INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Joana Pereira da Silva

ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA
DE ALUNOS DO 5.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome do Curso de Mestrado
Didática da matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da
Doutora Lina Fonseca

Fevereiro de 2012

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Doutora Lina Fonseca, pelo incentivo, oportunidade de aprendizagem, apoio e pela sua inexcedível colaboração e disponibilidade.

À professora e aos alunos que prestimosamente colaboraram neste estudo.

À amiga Fátima Fernandes pelo seu apoio.

Aos meus pais, irmãos e cunhada pela compreensão e apoio.

Ao Jorge pelas palavras de encorajamento, pela ajuda e pelo silêncio…

RESUMO

A Geometria é um domínio que está intimamente ligado à realidade e, grande parte do pensamento pode ser concretizado experimentalmente. Nascimento (2008) defende que talvez a geometria seja um dos ramos da matemática mais intuitivo, concreto e ligado com a realidade, surgindo, por isso, como uma das áreas temática mais fáceis para os alunos exporem as suas ideias e apresentarem os seus argumentos. Apesar de ser uma área muito ligada à realidade também é nesta que se verifica menos sucesso na avaliação externa.

Gould (2003) considera que a argumentação contribui para o desenvolvimento compartilhado da compreensão Matemática. Assim, parece que a exploração da argumentação na sala de aula terá muito a contribuir para o desenvolvimento dos alunos ao nível do conhecimento matemático. Neste âmbito, pretendeu-se investigar – Argumentação matemática de alunos do 5.º ano de escolaridade. Para orientar o estudo formularam-se as seguintes questões: a) Que conceções manifestam alunos do 5.º ano de escolaridade sobre o conhecimento matemático? Essas conceções evoluíram ao longo do estudo?; b) Como se caracterizam os argumentos matemáticos de alunos do 5.º ano de escolaridade?; c) Como se caracterizam as dificuldades manifestadas por alunos do 5.º ano de escolaridade? Porque é que os alunos do 5.º ano apresentam dificuldades quando argumentam matematicamente? Como é possível ultrapassar algumas das dificuldades?

De acordo com o problema desenvolveu-se um estudo de natureza qualitativa que assumiu o desenho de estudo de caso. A recolha de dados foi feita em ambiente natural de uma turma do 5.º ano de escolaridade, nas disciplinas curriculares de Matemática e Estudo Acompanhado. A investigadora assumiu o papel de observadora participante. Para levar por diante este estudo, selecionaram-se dois casos – dois pares de alunos da turma. Estes foram observados na resolução de tarefas e, posteriormente, foram feitas entrevistas, a cada um dos pares envolvidos, para esclarecimento de raciocínios. Deste estudo surgiram como principais conclusões: que conceções iniciais sobre o que é a Matemática e o conhecimento matemático estavam alinhadas com as que os autores, Fonseca (2004), e Segurado e Ponte (1998) referiram; as conceções, relativamente à matemática e ao conhecimento matemático, parecem ter evoluído devido à aplicação de tarefas desafiadoras; os argumentos inicialmente apresentados pelos casos possuíam fragilidades, necessitando em todas as tarefas do apoio da professora ou da investigadora para refletirem e reformularem os seus argumentos e, na maioria dos casos precisaram do momento da entrevista para se tornarem mais explícitos e completos; as dificuldades apresentadas ao nível da argumentação talvez tenham ocorrido porque nos anos escolares anteriores não foi feito um trabalho de desenvolvimento ao nível da argumentação e os alunos não estavam habituados a esta dinâmica. Assim, é essencial propor nas aulas uma sequência de tarefas envolvendo a argumentação e esta opção deve ser prolongada no tempo, para que os alunos consigam progressivamente suportar a sua argumentação nas suas estruturas de conhecimento e nos argumentos dos outros.

Palavras-chave: Conhecimento matemático; argumentação; ensino-aprendizagem em geometria; conceções.

ABSTRACT

Geometry is a field that is closely connected to reality, and much of the field of thought can be done experimentally. Nascimento (2008) argues that geometry is the more intuitive, concrete and connected with reality branch of mathematics, appearing therefore as a subject easier for students to present their ideas and arguments. Despite being very connected to reality, it is also where is found less success in external evaluation.

Gould (2003) considers that the argumentation contributes to the development of a shared understanding of mathematics. Thus it appears that the exploitation of argumentation in the classroom will have much to contribute to the development of students at the level of mathematical knowledge. In this context, we decid to investigate - Maths argumentation by 5th grade students. To guide the study were formulated the following questions: a) What conceptions expressed 5th grade students on the mathematical knowledge? These views have evolved over the study? b) How are characterized the mathematical arguments of 5th grade students? c) How are characterized the difficulties experienced by 5th grade students? Why does 5th grade students have difficulties when they argue mathematically? How is it possible to overcome some of the difficulties?

According to the problem, it was developed a qualitative study whith design of case study. Data collection was done in the natural environment of a 5th grade classroom, in the curriculum subjects of Mathematics and Supported Study. The researcher assumed the role of a participant observer. To carry on this study were selected two cases - two pairs of students in the class. They were observed in solving tasks and they were interviewed, to clarify their reasoning. From this study emerged these main conclusions: that initial conceptions about what mathematics and mathematical knowledge were aligned with what the writers Fonseca (2004) and Segurado & Ponte (1998) reported; the concepts relating to mathematics and mathematician knowledge appear to have evolved due to the implementation of challenging tasks; the arguments originally presented by the cases had weaknesses and in all tasks required the support of the teacher or researcher to reflect on and reformulate their arguments and, in most cases, it was necessary the moment of interview to become more explicit and complete; the difficulties presented on argumentation may have occurred because in the previous school years work was not done at the level of argumentation and students do not use this dynamic. It is therefore essential to propose a sequence of classroom tasks involving reasoning and this option should be extended in time, in order for students to gain progressively more support for their argumentation in their knowledge structures and the arguments of others.

Keywords: mathematical knowledge, argumentationg, teaching and learning geometry; conceptions.

ÍNDICE

LISTA DE QUADROS E TABELA

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Problema e Questões de Estudo

Este estudo pretende Analisar a argumentação matemática de alunos do 5.º ano do de escolaridade. Para orientar o estudo foram formuladas as seguintes questões:

1. Que conceções manifestam alunos do 5.º ano de escolaridade sobre o conhecimento matemático? Essas conceções evoluíram ao longo do estudo?

2. Como se caracterizam os argumentos matemáticos de alunos do 5.º ano de escolaridade?

3. Como se caracterizam as dificuldades manifestadas por alunos do 5.º ano de escolaridade? Porque é que os alunos do 5.º ano apresentam dificuldades quando argumentam matematicamente? Como é possível ultrapassar algumas das dificuldades?

Pertinência do estudo

A Geometria é uma área que se revela importante para investigar, porque há alunos que mostram dificuldades, por exemplo na articulação entre propriedades e regularidades da geometria para expressões algébricas. Nos vários relatórios das provas de aferição do segundo ciclo, uma das áreas temáticas menos respondida é a Geometria. O relatório da prova de aferição de matemática de 2009 do Gabinete de Avaliação Educacional (ME – GAVE, 2009), da prova de aferição do 6.º ano descreve que a par da Álgebra e Funções a Geometria tem menos de cinquenta por cento de acertos. A dificuldade na área temática da Geometria aliada ao grau da dificuldade de argumentação matemática e na área transversal de resolução de problemas faz surgir problemas mais profundos. O relatório da prova de aferição de matemática de 2009 (ME – GAVE) descreve ainda que "em Geometria os alunos apresentam melhor desempenho nos itens de conceitos e procedimentos do que nos itens de resolução de problemas." (p. 13). Para ajudar a superar as dificuldades diagnosticadas é necessário incentivar os alunos para que argumentem e que, em simultâneo, trabalhem o espírito crítico, com o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático. Segundo o Programa do Ensino Básico de matemática – Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (programa de matemática) (ME – DGIDC, 2007),

> para que os alunos tenham um raciocínio matemático necessitam de construir cadeias argumentativas. Devem iniciar pela justificação de passos e operações na resolução de tarefas e possibilitar-lhes que progridam para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem da Geometria. (p. 8).

No Programa de matemática (2007), em Geometria, a investigação e dedução das fórmulas das áreas e dos volumes de figuras geométricas planas e sólidos geométricos constitui um meio que permite desenvolver o pensamento algébrico. Com a investigação deseja-se que os alunos ao trabalharem a área da geometria desenvolvam o raciocínio matemático e, em simultâneo, se faça a preparação para o desenvolvimento do pensamento algébrico, através da generalização.

Segundo as Metas de Aprendizagem (ME – DGIDC, 2010) no final do segundo ciclo, o aluno deve justificar e argumentar afirmações matemáticas, formular e testar conjeturas e exprimir e discutir ideias matemáticas. No entanto, as duas últimas metas referidas, o aluno deve, no final do primeiro ciclo, as ter atingido. No que concerne à argumentação, os Princípios e Normas para a matemática Escolar (Normas) (NCTM – APM, 2007), referem que os programas de ensino, desde o pré-escolar até ao décimo segundo ano, deverão habilitar todos os alunos a "desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas" (p. 310), por isso os alunos devem com relativa frequência "discutir o seu raciocínio com o professor e os colegas, explicando em que se basearam para formular as suas conjeturas e a lógica das suas afirmações matemáticas." (p. 310). Deste modo os alunos tornar-se-ão "mais competentes na utilização adequada do raciocínio indutivo e dedutivo" (p. 310). Assim, neste estudo decidiu-se juntar a geometria com a argumentação no sentido de obter mais conhecimentos sobre estas duas áreas.

Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. Para além deste capítulo, são apresentados outros quatro que abordam os seguintes pontos. No segundo capítulo é apresentada a revisão de literatura relativa aos seguintes temas: conhecimento matemático, conceções dos alunos sobre a matemática, o ensino aprendizagem da geometria e a argumentação matemática. No terceiro capítulo encontram-se as opções metodológicas, instrumentos para recolha de dados e calendarização da investigação. No capítulo seguinte tem-se a resolução das tarefas e a análise dos dados recolhidos. No último capítulo são apresentadas limitações do estudo e resposta às questões, recomendações para futuras investigações e, por fim, as considerações finais.

CAPÍTULO II – REVISÃO DE LITERATURA

Conhecimento Matemático

Nas Normas (2007) é apresentado como princípio da matemática que "todos os alunos devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender matemática" (p. 5) e essa aprendizagem deve ocorrer com compreensão. É também sugerido que os alunos construam o conhecimento a partir de uma vasta gama de temas. O que pode ser implementado ao abordar um problema sob diferentes perspetivas. Thompson (1992) refere que o conhecimento matemático é considerado por muitos investigadores educacionais como sendo equivalente "ser hábil na realização de procedimentos e ser capaz de identificar os conceitos básicos da disciplina" (p. 127). Enquanto que Neto (2009) considera-o como a descoberta das relações preexistentes que ligam os objetos matemáticos (conceitos, proposições, teorias, …).

O Programa de matemática (2007) defende a necessidade de levar os alunos a descobrir o conhecimento matemático, pelo que será necessário confrontar os alunos com a resolução de tarefas, incluindo problemas e investigações. Ou seja, tal como nas Normas (2007), é entendido que uma diversidade de tarefas com graus diversificados de abertura e complexidade com o objetivo de facilitar e, de certo modo, possibilitar, a exploração de diversos temas devem ser propostas aos alunos. Para desenvolver esse conhecimento Bravo (2005), referindo Abrantes e colaboradores (1996), apresenta como fatores que permitem o desenvolvimento do conhecimento matemático, a exploração, a procura de generalizações, a descoberta de conjeturas e o raciocínio lógico.

Godino, Batanero e Font (2004a) distinguem o conhecimento matemático do das outras disciplinas científicas pelo "seu enorme poder como instrumento de comunicação, conciso e sem ambiguidades" (p. 28). Este poder não se resume à utilização de notação simbólica, "na realidade, sem as notações simbólicas podem chegar a desempenhar efetivamente estes papéis (representar, explicar e voltar a dizer, situações e resultados) é devido à própria natureza do conhecimento matemático que está na sua base e ao que serve de suporte" (p. 28).

Assim, com base nos autores já referidos, quando um aluno procura aperfeiçoar opiniões por especulação, crítica, argumentação, lógica das provas e refutações, ou é confrontado com uma dada situação estará a desenvolver o seu conhecimento. Este conhecimento não é apenas desenvolvido ou adquirido através da transmissão do professor ou do espaço dialético da ação que este possa facultar, mas também pode ser construído pelos próprios alunos.

Furinghetti e Paola (2002) sugerem como meios promotores da construção do conhecimento matemático: o nível de exploração dentro de casos particulares, observação de regularidades, produção de conjeturas, validação das conjeturas dentro de teorias (construídas ou em construção). Com esta abordagem pretendem a transição para um pensamento matemático considerado superior. Neste sentido, o Programa de matemática do Ensino Básico (2007) sugere que o ensino aprendizagem para além das tarefas preveja momentos para, "Ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem da matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem" (p. 9), por se considerar que os alunos nestes momentos estão a construir e a desenvolver o seu conhecimento matemático. Haylock, referido por Furinghetti e Paola (2002), salientam a importância de apresentar problemas abertos porque os consideram promotores da responsabilização dos alunos perante a apresentação da resolução, do pensamento divergente dentro da situação matemática (fluência e flexibilidade), da criatividade e de ultrapassar, possivelmente, a ficção quanto à capacidade na resolução de problemas matemáticos (p. 2-399). Esta perspetiva é apoiada e evidenciada pelas Normas (2007) quando é referido que os alunos exploram os seus conhecimentos para chegar a uma solução de um problema, a uma argumentação "desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos" (p. 57). A importância da construção do conhecimento matemático é considerado por Godino, Batanero e Font (2004a) como inseparável da atividade concreta sobre os objetos, da intuição e das aproximações indutivas ativadas pela realização de tarefas e da resolução de problemas particulares. Assim, estes autores parecem ir de encontro ao defendido por Furinghetti e Paola (2002) sugerindo as tarefas e a resolução de problemas como sendo capazes de levar os alunos à construção do seu próprio conhecimento matemático ao referirem que a "experiência e compreensão das noções, propriedades e relações matemáticas a partir das atividades reais é, ao mesmo tempo, um passo prévio à formalização e à condição necessária para interpretar e utilizar corretamente todas as possibilidades que encerra na formalização." (p. 27).

As Normas (2007) apresentaram o professor como facilitador de comunicação do conhecimento matemático do aluno, pelo facto de lhe caber dar a oportunidade de apresentar diferentes tarefas e encorajar os alunos para analisarem e refletirem sobre o seu trabalho. Quando se refere a construção do conhecimento matemático não quer dizer que seja a sua descoberta, mas pode ser a redescoberta, como defendem Godino, Batanero e Font (2004a). Desse modo o professor está a fazer com que o aluno personalize o conhecimento. O papel que o professor tem, é fundamental, na interação dos próprios alunos para a aprendizagem "devido ao conhecimento matemático ter uma componente discursiva (baseado nas regras e argumentos) e não só na componente prática (baseado em problemas e ações)" (p. 69).

