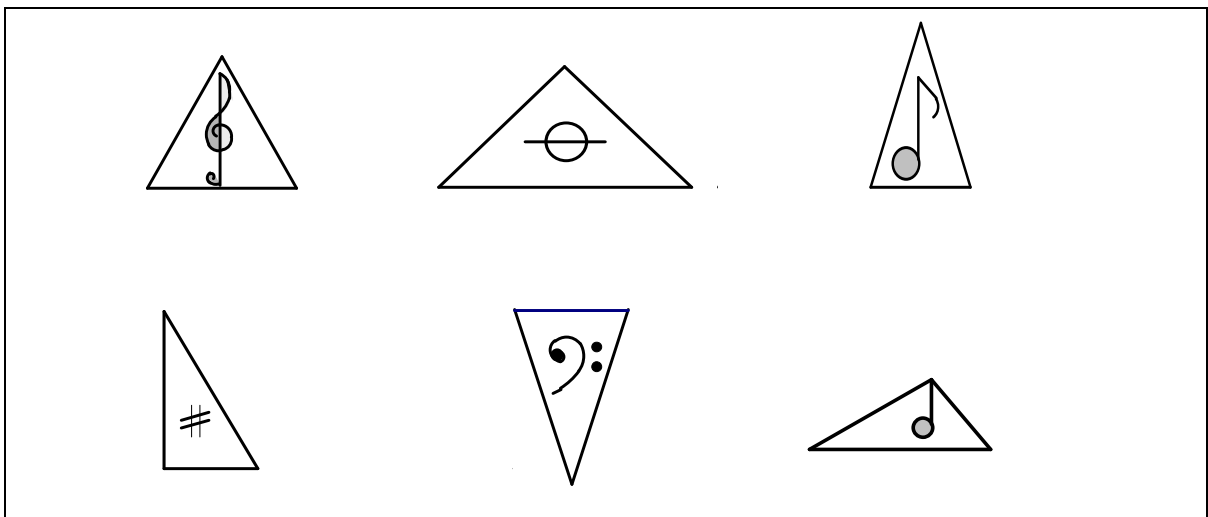
Material fornecido em acetato



Círculos fornecidas em acetato para a realização das tarefas



Figuras fornecidas em acetato para a realização das tarefas

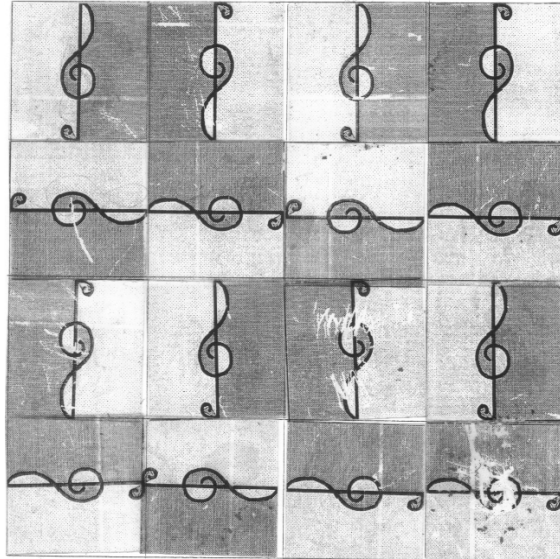


Figuras fornecidas em acetato para a realização das rosáceas

Anexo E

Par RD

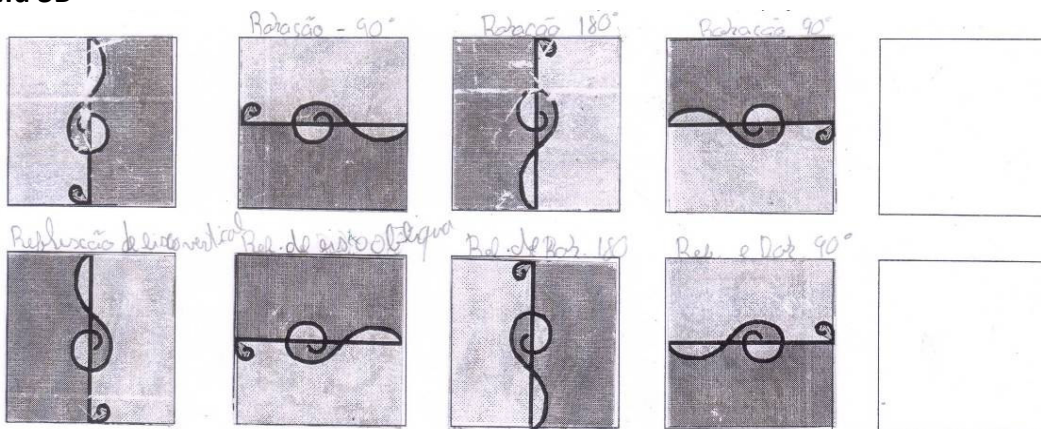
Tarefa 3A



Descreva as isometrias que usaste na construção da pavimentação.

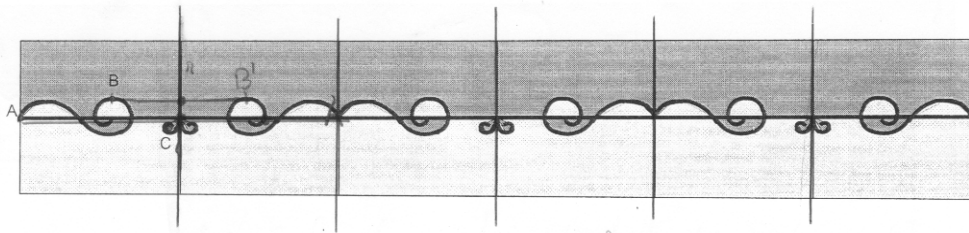
Na primeira fila usei uma rotação de 180° a partir da figura inicial.
 Na segunda fila ^{rodei} 90° no sentido dos ponteiros do relógio e fui na direita sempre 180° .