Thompson (1992) considera que uma das características do conhecimento matemático é o "julgamento de validade" (p. 130) e "dos critérios que envolvem cânones de evidência" (p. 130). Na mesma perspetiva Gomes e Ralha (2005) consideraram que na construção do conhecimento matemático os processos para validar são peças estruturantes da matemática. As autoras também derem relevância aos conceitos matemáticos que desempenham um papel crucial na construção desse conhecimento.

Na sala de aula há beneficios em utilizar as respostas dos alunos de forma organizada. Deste modo levam-se os alunos a organizar as suas ideias, a não esperarem que o professor transmita o conhecimento matemático, a tomarem conhecimento do raciocínio dos colegas, a argumentarem de forma coerente com a sua forma de resolução e a consciencializarem-se que não existe apenas uma forma de resolução para cada tarefa.

Como é referido nas Normas "as ideias dos alunos devem ser valorizadas e servir de fonte de aprendizagem" (p. 169). Deste modo, a exposição, exploração e posterior verificação das ideias dos alunos, além de lhes permitir o desenvolvimento ou construção do conhecimento, também permitirão o desenvolvimento do raciocínio.

Godino, Batanero e Font (2004a) consideram como componentes fundamentais para o conhecimento matemático, "o raciocínio matemático e a demonstração" (p. 40). Para que as crianças adquiram ou alterem os seus conhecimentos, como Abrantes e colaboradores referidos por Bravo (2005), devem ser confrontada com determinada situação. A ação da criança vai alterar a situação e em contrapartida receberá sensações. Se foi bem sucedida, a representação que tinha da situação que lhe permitiu atuar sobre ela, será reforçada. Pelo contrário, se fracassou, tende a modificar o modo de atuação. Uma sucessão destas interações é que vai permitir que a criança construa representação da situação que constituirá a dialética da ação. Podendo-se concluir que a criança se for confrontada com atividades que lhe permitam o desenvolvimento e/ou a construção do conhecimento matemático desde a educação de infância ela construirá a sua dialética de ação desde cedo, sendo muito mais fácil a sua evolução e o desenvolvimento de aspetos relativos à competência matemática.

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) o conhecimento memorizado de termos e de factos não contribui para a compreensão do que é a matemática e não é esse tipo de conhecimento que é fundamental para o desenvolvimento de capacidades ligadas ao raciocínio e à resolução de problemas. No entanto, são considerados como relevantes quando são “integrados num conjunto mais amplo e significativo de competências e se a sua aquisição progressiva for enquadrada por uma perspetiva que valorize o desenvolvimento de capacidades de pensamento e de atitudes positivas face à matemática e à aprendizagem” (p. 22). Os autores consideram que a relevância dada ao raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade da criança pode permitir que esta se torne matematicamente mais competente. No entanto, “Não se imagina o seu desenvolvimento sem o conhecimento e a compreensão de noções matemáticas fundamentais e a aquisição progressiva de capacidades ligadas, por exemplo, ao sentido do número ou à visualização espacial” (p. 33).

O conhecimento matemático pode ser adquirido pelo aluno através da transmissão do professor, se assim, conseguir alterar a sua dialética de ação, ou pela ação do próprio aluno sobre algo. Apesar de como Abrantes e colaboradores (1999) referem que o conhecimento memorizado não contribui nem para a compreensão nem para o desenvolvimento de capacidades relacionadas ao raciocínio e à resolução de problemas, tal, não deixa de ser um tipo de conhecimento matemático e como Godino, Batanero e Font (2004b) referem, este tem uma componente discursiva que se baseia nas regras e argumentos e não é só baseado na componente prático (p. 69).

Conceções relativamente à matemática

Definição de conceção.

Para explicitar o sentido que se pode atribuir à palavra conceção serão apresentadas opiniões de alguns autores, seguindo-se a apresentação do sentido que será atribuído neste trabalho.

Várias investigações abordam a possível interferência das conceções de modo significativo nas perceções e decisões do professor, no modo como essas afetam a aprendizagem dos alunos e como as conceções dos próprios alunos os podem afetar ao nível do ensino e aprendizagem da matemática.

Vale (1993) suportada em Thompson considerou conceções como sendo estruturas mentais que incluem as crenças e todo o conhecimento adquirido por experiência (conceitos, preposições, significados…). Guimarães (1988) referindo Munby apresenta algumas expressões, como, “crenças e princípios”, “Pontos de Vista”, “modo de perceber o mundo”, “convicções pessoais” (p. 19). Segurado e Ponte (1998), referindo-se a Ponte, parece que atribuem o significado das expressões de Munby mas de modo mais interligado “[conceções] podem ser entendidas como um substrato conceptual que desempenha um papel fundamental em todo o pensamento e ação, fornecendo meios de ver o mundo e de organizar os conceitos.” (p. 8). Guimarães (1988) no seu trabalho entendeu que devia definir conceção numa perspetiva do ensino e do professor, considerando como sendo

> um esquema teórico mais ou menos consciente, mais ou menos explicito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia na sua ação, em relação a isso. (p. 20).

Thompson (1992) quando se está a referir a conceções na perspetiva do professor de matemática, considera que as crenças (beliefs) conscientes e inconscientes e qualquer tipo de conhecimento adquirido (conceitos, pensamentos/ideias, regras, imagens…) estão incluídos nas estruturas mentais. Segundo Roth e Thom (2008) a origem das conceções surge da experiência de vida de cada indivíduo. A definição apresentada no dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea (2001) vai de encontro às anteriormente apresentadas. Considerando conceção como sendo

> 2.Operação mental que conduz à elaboração de conceitos; ato de criar mentalmente, de formar ideias. 3. conjunto de ideias abstratas ou conceitos logicamente organizados formando como que um sistema; resultado da ação de conceber. (…) 4. Maneira de conceber ou formular uma ideia original, um projeto, um plano, para posterior realização. (…) 6. Modo particular de pensar; modo de ver, ponto de vista. (p. 901).

A definição de Thompson (1992) sobre conceções refere que esta inclui as crenças. Por crenças será entendido como Tarmizi e Tarmizi (2009) referiram “são princípios pessoais, construídos a partir da experiência que uma pessoa emprega, muitas vezes inconscientemente para interpretar novas experiências e informações e para guiar a ação.” (p. 4702).

Mina (2003), Schoenfeld (1992) referindo Lampert, e Fang’s referido por English (2004), consideram que as conceções sobre a matemática são construídas ao longo dos anos a partir da relação entre crenças, conhecimento e prática (ao ver, ao ouvir e ao praticar).

Neste trabalho será considerado conceções matemáticas, segundo Thompson (1992), Ponte (1992) referido por Segurado e Ponte (1998), como sendo estruturas mentais (crenças e conhecimento adquirido) que desempenham um papel fundamental no pensamento e ação, dando instrumentos para organizar os conceitos e um modo de ver o mundo, formando um modo particular de pensar – um ponto de vista.

As conceções serão o substrato para as aprendizagens do aluno. Os alunos têm uma ideia ou algo concebido na mente sobre a matemática e desse modo vai alterar a forma com que estes enfrentam as atividades propostas na sala de aula. Segurado e Ponte *(*1998) consideram que podem mesmo determinar o modo como o aluno “decide abordar um problema, que técnicas usará ou evitará, quanto tempo e esforço dedicará ao problema, etc.” (p. 8). Um conjunto de conceções encadeadas entre si forma a perceção do aluno perante a matemática e daí gerará “a perspetiva com a qual a pessoa aborda a matemática e as tarefas matemáticas” (p. 8).

Conceções dos professores relativamente à matemática.

Hersh (1986) citado por Golafshani (2002) e por Thompson (1992) defendem que a forma para apresentar a matemática será "a indicação do que se acredita ser mais essencial dentro dela... ". O primeiro investigador considerou que esta mensagem era compatível com a sua prática, por concordar que a conceção sobre como deverá ser apresentada a matemática influencia a própria conceção da matemática. À imagem do que sucede aos alunos, Guimarães (1988), como foi referido anteriormente, salienta que o modo como a matemática é vista pelo professor permite-lhe "interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia na sua ação..." (p. 20).

Segundo Roth e Thom (2008) das experiências de cada indivíduo aquelas que estão relacionadas com determinado assunto condicionarão a formação das conceções pessoais sobre aquele. Roth e Thom (2008) explicitam

> quando as conexões entre as diferentes experiências corporais são altas, qualquer experiência única pode ter uma forte influência sobre todas as outras experiências de acordo com o mesmo objeto conceptual e, portanto, pode ativar a rede conceptual como um todo. Ligações mais fortes entre nós (experiências) que pertencem a uma mesma entidade significa que a conceção é percebida mais facilmente e rapidamente do que quando as ligações são mais ténues. (p. 187).

Hersh (1986) citado por Thompson (1992, p. 127) e por Golafshani (2002, p. 9) considera-a como uma das questões fundamentais, "O que é realmente a matemática?". Levantar esta questão é muito importante porque conduz à reflexão dos professores, permitindo alterar a exploração, a relevância e a forma como aborda os temas. Cooney (1994) referido por Golafshani (2002) afirmou que para os professores as "crenças matemáticas sobre matemática, ensino de matemática e aprendizagem têm mostrado uma influência decisiva do que acontece na sala de aula." (p. 9).

Segundo Thompson (1992) fundamentada em matemáticos e filósofos da matemática, refere que para eles a matemática é uma atividade mental, sujeita a mudanças porque envolve conjeturas, provas e refutações, e como é uma construção social também está submetida à validação social.

Thompson (1992), Fonseca (1995) e Moreira (2004) apresentam Ernest (1988, 1989) por este distinguir três conceções acerca da natureza da matemática: o instrumentalismo, o platonismo e a visão dinâmica da matemática. A primeira trata-se de uma conceção que dá maior relevância aos resultados. Por conseguinte, o conhecimento matemático provem de uma acumulação de factos, regras e capacidades não relacionados e a função do aluno será utilizar as ferramentas para as quais foi treinado. Ao professor cabe expor os conteúdos para a turma, para que os alunos, através da repetição, consigam reproduzir o procedimento e resolver os exercícios ou problemas. A segunda, considera que a matemática está totalmente descoberta, sendo estática, imutável e unificada mas os conhecimentos são interligados. O professor deve explicar e transmitir conhecimentos, o aluno aprende pela receção destes e espera-se que ele construa "um corpo de conhecimentos significativos" (Fonseca, 1995, p. 11). A última encara a matemática como uma estrutura organizada, cujos resultados podem ser permanentemente revistos, onde se inclui a perspetiva da resolução de problemas. Espera-se que o professor seja um facilitador da aprendizagem, e como tal que aceite os métodos e as abordagens dos alunos na resolução das tarefas.

> Se acreditarmos que a matemática é resolver problemas, achamos que devemos ensinar as aplicações. Se acreditarmos que a segurança vem em matemática da lógica, pensamos que devemos ensinar o pensamento dedutivo (Umland & Hersh, 2006, p. 1).

Godino, Batanero e Font (2004a) questionaram um grupo de professores sobre as suas conceções face à matemática. Num dos seus inquéritos apresenta questões que levam os professores a refletir sobre as diferentes formas de pensar sobre a matemática, o conhecimento matemático e a capacidade matemática. Deste inquérito os investigadores concluíram que "para fazer matemática as conceções sobre a natureza das matemáticas são um fator que condiciona a atuação dos professores na turma (…)" (p. 19).

Fonseca (2004), Cooney e Hersh citado por Golafshani (2002), Golafshani (2002) e Moreira (2004), concordam que as conceções e/ou crenças matemáticas têm uma forte interferência no ensino da matemática. Fonseca (2004) refere que "as práticas dos professores são fortemente influenciadas quer pelas suas conceções (…) quer pelas filosofias pessoais (…)". (p. 125). Moreira (2004) constata que cada vez existe mais consenso entre os investigadores de educação, concordando que existe uma forte necessidade de conhecer as crenças e conceções dos professores porque além de influenciarem fortemente as suas decisões também influenciam as ações e a forma de estar no ensino. Remetendo para a sala de aula Golafshani (2002) partilha da ideia de Cooney e Hersh quando estes se referem às conceções e considera que têm mostrado uma influência decisiva no que acontece na sala de aula.

Ernest (1988) descreve uma série de condicionantes existentes para ocorrerem mudanças na forma e prática de ensino. Enunciando o enraizamento das crenças dos professores; o sistema de crenças e conceções; o contexto social; os processos de pensamento e de reflexão. O primeiro elemento enunciado surge quando há professores que têm conceções fortemente enraizadas contra a necessidade de aceitar as reformas de ensino. A sua tendência é para ser resistente à reforma. O segundo elemento emana, em parte, do primeiro, os esquemas mentais e o sistema de conceções que cada professor tem acerca da matemática, do conhecimento matemático, do ensino e da aprendizagem da matemática vão influenciar notoriamente a sua prestação. Em terceiro lugar, é enunciado o contexto social, por influir no sistema de ensino, nomeadamente, os constrangimentos e oportunidades que ele proporciona. Em último surgem os processos de pensamento e a reflexão do professor, para permitir a evolução, o desenvolvimento e o aperfeiçoamento como profissional.

Thompson (1992) não partilha da ideia de que o que o professor acredita influencia diretamente a sua prática. Da sua pesquisa constatou que a relação entre crenças e práticas é uma dialética forte mas "não uma simples relação de causa-efeito" (p. 140). Se o professor achar que a resolução de problemas e que as atividades mais abertas são apenas para os alunos "bons a matemática" estamos a limitar a aprendizagem dos outros alunos. As conceções sobre o mesmo tema quando articuladas entre si formam um sistema de conceções sobre o qual o professor acredita e age com base nele. Segundo Mina (2003) a influência do professor pode surgir até quando dá a resposta a um aluno ou quando está a orientar uma tarefa. As "decisões realizadas sobre o que significa, na explicação matemática" e "o que se torna como resposta aceite é igualmente limitada pelas crenças inferidas […] participando de um contexto social regulamentado por normas" (p. 6). Assim, o professor quando não corrobora com posição defendida por Godino, Batanero e Font (2004b) em que acreditam que a matemática para todos e que "Todos os alunos podem aprender a pensar matematicamente", mesmo que "fazer conjeturas ou argumentar sobre as matemáticas" (…) "formular e resolver problemas pareçam complexos, não estão destinadas só para os alunos "brilhantes" ou "capazes matematicamente" (p. 78) poderá estar a limitar a aprendizagem dos alunos. Por tal Segurado e Ponte (1998), baseados nas suas investigações, acreditam no trabalho investigativo (tendo por base um trabalho prévio ao nível das possíveis dificuldades) como uma forma de trabalho que esteja ao alcance da maioria dos alunos e dos vários anos escolares. No entanto, referem como obstáculos importantes ao seu sucesso as conceções e as crenças quer dos alunos quer dos professores e até mesmo os "fatores associados ao contexto escolar e ao sistema educativo" (P. 5).

Spangler referida em Segurado e Ponte (1998) considera que o professor liberta o aluno se acreditar num método de trabalho mais ativo para ele, envolvendo-o diretamente na sua aprendizagem. Sugerindo que as "questões de resposta aberta é um meio de trazer estas conceções a um nível consciente" (p. 7) sendo mais fácil, através da discussão em grande grupo reformular. Assim, como refere Garofalo em Segurado e Ponte (1998) é importante potenciar atividades diversificadas para "refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos"

(p. 8), potenciando assim a reformulação das conceções dos alunos relativamente à matemática. As Normas (2007) aconselham que o professor deve proporcionar aos alunos "oportunidade de demonstrar clara e completamente aquilo que sabem e são capazes de fazer" (p. 25). Para tal deverá utilizar questões de resposta aberta, tarefas de resposta curta, itens de escolha múltipla, tarefas de desempenho, observação, conversas, ensaios e portefólios.

Segundo Segurado e Ponte (1998) um dos pontos importantes é "que seja dada oportunidade aos alunos de refletirem nas suas experiências." (p. 11) e como considera Spangler referida em Segurado e Ponte (1998), "de saber como usar este ciclo de influência para reforçar atitudes positivas nos alunos face à matemática." (p. 11). Todos estes trabalhos referidos fluem num só sentido "As aulas de matemática tradicionais, onde é ensinado um processo, através de um conjunto de exemplos e exercícios de prática, devem dar lugar a outras onde os alunos desenvolvam conceções mais corretas acerca desta disciplina" (p. 11). O aluno passando a ser visto como o centro do processo ensino-aprendizagem fará mais sentido que o ensino da matemática deva "dar ênfase a atividades que encorajem os alunos a explorar tópicos; desenvolver e refinar as suas próprias ideias." (p. 11). Segurado e Ponte (1998) citando Garofalo referem que dos professores espera-se que possibilitam e permitam diferentes "estratégias e métodos; e refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos." (p. 12).

Conceções dos alunos relativamente à matemática.

Se as conceções influenciam o desempenho ao nível do ensino dos professores também as dos alunos irão influenciar. Garofalo apresentado por Segurado e Ponte (1998) justifica que "a importância das conceções reside no facto de elas influenciarem a forma como os alunos pensam e abordam e resolvem as tarefas matemáticas, como estudam e como participam nas aulas." (p. 5,6).

Tarmizi e Tarmizi (2009) observaram que os alunos constroem as suas conceções e crenças com base noutras "construções relacionadas, tais como, a cultura escolar, e as emoções pessoais." (p. 4702).

Segurado e Ponte (1998) apresentam Winograd e Schoenfeld como autores que consideram que o desempenho dos alunos nas tarefas depende mais das suas conceções do que da "aprendizagem de conceitos, processos e estratégias" (p. 6). Schoenfeld é citado por ter apresentado três das ações cognitivas que resultam, em grande parte, das conceções, sendo elas: "(a) tarefa em mão, (b) ambiente social dentro do qual a tarefa tem lugar, (c) a autopercepção individual da resolução da tarefa e a relação entre esta e o ambiente." (p. 6).

Algumas das conceções dos alunos e da comunidade envolvente sobre o que é a matemática, (Fonseca (2004), referindo Schoenfeld (1985, 1988) e Segurado e Ponte (1998)) são: a matemática é só cálculo; os problemas de matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos segundos; em matemática, o objetivo é obter respostas certas; o papel do aluno é receber conhecimentos de matemática e demonstrar que os adquiriu; o papel do professor é transmitir conhecimentos de matemática e verificar que os alunos os adquiriram; apenas os génios podem ser capazes de descobrir, criar ou compreender matemática; a matemática aceite-se e estuda-se passivamente, o aluno recebe as informações do professor e reprodu-las; o aluno é consumidor passivo da matemática acabada que outros apresentam; não é necessário compreender, basta que se consiga reproduzir a técnica modelada na sala de aula, o que contribui para que os alunos tomem o pensamento matemático como memorização rotineira de factos e procedimentos; quando se compreende um assunto, os problemas podem resolver-se rapidamente, o que contribui para que os alunos deixem de trabalhar num problema se, passado pouco tempo (+/- 10 min.) não o tiverem resolvido ou começarem a ficar ansiosos. Assim, o professor deve ter um alargado conhecimento das conceções para identificá-las nos alunos e, caso não seja o verdadeiro sentido da matemática e do conhecimento matemático permitir conduzi-los de forma a modificar as suas conceções.

> Há uma suposição de que as crenças positivas matemática, atitudes e sentimentos que levam ao aumento da realização matemática e enquanto isso parece ser uma proposta razoável, não garante uma investigação mais aprofundada. No entanto, a relação entre fatores afetivos e de aprendizagem em matemática não é simples, linear e unidirecional, sim, é complexa e intrincada. (Tarmizi & Tarmizi, 2009, p. 4702).

Suthar e Tarmizi (2010) verificaram que existe uma forte probabilidade para as conceções matemáticas existentes sejam diferentes entre os alunos com melhores resultados e os que têm piores resultados. Mostraram que os alunos com melhores resultados cada vez querem “mais matemática” contrariamente aos que apresentam classificações inferiores. Assim, parece que estes autores concordam com os anteriormente referidos quanto à relevância do conhecimento das conceções na influência do conhecimento matemático. As conceções "do aluno sobre a matemática são prioridade para o conhecimento e compreensão.” (p. 150). O que justifica a relevância dada à crença sobre a natureza da matemática e aos fatores associados à aprendizagem por Tarmizi e Tarmizi (2009) e pelos investigadores de educação matemática quando querem abordar o processo de aprendizagem da matemática, fazendo acreditar que são dois pontos fundamentais a abordar para quem quer estudar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos em matemática, em qualquer área. Assim, se eles creem que as suas capacidades matemáticas são altas e positivas eles vão ter uma atitude mais positiva perante a aprendizagem da matemática. O ambiente social e escolar que me rodeia parece ir na perspetiva dos autores anteriormente referidos assim como de Schoenfeld citado por Mina (2003), "as crenças moldam os comportamentos dos alunos tendo consequentemente um poder extraordinário (e muitas vezes negativo)" (p. 1).

As conceções sociais repercutem-se ao nível das ações sociais e consequentemente ao nível da natureza da matemática. Mina (2003) cita Raymond defendendo que os alunos criam conceções sobre a matemática porque o "juízo pessoal sobre a matemática é formulado a partir de experiências na escola" (p. 4). Além das conceções criadas numa base social também existem aquelas que "surgiram com base nas experiências escolares ao nível da matemática que cada um viveu, professores e alunos." (p. 4).

Resumindo, a forma como o aluno encarar uma qualquer tarefa matemática vai depender fortemente das suas conceções. Deste modo é de extrema relevância o professor ter conhecimento e consciencializar-se que os alunos têm conceções acerca da matemática e do conhecimento matemático já que, como já foi referido, as conceções influenciam o processo ensino-aprendizagem. O professor deverá agir como Spangler (1992), referido por Segurado e Ponte (1998), sugeriu. Ou seja, tendo conhecimento que consiga avaliar as conceções dos seus alunos acerca da matemática para poder "ajudar a planear aulas e a estruturar o ambiente de trabalho, de modo a que os alunos desenvolvam e criem conceções mais verdadeiras acerca desta ciência." (p. 9). As práticas quotidianas dos alunos estão ricas em elementos matemáticos pelo que, como Presmeg (2003) descreve, o que "alunos pudessem reconhecer nas estruturas das suas práticas quotidianas dependia das suas conceções sobre a natureza ontológica da matemática." As conceções de matemática e a forma como estão relacionadas em todos os aspetos da vida, "parecem ser elementos-chave no esforço para usar as realidades dos alunos e as suas vivencias em sala de aula para a aprendizagem da matemática." (p. 310).

O ensino aprendizagem da geometria

A Geometria é uma área que se revela importante porque há alunos que mostram dificuldades na visualização, nas grandezas e medidas, mais especificamente, ao nível da compreensão dos conceitos geométricos de áreas e volumes.

A dificuldade na área temática da Geometria aliada ao grau da dificuldade de argumentação matemática e na área transversal de resolução de problemas faz surgir problemas mais profundos.

As dificuldades dos alunos na área da Geometria são evidentes. Há vários anos que a geometria se mostra como um obstáculo, quer para alunos do segundo ciclo, quer para alunos em escolaridade mais avançada. No entanto, parece que grande parte dos alunos do segundo ciclo não estão a atingir os objetivos previstos para este tema pelo Programa de matemática (2007), sendo eles, o desenvolvimento da visualização e do raciocínio geométrico e o ser capaz de os usar; o ser capaz de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria; ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.

Mediante os resultados apresentados pelos alunos em Geometria, parece que a visualização e a compreensão das noções de áreas e volumes continuam a ser itens em que eles apresentam grandes dificuldades e que devem ser trabalhados. No Programa de matemática (2007) no tema Geometria é tido como principal pressuposto de ensino o desenvolvimento do sentido espacial, dando ênfase à visualização e à compreensão "das propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço, à compreensão de grandezas geométricas e respetivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos." (p. 36).

Ao nível da Geometria os alunos podem desenvolver o seu raciocínio matemático construindo cadeias argumentativas, que segundo o Programa de matemática (2007), "devem iniciar pela justificação de passos e operações na resolução de tarefas e possibilitar-lhes que progridam para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem da Geometria. " (p. 8).

No relatório nacional de 2009 das Provas de Aferição do segundo ciclo (GAVE) para colmatar as dificuldades diagnosticadas é sugerido que os professores deem oportunidades aos alunos para realizarem tarefas, que envolvam "a noção de área em contextos diversificados, e para analisarem e discutirem a plausibilidade das soluções obtidas, nos respetivos contextos (p. 17). No relatório nacional de 2010 das provas de aferição sugerem

> que os conceitos geométricos de área e de volume, bem como as respetivas unidades de medida, sejam trabalhados de forma dinâmica, envolvendo os alunos na resolução e discussão de tarefas não rotineiras, orientadas para o desenvolvimento de um conhecimento compreensivo destes mesmos conceitos (p. 29).

Godino, Batanero e Roa (2004) refere que comparar medidas de áreas é complicado devido aos dados que são diretamente observados serem enganosos. A comparação de áreas torna-se muito complicada para o aluno quando não tem desenvolvido as estruturas cognitivas necessárias para as fazer, como por exemplo, que a área se mantém quando as diversas partes de uma figura se recompõem para formar outra diferente. Os autores sugerem que a realização de atividades de comparação de áreas para que os alunos consigam discriminar entre o tamanho e a forma, o comprimento e outras medidas, dando o exemplo de que um retângulo muito comprido e estreito pode ter menos área do que um triângulo com lados mais pequenos. No momento em que se comparam duas áreas, a consideração adicional da forma origina dificuldades que não estiveram presentes no caso do comprimento. A comparação direta de duas áreas é quase sempre impossível exceto quando as formas têm alguma dimensão ou propriedade em comum.

Barbosa, Borralho, Cabrita, Fonseca, Pimentel e Vale (2008) referindo o Programa do Ensino Básico de matemática (1990) apresentam que no bloco Grandezas e Medidas surgem as palavras repetição e disposição quando se refere à disposição que vários objetos podem ter quando se aprecia uma das suas propriedades, dizendo que essas experiências podem conduzir "à noção de invariância das seguintes grandezas: comprimento, independente da disposição dos objetos, da matéria" (p. 480, 481).

Segundo Godino, Batanero e Roa (2004) um fator que se seleciona com a invariância de uma certa qualidade é o princípio da conservação num "determinado objeto, quando se realizam determinadas transformações sobre o dito objeto" (p. 385). Assim os conceitos de conservação e reversibilidade relacionam-se entre si. Como sugestão para trabalhar a invariância de uma superfície os autores apresentam que deve ser ao nível da concretização de modo a que os alunos fiquem convencidos. Exemplificando, para esta situação, o corte de uma folha de papel em vários pedaços e mostrar-lhes que a quantidade de papel não variou juntando os pedaços e verificando que se voltam a ter a folha inicial.

Godino, Batanero e Roa (2004) apresentam as várias etapas de Piaget a ter em consideração para esta propriedade. Sendo estas definidas pela faixa etárias, em que no primeiro estádio, até aos cinco anos, os alunos não têm desenvolvido esta capacidade; no segundo estádio, entre os 5 e os 6, eles apresentam respostas diversas; e aos sete anos, terceiro estádio, é quando os alunos começam a perceber a equivalência e alcançam o princípio de conservação da superfície.

A aquisição da conservação do comprimento da linha que delimita uma determinada região (perímetro) e da área pode ser dificultada ou facilitada quando os alunos estabelecem uma forte relação entre elas, no sentido em que se uma aumenta ou diminui a outra também se pode alterar. Como os autores referem, suportando-se nos estádios de Piaget, a partir do momento, em que faz sentido para o aluno a equivalência de superfícies mediante o acontecimento de certas transformações,

> podem decompor-se e recompor-se de diferentes maneiras as distintas figuras geométricas tanto para trabalhar e desenvolver o conceito de medida como para, por exemplo, a

> obtenção das fórmulas da área e das figuras distintas e é fundamental para calcular a área de figuras irregulares. (p. 385).

Além das noções já referidas ao nível da geometria, nos primeiros anos de escolaridade, é importante que seja explorado a descrição das figuras geométricas planas e a visualização dos seus aspetos quando se aplicam transformações, como podem ser rotações, reflexões, ver se compõe umas com as outras.

Godino, Batanero e Roa (2004) referem que desde o terceiro até ao quinto anos de escolaridade devem "Aplicar técnicas apropriadas e ferramentas para realizar medições" (p. 384) e é suposto que desenvolvam, compreendam e usem as fórmulas para encontrar a área do retângulo, triângulo e paralelogramo, assim como, desenvolvam estratégias para determinar áreas de superfícies. Os autores salientam alguns passos a ter em consideração. No início, o objetivo da atividade de medição de área é desenvolver a ideia de recobrimento, sem a introdução da fórmula. Os alunos "recobrem as formas e contam a quantidade de unidades usadas" (p. 389). Só depois é que se passará para a procura das fórmulas que permitam calcular as áreas das figuras planas elementares. Podendo criar "situações didáticas em que os alunos tenham oportunidade de resolver problemas matemáticos e estabelecer relações entre diferentes conteúdos, neste caso, conexões entre as expressões que permitem calcular as áreas dos polígonos" (p. 390). Como material aconselhado surge a utilização do geoplano ou de folhas de papel quadriculado. Os alunos podem descobrir rapidamente que o n.º de quadrados que cobrem um retângulo, podem determinar rapidamente de uma forma abreviada: multiplicando as medidas da base pela altura.

Na Geometria também se podem envolver outros conceitos que permitam o desenvolvimento de outros temas como é o caso dos conceitos algébricos. Segundo o Programa de matemática (2007) é esperado que no segundo ciclo os alunos ampliem e aprofundem padrões geométricos, "determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos" (p. 40) permitindo deste modo a articulação entre a Geometria e a Álgebra.