 Na terceira fila rodei 180° no sentido dos ponteiros do relógio e fui ^{180°} na direita sempre 180° .
 Na quarta fila rodei 270° no sentido dos ponteiros do relógio e fui rotacionando sempre 180° .

Tarefa 3B



Tarefa 4

(I) Como se terá obtido este friso?

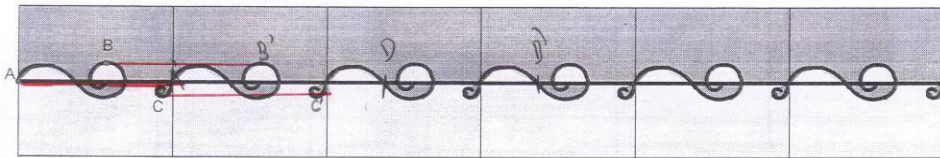


Este friso terá sido obtido a partir do lado direito da figura anterior ^{de uma reflexão}.

O que podes concluir?

Concluímos que este friso tem vários eixos de reflexão. A partir do ponto A, tem-se com a qualquer recta ou ponto, isto em todos os casos sempre assim paralelas ou perpendiculares!

(II) Como se terá obtido este friso?

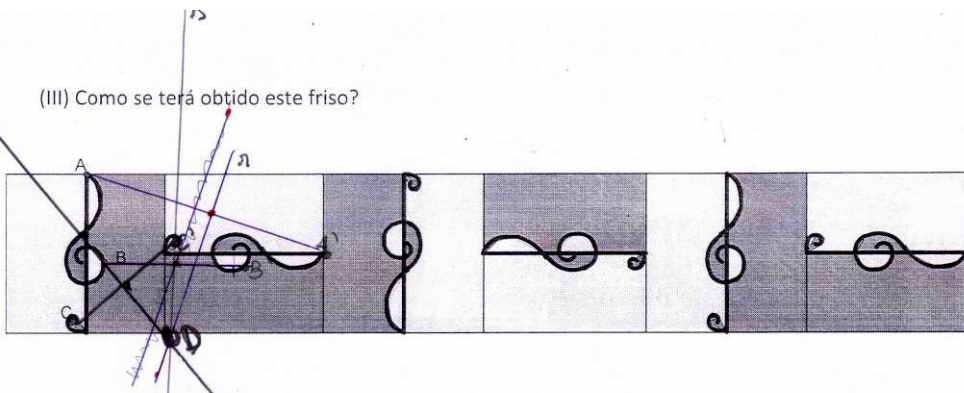


Este friso terá sido obtido através de uma translação de 3 cm.