Argumentação matemática

> Há quem veja a matemática como veículo que permite ajudar a alcançar um dos fins da educação que é "formar cidadão cultos". (Godino, Batanero & Font, 2004a, p. 24).

Aberdein (2008), Boero, Douek e Ferrari referidos por Douek e Pichat (2003), Duval (1999), Fonseca (2004) e Mercer (2000) entendem argumentos como sendo um processo a que se recorre para suportar um raciocínio e convencer as restantes pessoas da credibilidade do que estamos a defender. Sendo especificado por Aberdein (2008), Duval (1999) e Fonseca (2004) que os argumentos também podem ser utilizados para apoiar ou refutar uma ideia. Aberdein (2008) considera, ainda, que estes são “um ato de comunicação” (p. 1).

As posições de Aberdein (2008), Duval (1999), Fonseca (2004) e Mercer (2000) parecem ir de encontro ao segundo ponto da definição apresentada no dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea (2001). Neste dicionário apresenta argumento como sendo: “Raciocínio, razão ou prova destinados a demonstrar a lógica, a verdade ou a falsidade de uma afirmação, uma doutrina…; dito ou escrito que contenha esse raciocínio. 2. Discussão, alteração, pugna verbal (…)” (p. 334, 335). Assim, o dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea (2001) define argumentar como:

> 1. procurar convencer ou demonstrar com argumentos; expor razões, fundamentos para provar, defender, atacar uma opinião, uma tese, …: apresentar argumentos contra ou a favor, fazer uma argumentação (…) 5. discutir um assunto; trocar razões ou argumentos que estão na base de opiniões. (p. 334).

Neste estudo, entende-se que argumentar é apresentar argumentos contra ou a favor, expor razões; defender e/ou atacar uma opinião, procurar convencer, com base em argumentos que demonstrem uma lógica, “a verdade ou a falsidade de uma afirmação” (p. 334).

Na definição e utilidade de argumentação não existe total consenso entre os investigadores. Boero, Douek e Ferrari referidos por Douek e Pichat (2003) utilizam a palavra argumentação para definir tanto o “processo que produz uma lógica como para o discurso sobre o assunto ou o seu produto” (p. 250), enquanto que Fonseca (2004) referindo Duval, emprega-a como sendo um modo de raciocínio intrinsecamente associado à linguagem natural e, por último, Mercer (2000), entende que pode ser utilizada de três modos distintos: “como um monólogo persuasivo, como uma disputa competitiva e como um diálogo razoável.” (p. 104).

A definição apresentada pelo dicionário de Língua Portuguesa Contemporânea (2001) para argumentação é

> 1. Ação, resultado ou sistema de argumentar, de expor um conjunto de razões, fundamentos ou argumentos para provar uma tese, defender uma opinião, fundamentar uma crítica (…) 2. Conjunto de argumentos, de razões e provas ligadas entre si, para se chegar a uma conclusão ou para a justificar. + coerente, convincente; fraca, forte +. (p. 334).

Relativamente ao objetivo primordial da argumentação, Fonseca (2004) suportando-se em Balacheff, refere que o objetivo será “[…] obter a concordância do interlocutor” (p. 65) e convencê-lo, e não “o de estabelecer a verdade da afirmação” (p. 65). Deste modo os “[…] resultados da argumentação, as soluções dos problemas não têm caráter definitivo.” (p. 67) e, assim, considera a argumentação “indissociável de polémica” (p. 67). Até porque quando os alunos têm pontos de vista diferentes têm que contra argumentar os argumentos dos outros, discutir, defender uma opinião com o objetivo de chegar a uma conclusão.

Douek e Pichat (2003) apresentam alguns dos aspetos gerais relevantes para a argumentação matemática: a produção de uma proposta que estará em discussão pode ser apresentada para dar início ou aparecer mais tarde como um resultado parcial da argumentação; produção de razões (tomadas a partir de conceções) ("argumentos") para validar ou questionar a proposição; os argumentos e a proposição em análise são mantidos juntos por um raciocínio destinado a justificar, levantar dúvidas, contrariar, refutar, interpretar, tirar novas conclusões; a organização verbal é o aspeto visível de tal estrutura; a atividade cognitiva do sujeito na elaboração de uma argumentação é consciente e voluntária, pressupõe a existência de outra pessoa que esteja em condições de controlar ou regular a lógica do raciocínio, a veracidade das declarações, e os tratamento dos sinais envolvidos.

Hunter (2007) considera que a argumentação é uma ferramenta poderosa que funciona como um diálogo em grande grupo (turma) em que todos os alunos trabalham em conjunto para ser possível explorar coletivamente de forma crítica a tarefa. Por seu lado, Komatsu (2009) refere que o pretendido é "que os estudantes cheguem a um consenso através de argumentos matemáticos, conciliando diferentes abordagens." (p. 394).

A utilização da argumentação apresentada por Aberdein (2008), Boero, Douek e Ferrari referidos por Douek e Pichat (2003), Duval (1999), Fonseca (2004) e Mercer (2000) parece estar incluída em Gould (2003). No seu entender, os alunos ao participarem na construção coletiva aceitam publicamente que o conhecimento matemático contribui para a construção de argumentos matemáticos. No entanto, Gould (2003) para os alunos argumentarem matematicamente necessitam de recorrer a justificações para apoiarem as suas “reivindicações, convencer os seus colegas e professor” (p. 166).

Para Krummheuer (1998) o processo ensino-aprendizagem é um evento social e devido ao contexto sala de aula a maioria dos formatos de argumentação são iniciados pelo professor, sendo ele que estabelece a negociação entre os vários participantes (p. 223). O investigador designa este processo como interativo de argumentação que contribui para “iniciar, orientar e avaliar a aprendizagem” (p. 224) de um aluno.

Hunter (2007) e Krummheuer (1995, 1998), no que se refere à argumentação num contexto de sala de aula, defendem que a interação entre vários elementos pertencentes à turma, designa-se por argumentação coletiva. Hunter (2007) considera que para que a argumentação coletiva se faça com sucesso, os alunos têm que ter conhecimento da importância de convencer os colegas e de estarem esclarecidos quanto às noções de “discutir” e de discordância. O segundo investigador salienta que este tipo de argumentação não ocorre necessariamente de uma forma harmoniosa mas, devido à origem resultante da interação social, tem que ter o envolvimento de vários participantes. No momento em que a questão central é aceite por todos é porque a negociação dos argumentos foi efetuada com sucesso.

Mercer (2000) parece referir-se à interação dos alunos na sala de aula, em grupo, de um modo mais lato, focando o conceito de “pensar coletivamente” (p. 103) e considera-o como uma atividade em que todos utilizam a linguagem para através do conflito, cooperação e debate perceberem e compartilharem o seu conhecimento.

Na argumentação coletiva surgem aspetos negativos e o mais relevante parece ser o facto dos alunos poderem não concordar com as argumentações apresentadas mas, pelo contexto social, acomodarem-se e não apresentar o seu raciocínio. Assim, Krummheuer (1995) refere que, por vezes, a argumentação coletiva nas aulas de matemática acontece com um acordo sobre o núcleo de um argumento.

Krummheuer (1998) analisou, num pequeno grupo, a produção coletiva de argumentos por alunos do segundo ano de escolaridade. Os alunos produziam-nos não só com o objetivo de conduzirem a um resultado mas também com o intuito de explicitarem as suas razões. Neste estudo o investigador concluiu que quando as crianças estão envolvidas ativamente na criação de argumentos, “podem ser apresentadas afirmações que não conduzem a um resultado ou a um consenso entre os intervenientes” (p. 227). Mercer (2000) refere que não há dúvidas que nós estamos envolvidos persistentemente nos argumentos e na persuasão visto que “eles são parte da essência da ação colaborativa humana efetiva.” (p. 104).

Hunter (2007) estudou a forma de exploração de estratégias de interação utilizadas por um professor num contexto de sala de aula, mais especificamente, quando os alunos participavam no discurso de argumentação coletiva. Concluindo que os alunos podem participar na argumentação coletiva quando cuidadosamente apoiados. Verificou que existiam diferenças ao nível do discurso e da participação coletiva na sala de aula porque ao expressar-se passaram a estender-se para a justificação e para a argumentação.

Segundo Andriessen (2006) os alunos, na sala de aula, deviam trabalhar à imagem dos cientistas, em que a discussão é feita com base em argumentos sem ser uma discussão agressiva. A utilização da argumentação colaborativa pretende aproximar o trabalho de sala de aula ao dos cientistas. Andriessen (2006) entende como sendo “uma forma de discussão colaborativa em que ambas as partes trabalham juntas para resolver um problema, e no qual esperam estar de acordo em última instância.” (p. 443). A forma de argumentação colaborativa é estruturada de modo a que os alunos trabalhem em conjunto (pequenos grupos) para resolver problemas que esperam chegar a um acordo no final. Os elementos dentro do grupo apresentam os seus argumentos contra ou a favor aos já apresentados e justificam, visto que o principal objetivo é ajudar o seu grupo a chegar a uma solução. Segundo Andriessen (2006), baseado em Walton e Nonnon, refere que o grupo de alunos “deve estar envolvido numa exploração cooperativa de um espaço dialético de soluções” (p. 447).

Andriessen (2006); Hunter (2007); Yeo, Lee, Tan, Tan e Lum (2009); analisaram a argumentação colaborativa nos seus estudos e todos eles concluíram que os alunos desenvolveram compreensão ao nível da argumentação.

Andriessen (2006) estudou numa turma do 5.º ano de escolaridade a influência da utilização da argumentação na aprendizagem. A turma foi organizada em pequenos grupos e estes foram convidados a tomar posições sobre um problema atual e indicar as suas razões e provas para apoiar as suas opiniões. Após cinco semanas os alunos foram envolvidos em discussões de 15 minutos. Essas discussões foram feitas com outras turmas através da internet. O investigador traçou seis conclusões, sendo elas: a argumentação é boa como método para a aprendizagem, mas primeiro tem que ser incorporado nas aulas uma sequência de tarefas envolvendo a argumentação e quanto mais prolongado for o tempo de implementação melhor; os alunos devem suportar-se nas suas estruturas de conhecimento e nos argumentos dos outros; argumentar para aprender é um processo colaborativo de construção de conhecimento coletivo; a utilização do computador tem um impacto importante sobre “discutir para aprender”, ele verificou que em alguns casos leva a resultados semelhantes aos da argumentação oral e, por outro lado, possibilita mais extensão do que a situação oral; os alunos são mais eficientes na gestão da sua colaboração através do diálogo “cara a cara” do que quando mediada pelo computador; quando uma sequência de tarefas complexas é projetada, precisamos saber mais sobre o que transfere de uma fase da sequência para o outro e quais as condições que facilitam essa transferência; considerou que, atualmente, muitos alunos sentem que a argumentação é um desperdício de tempo, eles simplesmente preferem que os professores lhes deem as respostas. No entanto, Andriessen (2006) refere que se a argumentação for apresentada em situações de aprendizagem como uma forma de competição, “os alunos não querem mais respostas, pois eles querem defender a deles porque desse modo vão experimentar a autonomia, e o poder da aprendizagem” (p. 466).

Hunter (2007) como estudou diferentes formas de interação no contexto sala de aula também estudou em que é que essas formas foram utilizadas para alterar o discurso dos alunos participantes na argumentação colaborativa (p. 3-81). Ela enfatizou que, os alunos quando trabalham juntos, em pequenos grupos, estão envolvidos na participação colaborativa no diálogo matemático, quer como ouvintes quer como falantes e que devem tentar prever as questões que os colegas colocarão para contra-argumentar. No momento em que passa para grande grupo a posição do professor como autoridade da sala de aula modifica-se passando a ser o organizador. Orquestrando as participações funcionará como mais um dos participantes no diálogo. As conclusões obtidas foram as já referidas aquando da argumentação coletiva, no entanto, refere-se que a investigadora recorria várias vezes ao "revoicing" para colocar os alunos que tinham argumentado a refletir sobre o que disseram e lançar novamente a necessidade de argumentarem.

Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) apresentaram um modelo de discussão com toda a turma em que o objetivo era a utilização das respostas dos alunos para a discussão em grande grupo que "pode potencialmente tornar o ensino com tarefas de alto nível mais concretizáveis para os professores" (p. 550). O professor será o orientador da tarefa de modo a certificar-se que estas "serão mantidas de alto nível e que as ideias matemáticas sejam aprendidas" (p. 550).

Forman e Ansell (2002) vão de encontro à ideia de Smith e colaboradores (2009) sugerindo que os próprios alunos podem explicar as suas respostas aos problemas e que o professor pode incentivar os alunos a refletir, a avaliar as suas explicações e as dos seus colegas e ajudar a que identifiquem a sua posição perante um argumento.

Para Cobb e Bauersfeld (1995), num segundo instante, aquando da resolução de problemas em pequenos grupos, os alunos têm que ser participantes persistentes "para resolver problemas desafiadores, para explicar individualmente as suas soluções pessoais aos parceiros, ouvir e tentar compreender as explicações do companheiro na tentativa de chegar a um consenso sobre uma resposta, e, idealmente, um processo de resolução." (p. 27).

Cobb (1995), através da comparação das oportunidades de aprendizagem de cada participante do seu estudo, apresenta o surgimento de interpretações que envolvem tanto a colaboração indireta como a explicação a múltiplas vozes. A diferença entre as duas oportunidades de aprendizagem é a cronologia, o primeiro tipo ocorre numa primeira fase, quando os alunos interagem na tentativa de chegar a uma solução e, a segunda, ocorre quando os alunos tentam resolver e fazem interpretações com soluções e respostas divergentes. Em ambos os casos, Cobb (1995) considera essencial “que seja estabelecida uma base compartilhada para a comunicação, para as oportunidades de aprendizagem ocorrerem” (p. 108).

Forman e Ansell (2002) citando O'Connor e Michaels consideram que as oportunidades de aprendizagem ocorrem num determinado momento quando se alinham "os alunos uns com os outros e com o conteúdo do trabalho académico, ao mesmo tempo se pretende socializá-los em formas particulares de falar e pensar" (p. 258). Deste modo, Forman e Ansell (2002) referem que

> orquestração da discussão permite ao professor que os alunos atribuam novos significados aos conteúdos e às estruturas de participação social na sala de aula. Professores e alunos podem utilizar “revoicing” para modificar a forma como reivindicações argumentativas são propostas, justificadas e contestadas. (p. 259).

Benefícios da utilização da argumentação e da argumentação colaborativa.

A utilização da argumentação colaborativa e coletiva na sala de aula ajuda os alunos a cumprirem o pretendido pelo programa de matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) visto que este documento considera que os alunos através da discussão confrontam “as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas.” (p. 9) e que os alunos ao escreverem “têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem” (p. 9). Neste mesmo documento é salientado que os alunos devem desenvolver progressivamente as suas capacidades fundamentais, quer para a sua prestação no ensino e na aprendizagem, quer na sociedade. Com vista a permitir que os alunos sejam cidadãos ativos, capazes de comunicar, organizar e criticar as suas ideias, interpretar as ideias dos outros, argumentar e contra-argumentar.

Segundo Godino, Batanero e Font (2004a) se na sala de aula for proporcionado aos alunos que evoluam na “capacidade para interpretar e avaliar criticamente a informação matemática, os argumentos apoiados em dados que as pessoas possam encontrar em diversos contextos, incluindo os meios de comunicação, ou em seu trabalho profissional.”; e na “capacidade para discutir ou comunicar informação matemática, quando seja relevante, e competência para resolver os problemas matemáticos que encontre na vida diária ou no seu trabalho profissional.” (p. 24) está a contribuir para a formação de “cidadãos matematicamente cultos”.

Na resolução de tarefas que visam o desenvolvimento da argumentação, primeiro resolvem registando os seus argumentos e depois apresentam-nos oralmente à turma, cumprindo assim o referido no programa de matemática do Ensino Básico (2007). Onde se defende que o aluno deve ter oportunidade de clarificar o seu raciocínio e elaborar de um modo mais rigoroso as suas estratégias e resoluções e de confrontá-las com o que os seus colegas produziram. Douek e Pichat (2003) referindo Vygotsky e Duval dizem que ao procederem desse modo os alunos estarão “a desenvolver capacidades relevantes para a argumentação matemática” (p. 2).

A argumentação pretende ser produtiva e será tão mais produtiva quanto maior número de elementos da turma participar. A sua envolvência permitir-lhes-á argumentar a favor do seu ponto de vista ou contra a argumentação do colega, e se o professor conseguir ser um “bom maestro” pode levar os alunos para uma argumentação coletiva. Hunter (2007) referindo e.g. Manouchehri e St. John, Mercer, Wood, Williams e Mcneal e o Programa de matemática do Ensino Básico (2007) encontram benefícios nesta forma de argumentar, pelo facto de ser muito importante o trabalho coletivo. Pois consideram que existe articulação do raciocínio matemático com o questionamento e com o desafio do raciocínio dos outros.

As Normas (NTCM-APM, 2007) preveem que “Ao ouvirem atentamente os argumentos dos colegas, e ao pensarem sobre eles, os alunos aprendem a tornar-se críticos no contexto da matemática.” (p. 69).

Segundo Douek e Pichat (2003) a argumentação deve ser introduzida na sala de aula de matemática desde muito sedo através de uma gestão interativa e de familiarização dos alunos com a escrita e com as interações na sala de aula. Deste modo verifica-se que é necessário a argumentação estar cada vez mais evidenciada no ensino da matemática. Douek e Pichat (2003) aplicaram o seu estudo em “quatro episódios”, em turmas do 1.º ano ao 3.º ano de escolaridade e pareceu-lhes que houve um desenvolvimento das capacidades argumentativas dos alunos mais novos. Depreendendo-se que para permitir ao aluno esse desenvolvimento ao nível da argumentação matemática é necessário incentivá-lo para a argumentação cada vez mais cedo mas, em simultâneo, ter em atenção que o desenvolvimento do pensamento não é estanque e é necessário criar as ligações para futuras aprendizagens.

Douek e Pichat (2003), Godino, Batanero e Font (2004b), Gould (2003), Hunter (2007), Normas (2007), apresentam alguns benefícios da argumentação e da apresentação do raciocínio do aluno à turma. A discussão em sala de aula foi considerada como sendo importante para a aprendizagem do ensino da matemática justificando que é “claramente importante para que os alunos conhecem os processos do pensamento matemático” (Gould, 2003, p. 165); os alunos devem ser capazes de comunicar, organizar e criticar as suas ideias, interpretar as ideias dos outros, argumentar e contra-argumentar (Normas, 2007); a argumentação matemática “contribui para o desenvolvimento compartilhado da compreensão da matemática.” (Gould, 2003, p. 166);

enriquecimento da perspicácia dos alunos quando estes apresentam os seus argumentos e "os seus métodos de resolver problemas, quando justificam o seu raciocínio à turma e ao professor (Normas, 2007, p. 67); "ouvir a própria explicação dos outros permite que os alunos desenvolvam a sua própria compreensão matemática." (Normas, 2007, p. 66); os alunos tornar-se-ão "mais competentes na utilização adequada do raciocínio indutivo e dedutivo" (Normas, 2007, p. 310).

De acordo com vários autores (Godino, et al., 2004; Duval & Vygotski citados em Douek & Pichat, 2003; Normas, 2007; Gould, 2007; ME-DGIDC, 2007) os principais benefícios da argumentação para os alunos são: melhorar a capacidade de discussão ou de comunicação de informação matemática e na resolução de problemas matemáticos que encontre na vida diária ou profissionalmente; evoluir na capacidade de interpretar e avaliar criticamente a informação matemática; consciencializar-se das suas dúvidas e se o que escrevem faz sentido; aprender a tornar-se crítico no contexto matemático; desenvolver a sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem; conhecer processos de pensamento matemático.

Andriessen (2006), Hunter (2007) citando a política norte americana (defendida em 1992) e o Programa de matemática do Ensino Básico (2007) parecem estar de acordo que os professores devem promover o ensino para que os alunos sejam "capazes de: argumentar e discutir as argumentações de outros." (ME-DGIDC, p. 8), até porque o primeiro autor considera que "Aprender a argumentar contribui para desenvolver a capacidade de raciocínio". (p. 448). Uma das metas a atingir previstas para o final do segundo ciclo nas capacidades transversais, no domínio do Raciocínio Matemático, é os alunos conseguirem justificar e argumentar afirmações matemáticas (ME-DGIDC, 2010).

Recentemente Smith e colaboradores (2009) abordaram a forma como orientar e organizar as discussões na sala de aula. Referem que a utilização das respostas dos alunos na discussão das tarefas com toda a turma pode potencialmente tornar o ensino de alto nível e até mesmo mais flexível para professores.

Andriessen (2006) observa grandes benefícios na utilização da argumentação, defendendo que sendo vista como uma prática de colaboração "pode ajudar os alunos a realizar uma ampla e importante variedade de objetivos de aprendizagem." (p. 443). Komatsu (2009) ressalva que é mais enriquecedor para o desenvolvimento da argumentação matemática, quando é possível conhecer "As formas pelas quais os alunos procuram justificar afirmações e convencer" (p. 398).

Autores como Andriessen (2006); Bransford e Kuhn, Brown e Cocking, Vygotsky, Wertsch, Billig e Koschmann referidos por Andriessen (2006); Cobb e Bauersfeld, (1995); Forman e Ansell, (2002); Smith, e colaboradores (2009), apresentaram benefícios para a introdução da argumentação colaborativa na sala de aula, sendo eles: contribuir para uma maior aprendizagem conceitual através das atividades de elaboração, raciocínio e reflexão; ajudar os alunos a aprender sobre as estruturas argumentativas; desenvolver a consciência social e a capacidade de colaboração mais geral; participar efetivamente dentro de grupos de pessoas, no trabalho, em casa, em contexto social onde é exigido saber como argumentar com competência; preparar os alunos para saber viver em contexto social; contribuir para a capacidade de raciocínio; tornar o ensino de alto nível; dar oportunidade adicional ao aluno de ouvir e/ou refletir sobre um enunciado; a desenvolver ferramentas para a interpretação nos eventos sociais – a sua colocação crítica na sociedade diferenciará qualitativa em aspetos cruciais como no momento de apresentar as suas explicações e descrições das suas soluções para os problemas; ajudar os alunos a transmitir as suas ideias clarificando-as para outros.

Cobb (1995) assemelha as práticas quotidianas em sala de aula de matemática à natureza na nossa cultura de vida quotidiana, e refere que Schutz "descreveu como a época da atitude natural" (p. 284). Assim se os alunos estão formatados para aceitar tudo o que é transmitido na sala de aula como valor absoluto e incontestável, essa ideia repercute-se na sociedade, no seu ambiente normal, e passam a agir em concordância com o que lhes é apresentado, assim o que outro indivíduo disser, normalmente, "é aceite como correto, sem reflexão" (p. 284). Sendo de extrema urgência os professores começarem a dar hipóteses aos alunos para contribuírem para o seu desenvolvimento. O professor ao permitir ao aluno apresentar os seus argumentos, repetir, reformular a sua argumentação, refletir sobre os argumentos dos seus colegas e todas as restantes interações envolvidas nesta didática de sala de aula vai permitir que os alunos expressem progressivamente melhor as ideias. Qualquer elemento pertencente à comunidade de sala de aula ao voltar a exprimir-se, "revoicing", conceito utilizado por Forman e Ansell (2002) que envolve ações como repetir, reformular, resumir, elaborar e/ou traduzir o que outra pessoa fala, "Na sua forma mais simples (repetição) (…) oferece uma oportunidade adicional para o aluno ouvir e/ou refletir sobre um enunciado" (p. 258).

Hunter (2007) refere que vários estudos, como por exemplo, Manouchehri, Mercer, Wood e McNeal,

> têm fornecido muitas evidências de que quando as oportunidades são propiciadas aos alunos para participar em formas ricas de Inquérito e argumentação, a qualidade das suas próprias explicações e justificações matemáticas são reforçadas. Isso ocorre porque a argumentação é a ferramenta poderosa que permite o raciocínio dos alunos no diálogo para refutar, criticar, elaborar e justificar conceitos e factos matemáticos e desenvolver e perceber as perspetivas opostas quando todos os alunos trabalham para a construção de um consenso coletivo. (p. 3-82).

Papel do professor e do aluno na construção da argumentação.

Mercer (2000) alerta para o facto do sucesso da atividade a pares ou em grupo poder depender, consideravelmente, do nível de interiorização das regras básicas do trabalho conjunto dos alunos. No entanto, Bauersfeld (1995), Fomam e Ansell (2002) referem que se se verificar na sala de aula um ambiente típico do ensino tradicional os alunos estão apenas treinados para reproduzir o que o professor expõe na sala de aula. Ou seja, existe inicialmente uma simples transmissão de conhecimentos do professor para os alunos (sentido unidirecional) e estes "aprendem" pela rotina (sistematização) e, posteriormente, reproduzem, o que consideram que se espera que seja dito quando o professor solicita a sua intervenção. Bauersfeld (1995) refere que o fracasso dos métodos clássicos de ensino pode ser interpretado como uma "manifesta falha do princípio clássico: o professor sabe e ensina a verdade, usando a linguagem como um objeto que representa e significa" (p. 276). Fomam e Ansell (2002) caracterizam este método clássico pela sequência de acontecimentos: instrução, resposta e avaliação (I-R-E). Ao seguir este método pode surgir uma grave falha porque o professor faz intervenções com o intuito de orientar os seus alunos, mas esquece-se que estes podem não estar a pensar o mesmo que ele, nem têm os mesmos conhecimentos, "solicitando-lhes "basta olhar para ele!", como se de uma série de significados didáticos tais como símbolos, moldes" (p. 278) se tratasse.

Para o ensino da matemática é referido em documentos nacionais e internacionais (Normas, 2007; ME-DGIDC, 2007) que os alunos devem: desde o pré-escolar até ao décimo segundo ano, estar habilitados a desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas; frequentemente discutir o seu raciocínio com o professor e com os seus colegas, explicando em que se basearam para formular as suas conjeturas e a lógica das suas afirmações matemáticas; argumentar e discutir as argumentações dos outros; explicar o seu raciocinio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida por diversos meios; raciocinar matematicamente, formulando e testando conjeturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos.

Seguindo as linhas orientadoras do programa de matemática do Ensino Básico (2007) no que concerne à capacidade de argumentação, o professor terá que: solicitar a apresentação de argumentos, exemplos e contraexemplos; criar condições na sala de aula para a aprendizagem da argumentação; ensinar de modo a que os alunos aprendam a construir argumentos; permitir que respondam aos argumentos uns dos outros; dar atenção e valorizar os raciocínios dos alunos; incentivar os alunos para que explicitem com clareza os seus raciocínios, analizem e reajam aos raciocinios dos colegas.

Segundo Hunter (2007) referindo o Ministério da Educação (1992) e o Conselho Nacional de Professores de matemática da Nova Zelândia (2000), o professor deve "fornecer oportunidades para que os alunos desenvolvam as capacidades de apresentação e avaliação crítica de argumentos matemáticos ou de cálculo" para que aprendam a "construir argumentos matemáticos e a responder aos argumentos dos outros" (p. 3-81). Numa tentativa de colmatar uma das lacunas dos professores, potenciado pela utilização de métodos clássicos de ensino, as Normas (2007) aconselham, a partir do 3.º ano de escolaridade, que o ensino “deverá ser ativo e intelectualmente estimulante” (p. 166). Deste modo, o aluno deixará de utilizar "argumentos baseados na autoridade (porque o professor diz ou o texto afirma) para argumentos baseados no raciocínio matemático." (p. 393).

Bauersfeld (1995), Cobb (1995) e Komatsu (2009) consideram que a argumentação não se coaduna com os “métodos clássicos” ou com argumentos baseados no professor. Segundo Komatsu (2009), para que a argumentação predomine no trabalho produzido na sala de aula é necessário dar oportunidade ao aluno para que ele passe a ter mais protagonismo e ação, possibilitando-lhe ganhar, progressivamente, mais confiança e autonomia e conseguir desenvolver um trabalho mais abstrato na sala de aula. Para tal Hunter (2007), citando Manouchehri, e Enderson, considera imprescindível que os professores como membros mais experientes tenham um papel ativo na orquestração de um ambiente social de sala de aula e permitir que os alunos se consigam ouvir, respeitar-se “uns aos outros e a si mesmos, aceitar pontos de vista opostos, e participar de uma verdadeira ação de dar e receber ideias e perspetivas" (p. 3-82). Cobb e Bauersfeld (1995); Fonseca (2004) referindo vários autores (eg. Alibert e Thomas; Barkai, Tsamir e Dreyfus; Douek; Dreyfud e Hadas; Hanna; Hanna e Jahnke; Reiss, Hellmich e Reiss; Sácristan e Sánchez; Villiers) e Hunter (2007) referem-se ao professor como um meio para: ajudar os alunos, em relação à apresentação de argumentos, na distinção entre argumentos corretos e incorretos, sem que se limite a um simples informar; explicar se algum outro método de solução foi suscetível de dúvidas, o professor tentará dar-lhe sentido; ou até mesmo, se o professor tiver um leque considerável de participações e, por tal, com múltiplas formas de justificar e validar as argumentações dos alunos pode surgir a necessidade do professor decidir e, em certas situações, dar aos alunos explicações conceptuais fundamentais para construírem a argumentação colaborativa. No que concerne a este último dever do professor, Hunter (2007) lembra que também compete ao professor não apresentar, durante um esclarecimento, o seu processo de resolução (raciocínio). No entanto, pode colocar questões para que os alunos pensem e clarifiquem os seus pensamentos. Toda a sua ação deverá ser sem influenciar no processo de resolução dos alunos. O ensino da argumentação colaborativa não é fácil sem a intervenção do professor devido ao contexto social; à dificuldade de envolvência na interação colaborativa e no uso do questionamento e a argumentação. Hunter (2007), citando Manouchehri, e Enderson, a intervenção do professor é indispensável porque para que os alunos trabalhem em equipa é preciso terem um ambiente social onde se possam "escutar uns aos outros, respeitar-se mutuamente e a si mesmos, aceitar pontos de vista opostos, e participar numa troca verdadeira de ideias e perspetivas" (p. 3-82). Para minimizar estes obstáculos é necessário um trabalho prévio do professor com a turma, estabelecendo regras bem claras. Pretende-se que a participação dos alunos seja ampliada e os inclua a todos. Após as regras, o professor deve, segundo Hunter (2007) apoiado em Manouchehri e Enderson, criar uma cultura de sala de aula em que o valor é colocado no questionamento e argumentação colaborativa requer a alteração da perceção e crenças dos alunos sobre o que é a matemática e como é que ela é usada, mas também sobre as suas atitudes e perceção da argumentação." (p. 3-82). Hunter (2007) refere que a argumentação colaborativa como uma forma de diálogo matemático em que todos os intervenientes trabalham em conjunto para explorar criticamente e resolver problemas onde pretendem no final chegar a acordo. Para conseguir esse acordo final os alunos têm que apresentar as suas argumentações perante toda a turma.