O que podes concluir?

Pode concluir que os pontos B e B' assimetados no friso tem em todos os casos que tem 3 cm = a uma figura.

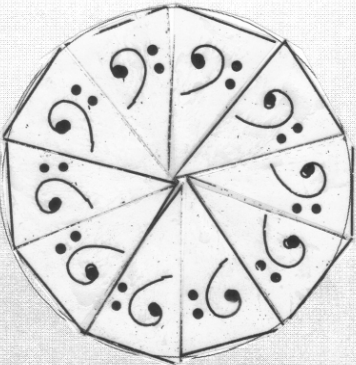
(III) Como se terá obtido este friso?



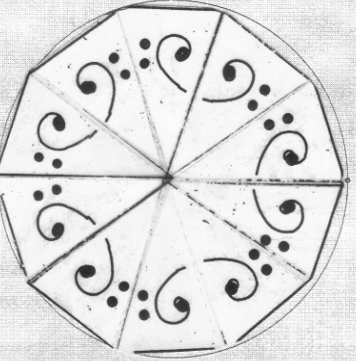
Este friso terá sido obtido através de rotação de 90° no sentido dos ponteiros do relógio a partir sempre da figura anterior.

Tarefa 6

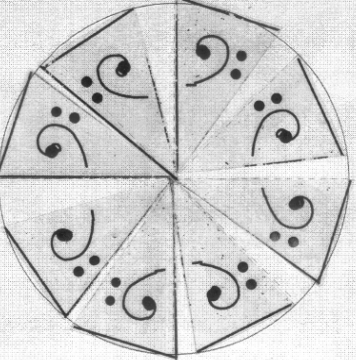
I) Apenas com simetrias de rotação.

SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	10	Centro de rotação: <u>Centro da circunferência</u> Medida de amplitude dos ângulos de rotação: <u>36° (360°:10)</u>

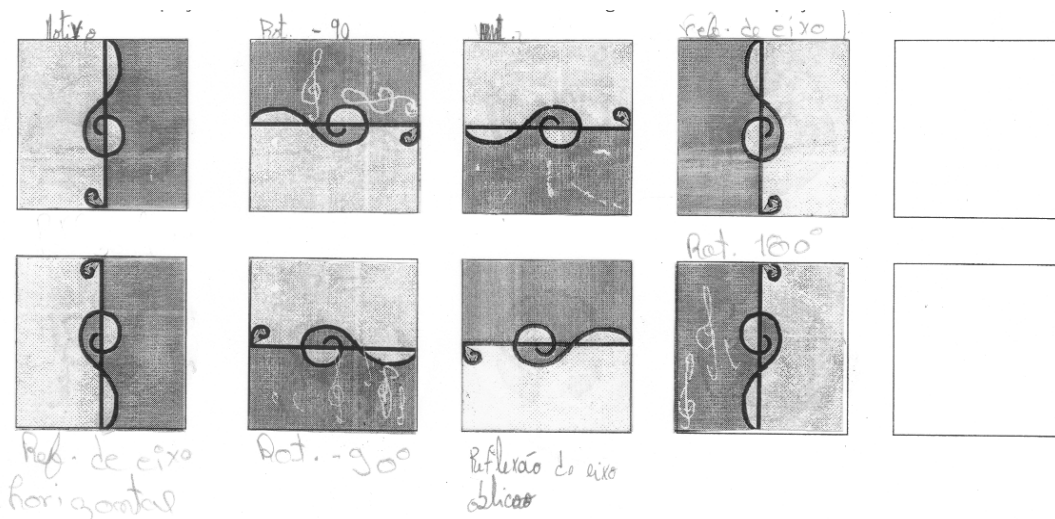
II) Com simetrias de rotação e de reflexão.

SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	5	Centro de rotação: <u>Centro da circunferência</u> Medida de amplitude dos ângulos de rotação: <u>72° (2x36°)</u>
Reflexão	5	Eixos de simetria: <u>5 eixos</u>

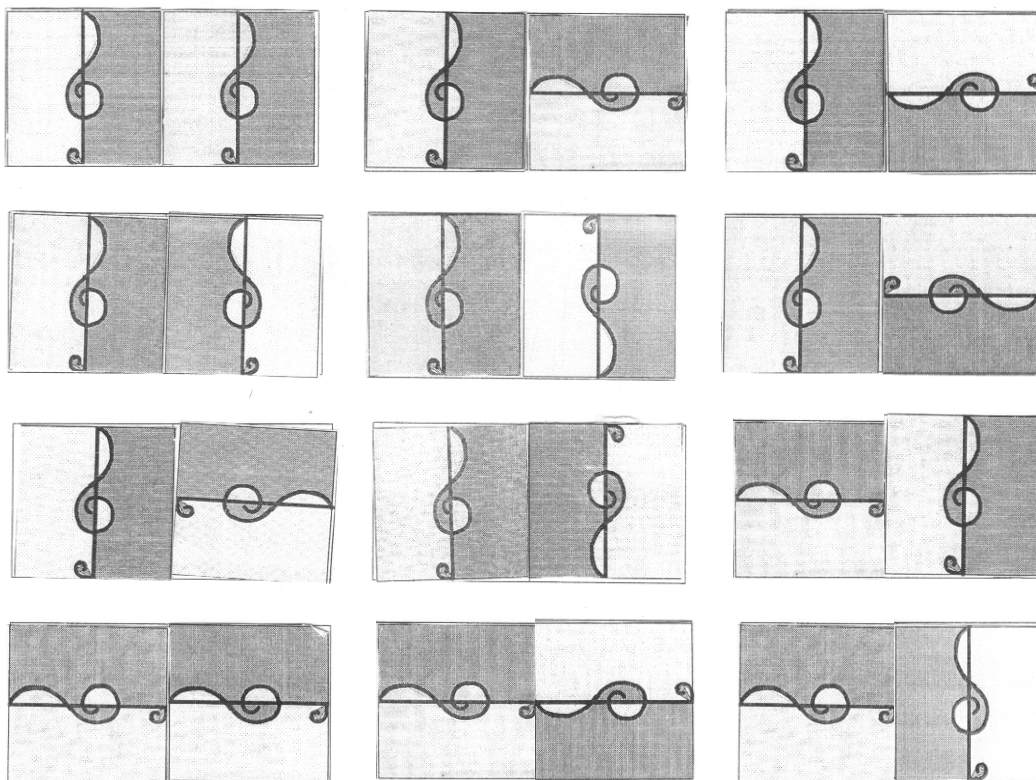
II) Com 4 simetrias de rotação.

SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
	4	Centro de rotação: <u>Centro da circunferência</u> Medida de amplitude dos ângulos de rotação: <u>90°</u>
Reflexão	4	Eixos de simetria: <u>4 eixos</u>

Tarefa 3B



Figuras descobertas para a construção das peças do dominó



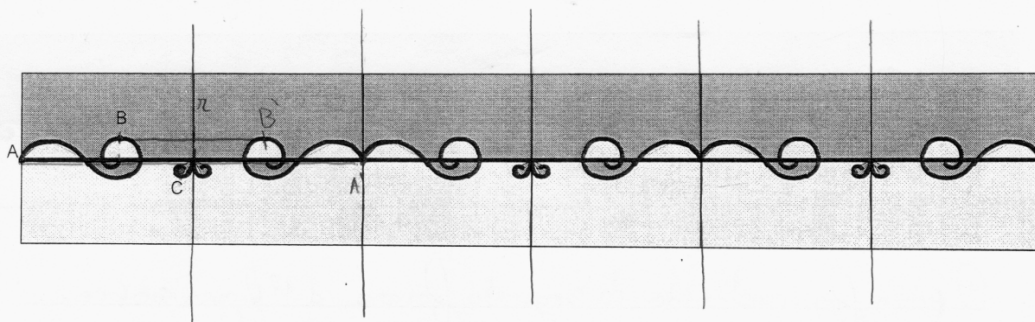
Colagem realizada pela Cláudia (primeiras 12 peças do dominó)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	X	X	X	X	X	X	X	X
B		X	X	X	X	X	X	X
C			X	X	X	X	X	X
D				X	X	X	X	X
E					X	X	X	X
F						X	X	X
G							X	X
H								X

Tabela construída pelo Jorge para descoberta do número de peças do dominó

Tarefa 4

(I) Como se terá obtido este friso?