Smith e colaboradores (2009) propõem um modelo para a utilização eficaz das respostas dos alunos nas "discussões de toda a turma que pode potencialmente tornar o ensino com as tarefas mais desafiadoras mais fácil de gerir para os professores". Deste modo o principal papel do professor será a orientação e, quando comparado com uma orquestra, ele será o maestro. O método de orquestração na sala de aula como abordagem requer uma maior preparação por parte do professor porque quanto mais abertura tiver a atividade mais difícil é de controlar os resultados ou processos de resolução que os alunos apresentam. Na resolução e exposição de uma tarefa o professor tem de ter o cuidado de orquestrar a discussão de forma a que esta seja constituída por um conjunto diversificado de respostas. O professor tem de estar preparado para receber uma grande diversidade de respostas e de raciocínios e saber organizar a turma de modo a permitir que todos os alunos exponham os seus argumentos.

Smith e colaboradores (2009) concluíram que o professor seguindo um caminho envolvendo toda a turma, antes e durante a discussão, poderá ter mais sucessos. No entanto, nestas práticas não deixam de existir professores mais eficazes que outros ao orquestrar as discussões entre os alunos. Neste artigo são apresentadas cinco práticas que foram tidas em consideração para o estudo e que também podem ajudar "os professores a estabelecer um senso de eficácia sobre as suas indicações" (p. 555), eles aprendem que existem maneiras para que as discussões dos alunos sejam "de forma confiável para permitir maior entendimento matemático" (p. 550). As práticas do professor que visam contribuir para o sucesso da orquestração da discussão dos alunos na sala de aula, são: prever as respostas dos alunos nas tarefas matematicamente desafiadoras; acompanhar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; selecionar alunos para apresentar o trabalho matemático; ordenar as respostas que os alunos; associar as diferentes respostas dos alunos e aglutiná-las às principais ideias matemáticas.

Estas cinco práticas são vistas como um modelo para "planificar o sucesso focado numa discussão com toda a turma que se constrói sobre o pensamento do aluno, enquanto se está a continuar a promover a matemática para os objetivo que o professor tem para a aula mantendo um olho no horizonte matemática" (Ball referido em Smith e colaboradores, 2009, p. 555), nunca esquecendo o que pretendem alcançar matematicamente.

Cobb (1995), Hunter (2007) e Manouchehri e Enderson referidos por Hunter (2007) referem que o professor deve permitir uma cultura de sala de aula onde a resolução de problemas não seja aceite como certa e única, a alterar a perceção e crenças dos alunos sobre o que é a matemática e como é que ela é usada de modo, a que tenham um papel ativo na orquestração de um ambiente social, que consigam julgar o que é útil que seja dito para partilhar com a turma e incentivá-los a levantar questões e a pedir esclarecimentos. No entanto, segundo Cobb (1995) e Smith e colaboradores (2009), é importante que o professor também implemente com frequência este tipo de interação para que os alunos comecem a ter mais prática e a conseguir prever mais facilmente o que acontecerá numa discussão na turma; esteja ao corrente de como os alunos estão a resolver e, no caso de trabalharem em grupo, deve certificar-se que todos os membros do grupo estão envolvidos na atividade; deve estar ciente da possibilidade que existe, se não der a devida assistência na sala de aula, de elementos do grupo não terem oportunidade de levantarem questões e exporem todas as suas dúvidas no grupo; proceda cautelosamente quando organiza a turma para trabalhar em grupos e deve apelar aos alunos para a participação durante a discussão da tarefa em turma.

Andriessen (2006) alerta que a forma de implementação e condução da argumentação colaborativa de sala de aula influência o sucesso. No caso do professor conduzir incorretamente podem surgir "ligações individuais de argumentação de forma agressiva e de oposição em que o objetivo não é trabalhar em conjunto, mas individualmente, uma forma de argumentar que tem pouco a contribuir para a educação matemática." (p. 443). O professor terá de partir para esta prática de sala de aula consciente de que não pode agir de forma a achar que os alunos conseguem interpretar e têm a obrigação de explicar a sua solução coerentemente. O papel das intervenções dos professores para ajudar os alunos a dar explicações emergiu como uma outra questão importante. Quando o professor intervém para ajudar a esclarecer uma explicação que o aluno está a dar, as ações do professor podem servir tanto para ajudar a compreender (o que constitui uma explicação) ou para interferir com o desenvolvimento das explicações dos próprios alunos. O professor pode ajudar os alunos a compreender o que está a ser dito ao repetir, com base no seu conhecimento, de modo a que para as crianças faça sentido o que está ser dito.

Cobb (1995) considera que quando os alunos estão a interagir em pequenos grupos de trabalho, sem a presença do professor, eles podem tentar convencer-se mutuamente sobre a sua interpretação pessoal e durante a discussão com toda a turma é permitido expor (e explicar), um método de solução previamente desenvolvido, entrar em debate com base na atividade desenvolvida pelos pequenos grupos. Concluindo que a "interpretação do aluno para a imediata situação é para criticar a natureza da atividade (e falar) dentro do que o aluno acredita" (p. 136).

Hunter (2007) conseguiu concluir do seu estudo que as crianças podem participar na argumentação coletiva quando orientadas corretamente e que a construção argumentativa colaborativa e o raciocínio explicativo é que serviram como suporte para a justificação e argumentação. Andriessen (2006) refere que as ilações que os alunos fazem a partir do conhecimento para alcançar uma conclusão "tem o apoio de uma estrutura semelhante a um argumento, e que os mesmos critérios são aplicados para avaliar a legitimidade de uma conclusão que são aplicados para avaliar um argumento informal" (p. 448). Andriessen (2006) corrobora com Means e Voss apresentando uma das suas conclusões onde eles defendem "que desenvolver capacidades de raciocínio informal através da aprendizagem do discurso argumentativo facilita o armazenamento e o acesso ao conhecimento na memória, e o desenvolvimento da elaboração de modelos mentais, o que ajuda na resolução de problemas, a deduzir conclusões e na aprendizagem" (p. 448).

Segundo Cobb e Bauersfeld (1995) do ponto de vista do aluno, falar na sala de aula, participando e interagindo com os colegas, argumentando colaborativamente, tem como "principal finalidade explicar o seu pensamento para os outros e para desafiar e questionar o pensamento dos outros" (p. 132).

Tipo de tarefas que mais se adequam à prática da argumentação.

A argumentação é referida pelos Princípios e Normas para a matemática Escolar (Normas) (NTCM-APM, 2007) que pode ser introduzida na sala de aula no trabalho individual, a pares, em pequenos grupos ou em grande grupo. Para a exploração da argumentação, numa fase inicial, deve-se recorrer à utilização de materiais manipuláveis como meio impulsionador e de incentivo para a comunicação, para a compreensão e para a argumentação, até porque, os alunos podem argumentar sobre o que observam. A argumentação torna-se mais simplificada quando os alunos se referem a ações concretas e, posteriormente, o professor conduz os alunos a coordenar essas ações com as ações simbólicas. Deste modo, Komatsu (2009), referindo Miyazaki, entende que os alunos passarão a explicar, progressivamente, cada vez melhor e, assim, desenvolver a sua compreensão matemática.

Em 1995, Cobb apresenta a atividade coletiva como facilitadora da aprendizagem matemática. Em que os alunos estão organizados em pequenos grupos de trabalho, sendo apresentadas uma série de normas para o bom desenvolvimento e aproveitamento, sendo elas: a) criar regras de trabalho de acordo com todos; b) resolver tarefas individualmente ou em pequenos grupos; d) promover a discussão em grande grupo (turma); e) criar situação de conflito de ideias; f) interagir na sala de aula envolvendo a explicação a múltiplas vozes – ocorre quando um conflito aparente, entre alunos, que defendem afincadamente que o seu raciocínio é uma explicação válida; g) chegar a uma evidente solução a partir das múltiplas interpretações individuais.

No entanto, Andriessen (2006) no seu trabalho fundamenta que a argumentação tem potencialidade para "ajudá-los a aprender a pensar criticamente e independentemente da importância das questões e valor do debate (contest values)" (p. 443).

Hunter (2007), no seu estudo sobre a argumentação matemática usada para aprendizagem, considerou que a argumentação colaborativa na aula de matemática funciona como um diálogo em grande grupo (turma) em que todos os alunos trabalham em conjunto para ser possível explorar de forma crítica a tarefa**.** Para permitir esta interação é necessário incluir na atividade desenvolvida na sala de aula, tarefas com diversos graus de aberturas. No programa de matemática (2007) os professores são desafiados a aplicar transversalmente a resolução de problemas nos vários conteúdos programáticos. É esperado que a aplicação dos problemas ou de qualquer tarefa que seja aplicada na sala de aula não fique sem uma análise coletiva e sem a exposição das diversas formas de resolução. Neste momento, os professores são "desafiados a desenvolver comunidades discursivas em que os alunos aprendem a construir e avaliar argumentos matemáticos coletivamente" (Hunter, 2007, p. 3-81).

Para que as tarefas propostas em sala de aula tenham o efeito pretendido é necessário, mesmo sendo diversificadas e com diversos graus de abertura, tal como as autoras Forman e

Ansell (2002) referem, que se fomente a necessidade do aluno mudar as suas crenças no modo como atua nas atividades matemáticas. No entanto, as autoras acrescentam que para tal o professor tem que proporcionar-lhe tarefas “mais consistentes e com uma orientação construtivista de aprendizagem” (p. 252). Por seu lado, para o desenvolvimento da aprendizagem colaborativa, Andriessen (2006), salienta que

> “as atividades argumentativas são baseadas em outras atividades, elas não são o objetivo em si mesmos, ou talvez o sejam apenas durante breves momentos de reflexão. Para aprender argumentando é necessário incorporar nas atividades uma condução colaborativa impulsionada por um desejo de compreensão e de partilha com os outros.” (p. 443)

Assim sendo, para explorar o referido potencial da argumentação colaborativa é importante que o professor selecione cuidadosamente o tipo de tarefas que vai desenvolver em sala de aula. O mais adequado parece ser a aplicação de tarefas consistentes, e problemas com graus de abertura diversificados que criem a necessidade no aluno de defender o seu raciocínio com argumentos capazes de convencer todos os seus colegas. Assim, o aluno terá que optar pelo “melhor” raciocínio com argumentos capazes de mostrar aos seus colegas que esse é o melhor e, por tal, terá que resistir a todas as contra argumentações.

Características dos argumentos apresentados na argumentação colaborativa.

As argumentações produzidas no dia a dia, segundo Douek referido por Fonseca (2004), suportam-se em aspetos aceites social e historicamente. Uma criança começa a utilizar a argumentação em casa, junto dos amigos e em outras interações, sempre que pretendam convencer alguém de alguma das suas ideias.

A forma e o tipo de argumentos que são apresentados varia consoante quem querem convencer. Pode-se convencer sem utilizar argumentos válidos ou gerais. Por vezes, verificam que para um determinado caso funciona e aceitam-no como válido para todos os outros. Outras vezes, averiguam que uma determinada regularidade funciona em vários casos particulares e fundamentam-se nelas para considerar válido o argumento.

Duval (1992-1993) apresentado por Fonseca (2004) refere que argumentar pretende convencer. O argumento que se apresenta tem como principal objetivo ser convincente mesmo para aqueles que não tenham a mesma ideia, de modo a sobrepor-se aos outros anteriormente apresentados.

Os argumentos convincentes podem prevalecer algum tempo mesmo que sejam inadequados, têm é que passar pelas sucessivas contra-argumentações. Os argumentos que conseguirem ultrapassar ficam com uma resistência reforçada. A resistência de um argumento é muito importante pois “fazer matemática é trabalhar com esses objetos resistentes” (Fonseca, 2004, p. 66). Numa confrontação dos seus argumentos com os dos colegas, se eles não conseguem resistir devem ser reavaliados, forma de torná-los resistentes, comparando com os dos seus “colegas de modo a que reformulem, consolidem e reforcem os seus argumentos e raciocínios” (Fonseca, 2004, p. 30) ou os abandonem.

Os argumentos devem ser completos para que o encadeamento dos raciocínios não apresente falhas. Se forem gerais elimina grande parte da possibilidade de ocorrerem falhas quando se passa da apresentação de casos particulares para a generalização, pelo facto do que se verifica num caso não quer dizer que se verifique em todos. Os argumentos que apresentem todas estas características podem não ser válidos mas a comunidade onde foram produzidos e apresentados passará a aceitá-los como válidos (Fonseca, 2004).

Forman e Ansell (2002) referiram Brazerman em que a atividade central é a argumentação pela necessidade de convencer os outros de que as nossas ideias ou formas de resolução estão corretas. Ou seja, os argumentos utilizados pelos alunos devem ter o poder de conseguir mudar as “certezas” dos colegas ou suscitar-lhes a necessidade de apresentação de novos argumentos que consolidam ou refutam os argumentos anteriores que inicialmente pareciam consistentes. Fonseca (2004) entende que os argumentos são rigorosos quando se utilizam conhecimentos matemáticos (conceitos, definições, propriedades…) com qualidade.

Deste modo, Fonseca (2004), apresenta características dos argumentos que devem ser apresentadas numa sala de aula “convincentes, completos, rigorosos, gerais e resistentes.” (p. 80).

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

Este capítulo encontra-se dividido em duas partes. Na primeira parte é referido um enquadramento teórico relativamente à metodologia de investigação qualitativa, focando características, pontos fortes e limitações. Na segunda parte é feito a fundamentação e a justificação das opções metodológicas que orientam o estudo.

A investigação qualitativa

Nos estudos efetuados ao nível do ensino-aprendizagem estão envolvidos os sujeitos que interagem numa sala de aula. Os fatores variáveis que envolvem cada aluno são muitos e difíceis de controlar. Numa investigação em que se pretende analisar ações, como por exemplo, o que os alunos dizem e fazem, não se podem manipular isoladamente as variáveis. Sendo assim, a metodologia que melhor se adapta a esse tipo de investigação é a metodologia qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994) e Vale (2004) um grande fator que influencia a qualidade da investigação qualitativa é a capacidade do investigador para recolher e reconhecer os dados importantes.