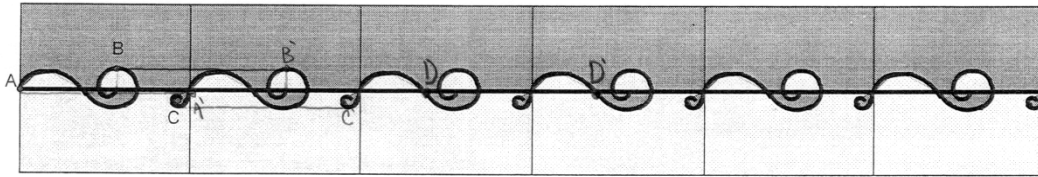


Este friso foi formado assim: a 1ª figura foi refletida formando a 2ª figura da 2ª refletiu para a 3ª figura (...).

O que podes concluir?

O que concluímos foi que os pontos com os eixos de reflexão davam a mesma ^{medida} que ao seu transformado como a reda.

(II) Como se terá obtido este friso?

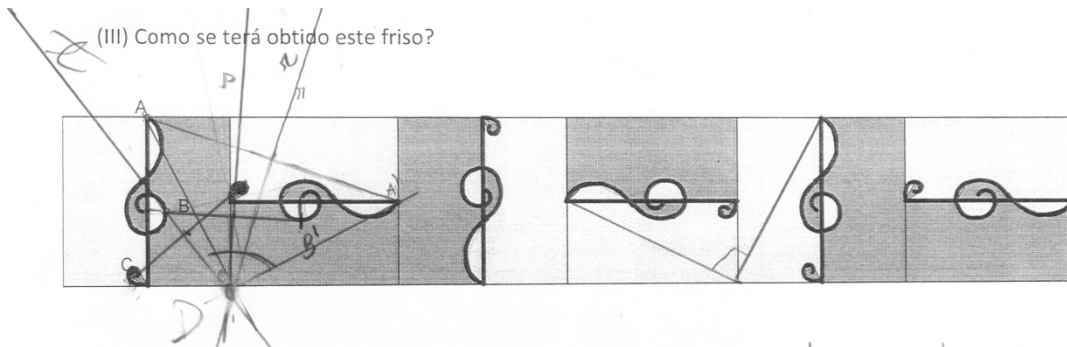


O friso foi construído da seguinte forma: a 1ª figura sofreu uma translação.

O que podemos concluir?

O que podemos concluir é seguinte: os pontos têm sempre a mesma medida dos seus transformados.

(III) Como se terá obtido este friso?



Este friso foi obtido por rotações de 90° no sentido das ponteiros do relógio.

Tarefa 6

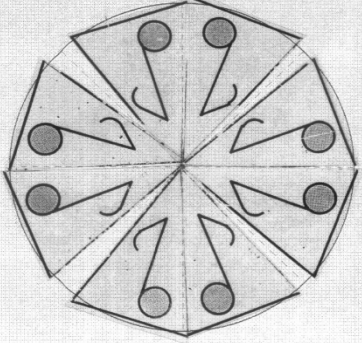
1) Apenas com simetrias de rotação.

SIMETRIAS	N.º	DESCRIÇÃO
Rotação	10	Centro de rotação: Centro da circunferência Semo a Medida de amplitude dos ângulos de rotação: 36°

II) Com simetrias de rotaçao e de reflexao.

SIMETRIAS	N.º	DESCRICAO
	Rotaçao	Centro de rotaçao: <u>centro da circunferencia</u> Medida de amplitude dos angulos de rotaçao: <u>120°</u>
	Reflexao	Eixos de simetria: <u>3 eixos</u>

II) Com 4 simetrias de rotaçao.

SIMETRIAS	N.º	DESCRICAO
	Rotaçao	Centro de rotaçao: <u>centro da fig.</u> Medida de amplitude dos angulos de rotaçao: <u>30°</u>
	Reflexao	Eixos de simetria: <u>4</u>