Um investigador em educação pode ter a necessidade de recorrer à investigação qualitativa devido à reflexão sobre a própria profissão e de sentir a necessidade da explicação do porquê e de como ocorrem os fenómenos. Já Dilthey, citado em Stake (2009), defendia que o homem só conseguia aprender sobre ele próprio "a partir das suas ações, das suas expressões fixas, dos seus efeitos sobre os outros […] aprendemo-lo através de como agimos…" (p. 15) e compreendemos "quando transferimos a nossa própria experiência vivida para todo o tipo de expressão das nossas vidas e das vidas das outras pessoas" (p. 51).

Stake (2009) refere que a recolha de dados quanto mais natural for, melhor será para a análise do objeto de estudo, porque considera que ao entrevistar um participante interage com ele podendo estar a influenciar os resultados. Enquanto que Bogdan e Biklen (1994) consideram que "embora retiremos as notas de campo das observações participantes para a discussão […] é diretamente relevante para as notas de campo escritas em conjunto com outras abordagens, tais com entrevista." (p. 151). O método qualitativo não é sinónimo de recolha de dados qualitativa. Stake (2009) refere, que o que define este método é a diferença como é privilegiado a procura das causas, a compreensão das complexas interações.

Vale (2004) identifica Morse (1994) como defensor da existência de seis estádios que definem o percurso de um investigador qualitativo. Sendo eles: estádio de reflexão, estádio de planeamento, estádio de entrada, estádio de produção e recolha de dados; estádio de afastamento e estádio de escrita. Inicialmente tem que refletir para identificar o tema de estudo, o segundo será a definição das questões de estudo e o seu refinamento, o terceiro trata a recolha de dados sem a visão do investigador, o quarto é a análise de dados, o quinto é um tempo de reflexão e, por último, processar o texto recorrendo a citações para "ilustrar a sua interpretação" (p. 177).

Segundo Yin (2005) um dos métodos de se fazer pesquisa social é o estudo de caso. Este é utilizado como uma estratégia para "se examinarem acontecimentos contemporâneos" (p. 26), sem, no entanto, manipular os comportamentos. A principal função do estudo de caso é a explicação dos "supostos vínculos causais em intervenções da vida real" (p. 34). Como outras aplicações refere a descrição de "uma intervenção e o contexto na vida real", a ilustração, a exploração e a meta-avaliação. Ainda segundo o autor o papel do investigador é: ser capaz de fazer boas perguntas e de interpretar as respostas; ser bom ouvinte; ser adaptável e flexível; ter uma noção clara das questões que estão a ser estudadas; e deve ser imparcial nas noções preconcebidas. As principais fontes de evidência para realizar o estudo de caso devem ser recolhidas e desenvolvidos de forma independente. No entanto, Yin (2005) refere que nem todas as fontes são necessárias para todos os casos. As evidências que o autor refere são: "a documentação, os registos em arquivos, a entrevista, a observação direta (filme e gravação áudio), as técnicas projetivas e os testes psicológicos" (p. 111). Stake (2009) não fala em evidências mas considera ser fundamental que na recolha de dados se deva ter em atenção a organização, o acesso e autorizações, a observação, a descrição de conceitos, as entrevistas e a análise de documentos. Na recolha de dados, enquanto que Bogdan e Biklen (1994) e Yin (2005) atribuem importância à recolha de dados por gravações áudio e vídeo (recolha de imagem e de som), Stake (2009) desaconselha-as. Este último, tem tal opinião porque, por vezes, as gravações não ficam percetíveis e é necessário despender de tempo excessivo, por causa das transcrições. Aconselhando, no caso de ser uma investigação de grupo, que os investigadores treinem de forma a conseguirem tirar notas estenografadas e a que os colegas as consigam descodificar.

Stake (2009), Vale (2004) e Yin (2005) salientam que para um estudo de caso a observação deve ser naturalista; os dados devem ser recolhidos de diversos meios, como, observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, documentos (artefactos, transcrições, registos das tarefas e dos cadernos diários, entre outros); deve ser analisado um grupo de pessoas (pode comportar diferentes números) ou organizações; é incompatível com a utilização de formas experimentais de controlo ou manipulação de variáveis, o que afasta a explicação causa-efeito; os resultados dependem fortemente do poder de integração do investigador; possibilidade de mudança na seleção do caso ou dos métodos de recolha de dados à medida que o investigador desenvolve novas hipóteses; as questões que se pretendem ver respondidas com o estudo são do tipo "como?" e "porquê?".

Segundo Stake (2009) e Vale (2004) o estudo qualitativo tem vários pontos negativos. É salientada a subjetividade porque “encontra-se frequentemente mais dúvidas do que soluções para as dúvidas anteriores” (Stake, 2009, p. 60); os contributos por serem considerados lentos e tendenciosos; os riscos éticos inerentes ao estudo e os custos que, por vezes, são elevados; considerada como uma forma de investigação pouco rigorosa; a dificuldade ou inviabilidade em generalizar os resultados; e pela facilidade de ser questionada no aspeto de enviesamentos do observador. Para o último aspeto salientado, Vale (2004) apresenta um caminho para o investigador “se proteger” que é a recorrência ao número de vezes que se repete determinado padrão (p. 188). Como pontos fortes do estudo de caso, Vale (2004) realça que as conclusões surgem da triangulação de fontes e métodos; a captação das características únicas do fenómeno; o forte poder de descrever e explicar os fenómenos; a facilidade na compreensão de outros casos; o facto de pode ser conduzido por um único investigador.

Opções metodológicas

Tipo de estudo.

Para responder ao problema optou-se por um estudo qualitativo e por uma metodologia de estudo de caso. Esta opção justifica-se pela forte relevância atribuída ao objetivo de compreender de forma aprofundada, o que os alunos dizem e como realmente pensam relativamente ao problema em estudo. Também a natureza das questões formuladas apontaram para um desenho de estudo de caso. Bogdan e Biklen (1994) e Stake (2009) aconselham, devido à natureza do estudo, optar-se pela seleção de uma amostra restrita. A escolha deve basear-se em critérios específicos para ser possível analisar e caracterizar a informação obtida de forma a explorar de forma aprofundada e adequada os processos e a descoberta de relações. Como Stake (2009) refere “O caso é uma coisa específica, uma coisa complexa e em funcionamento” (p. 18) e num estudo de caso, os investigadores esforçam-se “por entender como os atores, as pessoas a ser estudadas, veem as coisas” (p. 28).

Foram selecionados dois casos, dois pares de alunos de uma turma de 5.º ano. Devido ao tipo de interação estabelecida com os participantes no estudo, no momento da recolha de dados, a investigadora, neste caso, é observadora e agente participante, mas não docente da turma, por isso, não é apenas uma parte do fenómeno a ser estudado, mas também exerce uma seleção sobre o que observa. No entanto, não terá uma posição totalmente imparcial. Os resultados das observações nesta investigação resultam em descrições, que serão expressas em narrativas.

No momento da apresentação e discussão coletiva das tarefas era a professora titular que geria a aula. O papel da investigadora passava a ser de mera observadora e apenas intervinha pontualmente, limitando assim a possibilidade de efetuar registos eficazes, como foi referido em Vale (2004), o "observador poderá não ter tempo nem condições para efetuar um registo eficaz e sistemático das situações a observar" (p. 182).

Contexto.

A escola onde foi realizado o estudo está inserida num meio rural da Zona Norte em que o nível de escolaridade dos pais e encarregados de educação dos alunos do agrupamento é baixo e a caracterização profissional destes encarregados de educação reflete o seu nível de escolaridade, sendo a maioria profissionais semiqualificados e, outro grande setor, são profissionais não qualificados, ficando um percentagem residual para os profissionais qualificados (Projeto Educativo, p. 6). Dos encarregados de educação dos alunos da turma selecionada as mães têm como média de idades 38,4 anos e os pais têm como média de idades 41 anos. As habilitações dos encarregados de educação é, maioritariamente, igual ou inferior ao 6.º ano de escolaridade, no entanto existem oito encarregados de educação com o nono ano, um com o 12.º ano e três com curso superior.

Como o objetivo é analisar argumentação matemática de alunos do 5.º ano de escolaridade quando envolvidos em tarefas de áreas e perímetros, o grau de envolvimento da investigadora com os alunos foi variável assumindo diferentes papéis de atuação na sala de aula. O acesso aos documentos como Projeto Educativo (PE), Projeto Curricular de Turma (PCT) e documentos produzidos pelos alunos constituíram um contributo fundamental para um conhecimento mais aprofundado do contexto escolar em que os alunos estavam envolvidos, qual o seu historial escolar e obter diferentes perspetivas acerca das dinâmicas a eles associadas.

Participantes.

Para a seleção da turma teve-se em consideração a compatibilidade de horários, a disponibilidade da docente da turma e da direção da escola. Os alunos da turma selecionada refletem a realidade do seu contexto. A turma é constituída por 22 alunos sendo 10 raparigas e 12 rapazes. No início do ano letivo tinham idades compreendidas entre os 9 e 14 anos e a média das idades era de 10 anos. Há 1 aluna com três retenções, sendo duas no 1.º ciclo (2.º ano) e uma no

2.º ciclo (5.º ano), um aluno com uma retenção no primeiro ciclo (4.º ano). Uma aluna da turma tem um Currículo Específico Individual (CEI), pelo que não frequenta as aulas de matemática nem chegou a frequentar o 4.º ano de escolaridade devido à sua deficiência mental e uma outra aluna (NEE) que frequenta a disciplina tem um Percurso Específico Individual (PEI). A restante turma tem alunos com características muito díspares ao nível de comportamento, aproveitamento, raciocínio, preferências e motivação. Uns têm mais aptidão e capacidade de comunicação, têm autoconfiança elevada, outros sentem necessidade de compreender e da procura do porquê, outros adquirem conhecimento pela sistematização e, outros têm muitas dificuldades, mesmo ao nível da interpretação e compreensão da língua portuguesa. Sendo assim torna-se um meio aliciante, pela dificuldade e pela diversidade de alunos.

Nesta turma, especificamente, foram diagnosticadas pelo teste diagnóstico da escola e pela informação transmitida do primeiro ciclo, como principais dificuldades a matemática a interpretação e compreensão de enunciados matemáticos; efetuar algoritmos rotineiros; reconhecer e aplicar conhecimentos matemáticos em contextos não matemáticos; em apreciar o resultado obtidos e em refletir sobre a adequação dos procedimentos utilizados; na aplicação de conhecimentos matemáticos na resolução de problemas do quotidiano; na utilização adequada de linguagem matemática para comunicar; articular e utilizar saberes e conhecimentos matemáticos elementares que permitam entender e resolver situações problemáticas simples.

Tendo em conta que os alunos envolvidos neste estudo não tinham qualquer tipo de experiência na exploração deste tipo de tarefas pensou-se inicialmente em grupos de quatro elementos mas depois de analisar outros estudos relacionados optou-se por desenvolver este trabalho em pares. Após a resolução de cada tarefa, foi promovida uma discussão, orientada pela professora titular, para que os alunos pudessem, analisar, argumentar e apresentar as diferentes estratégias de resolução. Os pares de trabalho eram maioritariamente os pré-estabelecidos para a disciplina de matemática e sugeridos pela professora da turma. A investigadora disse o que pretendia observar e a professora propôs os pares a serem observados. Foi-lhe pedido que tivesse a preocupação de conjugar variados níveis de desempenho à disciplina de matemática e que as características dos elementos dentro de cada par possibilitassem a discussão. Os pares de alunos que foram desafiados a trabalhar em conjunto, e que foram objeto de estudo têm uma autoestima bastante elevada ao nível das suas capacidades matemáticas e consideram-se "bons" devido aos seus resultados. Ao colocar como par estes alunos poderia levá-los à necessidade de convencer o seu colega porque acham os dois que têm razão. No caso de colocar um aluno destes com um aluno considerado, em contexto turma, "mais fraco" ou "mau" ele não teria hipótese de exprimir o seu raciocínio, porque a autoestima do primeiro é muito alta e considerava-se melhor que o seu colega. Na turma, os dois casos selccionados, par A e par B, mas principalmente o par A, são considerados como bons alunos e as suas respostas como corretas. No par A, a síntese individual descrita no Projeto Curricular de Turma (PCT) para cada um é semelhante. Descrevendo-os como alunos excelentes em termos de aprendizagem, curiosidade, comportamento e gosto pelo ensino. O par B, não é homogéneo em termos de atitudes, comportamento e aprendizagem. Um aluno é considerado bom em termos de comportamento, aproveitamento e colabora com os colega de modo a ajuda-los a superar algumas dificuldades e o seu par é tido como um aluno muito bom mas, que por vezes, é precipitado nas respostas que dá, é bastante falador e tem um excesso de confiança.

Recolha de Dados.

As técnicas de recolha de dados mais representativas dos estudos de natureza qualitativa que foram anteriormente mencionadas e que foram as selecionadas para este estudo são: questionário, tarefas, observação direta, registos de observações, entrevistas, trabalhos produzidos pelos alunos e artefactos (gravações vídeo e áudio). Apesar de não existir consenso quanto às vantagens da utilização das gravações áudio e vídeo, neste estudo estas foram utilizadas e, até mesmo, imprescindíveis. Permitiram capturar determinadas informações relevantes e auxiliar na interpretação, na confrontação dos alunos nas entrevistas e na triangulação dos dados. Pelo facto de se tratar de um estudo de caso os instrumentos de recolha de dados foram diversificados para permitir uma descrição minuciosa e a triangulação dos dados.

As observações no seu contexto natural permitiram recolher algumas notas de campo acerca dos comportamentos e das tarefas desenvolvidas. Apesar do contacto direto em sala de aula permitir a observação nem sempre foi possível compreender, na sua plenitude, os raciocínios que levaram os alunos a determinada argumentação. Nesses casos, as entrevistas constituíram um poderoso e rico método que permitiram colmatar esta limitação. Neste estudo, tal como nos estudos qualitativos, as entrevistas foram fluidas e abertas, não sendo, por isso, estruturadas. No entanto, houve necessidade de semiestruturar as entrevistas com o objetivo de permitir o esclarecimento de dúvidas. Este modo possibilita a adequação da linha das questões aos significados que os participantes atribuem às situações.

Questionários.

Para este estudo foi elaborado um questionário para ser aplicado antes e depois das tarefas, onde procurámos obter dados sobre os alunos e a sua visão sobre a matemática.

O questionário (Anexo A) foi um método de recolha utilizado para obter um conjunto de dados acerca da forma como os alunos pensam o que é matemática. Pretendia-se detetar as conceções acerca do conhecimento matemático dos alunos nas aulas de matemática, o que lhes faz lembrar a matemática e o que consideram ser as suas capacidades matemáticas. O questionário foi utilizado com o intuito de, posteriormente, refletir sobre o que os alunos acham que pensam e como agem. Foram formuladas questões fechadas e uma de caráter aberto. Nas questões fechadas, são dadas as opções de resposta. Por opção não foi pedida aos alunos a identificação no momento da aplicação do questionário. Esta opção foi deliberada para não constranger os alunos e mesmo assim alguns alunos questionaram a professora "conta para a avaliação" ou "professora, o que temos que responder aqui" ou "qual é a resposta certa". Na entrevista da primeira tarefa questionei os alunos se não se importavam de identificar o seu questionário e eles, voluntariamente e muito orgulhosos do que fizeram, separam o seu.

Tarefas.

Durante a aplicação das tarefas, foram observados, filmados e, aos pares do estudo foi gravada a sua voz, pelo que tive o papel de participante e de observadora. Em cada uma das tarefas foi distribuída a tarefa, o material necessário, lido o enunciado e pedido que as resolvessem. Os pares que tivessem dúvidas solicitavam a uma das professoras presentes na sala de aula que os esclarecessem.

No último mês do primeiro período do ano letivo 2010/2011, foram aplicadas cinco tarefas com o objetivo de treinar os alunos para visualização de padrões. Essas tarefas foram adaptadas do livro dos Padrões (ESE-VC) sendo que a primeira, apesar de ser considerada adequada para o 5.º ano, a maioria dos alunos não conseguiu resolver nem chegar a uma solução que os convencesse a eles mesmos, nem ver qualquer relação entre as sequências de figuras. A aplicação destas tarefas permitiu adaptar as tarefas do estudo relativamente: ao tipo de tarefa; à linguagem utilizada; à adequação dos enunciados; ao tempo previsto para a sua exploração; e encontrar formas de influenciar e conduzi-los para o trabalho a pares.

Neste estudo não foi possível aplicar durante um tempo muito alargado, decorrendo entre meados de novembro e o início de fevereiro. Em novembro, dezembro foram aplicadas as tarefas de preparação (Anexo B) e a doze de janeiro começaram a ser aplicadas as tarefas do estudo que se prolongou durante quatro semanas. A aplicação das tarefas decorreu no seu contexto natural (sala de aula). Prevendo-se, inicialmente, a aplicação de onze tarefas, tendo-se optado, posteriormente, por oito tarefas com graus de abertura diferentes. Nessas tarefas foi solicitado aos pares de alunos que procedessem aos registos das suas respostas para, posteriormente, serem debatidas em grande grupo.

Em muitas situações, na sala de aula, os alunos também trabalham em pares que é um modo de organização particularmente adequado na resolução de pequenas tarefas. Tal organização permite que os alunos troquem entre si conhecimentos matemáticos e impressões, esclareçam dúvidas e partilhem informações, entre outras. O trabalho a pares é mais produtivo quando os elementos conseguem apresentar argumentos, defenderem-nos e contra-argumentar. Finalmente, quando os pares expõem os argumentos que permitiram chegar à solução à restante turma o trabalho coletivo (em turma) permite proporcionar momentos de partilha, de discussão, de competição (disputa pela melhor resposta), de sistematização e de institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, competindo ao professor criar condições para uma efetiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho.

Para este estudo foram escolhidas oito tarefas (Anexo C) das inicialmente estruturadas. Esta seleção foi condicionada por três fatores: riqueza da tarefa, no sentido de possibilitar a exploração de diferentes formas de visualização de sequências e procura de regularidades, aplicação de múltiplas estratégias de resolução; padrões lineares e padrões não lineares; e o estabelecimento de um contexto privilegiado para a abordagem das áreas e perímetros.

Estavam enquadradas na parte da geometria "medidas e capacidades" sobre áreas e perímetros. Na elaboração das tarefas teve-se em conta a necessidade de incluir questões que levassem os alunos a apresentarem todos os seus argumentos que os conduziram a registar determinada resposta. Deste modo, a estrutura das tarefas é semelhante entre si no que respeita à formulação de questões que sugiram a necessidade de argumentação. A maioria das tarefas selecionadas para este estudo é acompanhada da representação visual e as restantes permitem o recurso a materiais manipuláveis para concretizar.

A última tarefa a ser aplicada foi um problema que colocava os alunos numa situação prática para aplicar conteúdos aplicados em resolução de tarefas anteriores. Na resolução das tarefas, os alunos registaram parte do seu raciocínio, na folha de enunciado e, posteriormente, expuseram, oralmente, em grande grupo. Nesta última fase, cada par ou a título individual, sempre que consideravam oportuno, solicitavam a palavra para dar a sua colaboração, podendo ou não participar, dependendo da gestão de tempo que a professora da turma fazia. Posteriormente a esta dinâmica de sala de aula os pares do estudo eram entrevistados, um de cada vez, para esclarecer dúvidas e, por vezes, completar o seu trabalho escrito.

Observações.

Como investigadora que interagiu na sala de aula com os alunos juntamente com a professora da turma, acabei por desempenhar dois papéis neste estudo, sendo assim fui observadora participante. Como participante, apenas questionei os alunos para eles refletirem sobre o seu próprio raciocínio, com o intuito de os ajudar a ultrapassar os obstáculos que iam surgindo, nunca dando a resposta às questões colocadas, tanto no trabalho a pares como no diálogo em grande grupo. Como investigadora procurei registar numa grelha de observação (anexo D), os aspetos mais relevantes acontecidos durante as atividades. Esta tarefa não foi cumprida devidamente pelo facto dos alunos solicitarem muitas vezes a minha atenção.

Para completar as observações, fizeram-se registos de vídeo e áudio. A gravação áudio foi dirigida para os dois pares observados em todas as sessões. A gravação vídeo estava dirigida ao grande grupo (turma) para ter uma noção mais específica do meio envolvente enquanto o trabalho estava a ser desenvolvido e da argumentação em grande grupo. Esta última revelou-se muito importante para observar determinados comportamentos e atitudes dos alunos.

Entrevistas.

As entrevistas foram efetuadas pouco tempo após a realização das tarefas para que os pares de estudo tivessem bem presente o seu trabalho. Estas relevaram-se necessárias para obter informações que não se puderam observar diretamente, nem o contexto de sala de aula permitiu que fosse explorado. Como Merriam, referida por Vale (1993), defende há informações que não se podem obter diretamente como "pensamentos, intenções e factos passados e, além disso, tentar ver qual a perspetiva sobre determinado assunto do ponto de vista do entrevistado" (p. 95). Durante as entrevistas foi pedido aos alunos para clarificarem o seu raciocínio, explicarem melhor como pensaram ou refletirem sobre determinado assunto em que a investigadora não tenha ficado bem esclarecida quer durante o trabalho escrito quer a exploração na aula em grande grupo.

Os participantes formam entrevistados por pares. Estas entrevistas foram gravadas em áudio, mas devido a falhas, algumas entrevistas ou parte de entrevistas, foram tomadas notas. O final de cada entrevista, estas foram transcritas e analisadas pela investigadora.

Após a análise das entrevistas continuaram a existir algumas dúvidas, pelo que se optou por uma entrevista geral com intuito de ver essas dúvidas esclarecidas.

Análise dos Dados.

Os dados foram analisados numa perspetiva interpretativa pelo facto de se procurar compreender como os participantes pensam e argumentam. Tendo em consideração que os dados devem ser analisados como Stake (2009) refere “em bruto sob várias interpretações possíveis (…) analisar os dados, recolher novos dados, procurar deliberadamente desconfirmação dos dados” (p. 70). Esta análise segundo Bogdan e Biklen (1994) “envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (p. 205).

Na análise de dados foi considerado o material recolhido de acordo com os objetivos e com a revisão de literatura. À medida que se recolhiam os dados foram sendo analisados, no entanto, após o término da recolha, esta tornou-se mais intensa, exaustiva e sistemática. De acordo com os dados recolhidos e as questões de investigação foram estabelecidas categorias de análise, que foram sendo reformuladas ao longo da análise dos dados. Os quadros que se seguem são as que se consideraram imprescindíveis para a análise de cada tarefa neste estudo, sendo elas: a qualidade da argumentação; qualidade da argumentação colaborativa; nível de desempenho global de cada par; qualidade da argumentação coletiva na turma.

Quadro 1

Qualidade da Argumentação

Qualitativo	Indicadores
Bom	- Raciocínio correto no entanto não foi partilhado com sucesso - Utilizaram conceitos e propriedades matemáticas - Generalizaram a partir dos casos particulares - Apresentaram trabalho incompleto porque não registaram nenhuma verificação e/ou não justificaram as relações - A “linguagem matemática” utilizada não foi a mais correta - Convenceram os colegas
Médio	- Raciocínio correto no entanto não foi partilhado com sucesso - Utilizaram conceitos e propriedades matemáticas - Iniciaram o processo de generalização / a forma como iniciaram a generalização foi por recorrência - Argumentos incompletos
Fraco	- Raciocínio correto no entanto não foi partilhado com sucesso - Abordaram o problema numa situação particular e tiveram a preocupação em generalizar mas não conseguiram - Iniciaram a apresentação de alguns argumentos - Não conseguiram convencer

Adaptado de Fonseca (2004)

Quadro 2

Níveis de Desempenho Global na Tarefa

Qualitativo	Indicadores
BOM	- Compreenderam a tarefa considerando todos os dados/ interpretaram corretamente a tarefa - Resolveram corretamente as questões solicitando esclarecimentos do professor - Apresentam um trabalho organizado - Construíram um raciocínio e explicação corretos mas incompleta - Apresentaram com rigor a estratégia utilizada - Verificaram a sua resolução - Utilizaram esquemas, desenhos, representações ou materiais manipuláveis para resolver parte da tarefa - Não aplicaram de modo totalmente correto os conhecimentos matemáticos necessários Revelam possuir os conhecimentos matemáticos necessários - Explicaram corretamente após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram ou porque o professor fez uma série de questões que os levaram a refletir - Apresentaram argumentos gerais - Os argumentos permitiram convencer os colegas
MÉDIO	- Compreenderam parcialmente a questão/ ou interpretaram corretamente alguns aspetos da mesma - Após o esclarecimento do significado de algumas palavras compreenderam a tarefa - Resolveram corretamente mas de forma insegura esperando a aprovação do professor - Resolveram parcialmente as questões de forma correta e autónoma - Raciocínio parcialmente correto e explicação não correta parecendo faltar-lhe conhecimentos matemáticos ou não se lembrar deles - Falta de rigor na apresentação da estratégia - Estratégia utilizada dificultou a generalização - Recorreu a materiais manipuláveis/ concretizou a tarefa - Apresentaram raciocínio parcialmente correto - Realizaram trabalho mas não completaram a tarefa - A estratégia escolhida permitiu-lhe chegar à solução por recorrência - Apresentaram trabalho pouco organizado - Revelaram possuir alguns dos conhecimentos matemáticos necessários - Apresentaram uma explicação incompleta e após o professor fazer uma série de questões que os levaram refletir - Os argumentos apresentam fragilidades (não foram resistentes, e/ou gerais, e/ou convincentes, e/ou rigorosos e/ou completos e/ou válidos e permitiram/não permitiram convencer os colegas)
FRACO	- Compreenderam e interpretaram incorretamente - Não apresentaram um trabalho organizado - Resolveram parcialmente as questões de forma correta mas solicitando esclarecimentos ou a aprovação do professor - Resolveram possuir alguns dos conhecimentos matemáticos necessários mas não aplicaram de modo totalmente correto os conhecimentos matemáticos necessários que parecem ter - Faltavam-lhe conhecimentos matemáticos necessários para resolver a tarefa ou não se lembravam deles - Não apresentaram uma estratégia correta ou apresentaram-na com falta de rigor - Não completaram a tarefa - Não apresentaram justificação para o trabalho ou as que apresentou estavam incorretas - Apresentaram uma explicação não correta ou não a apresentaram - Não verificaram a sua resolução - Não conseguiram apresentar argumentos ou os que apresentaram tinham muitas "fragilidades"

A categorização foi realizada com base nos dados recolhidos e em: Andriessen (2006), Fonseca (2004), Hunter (2007) e Krummheuer (1995, 1998).

Quadro 3

Níveis de Desempenho da argumentação colaborativa nos pares

Qualitativo	**Indicadores**
BOM	- Trabalham pelo debate e argumentação; - Partilham conhecimentos comuns da matemática e os dois estão interessados em alcançar os mesmos objetivos; - Argumentação não agressiva; - Trabalham em conjunto para resolver um assunto; - É evidente a passagem pelas fases de elaboração, raciocínio e reflexão que caracterizam uma argumentação colaborativa; - Existe equilíbrio na assertividade.
MÉDIO	- Trabalham através do debate; - Partilham conhecimentos matemáticos; - Trabalham em conjunto para resolver o mesmo assunto; - Trabalham para uma aprendizagem não competitiva; - Argumentação como diálogo; - Sabem ouvir-se, raciocinam sobre o que o colega diz mas pouco ou nada refletem.
FRACO	- Trabalham por acumulação de factos, e não pelo debate e argumentação - Não partilham o seu conhecimento Matemático porque não têm ou não estão interessados; - Argumentação agressiva; - Não trabalham em conjunto para resolver o mesmo problema; - Aprendizagem competitiva.

A categorização foi feita com base nos dados recolhidos e em Andriessen (2006).

Quadro 4

Níveis de Desempenho da argumentação coletiva na turma

Qualitativo	Indicadores
BOM	- Participaram muitos elementos da turma e de forma organizada; - A participação foi condicionada pelo professor da turma; - Aguardaram a sua vez para falar e ouviram atentamente o colega - Expuseram à turma as suas ideias e o raciocínio de modo organizado; - Apresentaram o seu raciocínio de forma organizada; - Utilizaram definições e propriedades matemáticas; - Refutaram raciocínios; - Criticaram a resolução dos colegas com bons argumentos; - Conseguiram ouvir os colegas e/ou perceberam as perspetivas opostas; - Apresentação de argumentos corretos; - Participação numa verdadeira troca de ideias e perspetivas; - Uso do questionamento e da argumentação (aluno – aluno); - Convenceram-se e convenceram os outros sobre a sua interpretação pessoal; - Houve existência de consenso entre os intervenientes no final.
MÉDIO	- Participaram grande parte da turma mas os pares do estudo não; - Participaram apenas um par do estudo e mais alguns pares da turma; - Apenas participaram os dois pares do estudo; - Queriam participar mas não tiveram tempo; - Expuseram as suas ideias à turma uma forma desorganizada; - Iniciaram a negociação de argumentos mas conseguiram finalizar; - "revoicing" lançou novamente a reflexão; - Foi dada oportunidade adicional para os alunos se expressarem, ouvirem e/ou refletirem; - Apresentação de argumentos corretos; - Acomodaram-se com o que foi apresentado apesar de não concordarem totalmente; - Existência aparente de consenso entre os intervenientes.

FRACO	- Não participaram; - Expuseram, as poucas ideias, à turma de forma desorganizada; - Dos alunos da turma apenas um par participou no diálogo em grande grupo; - Não respeitaram a sua vez de intervenção e não souberam ouvir os colegas; - Expressaram-se pouco, não souberam ouvir e/ou não tentaram perceber os colegas; - Participaram de modo desorganizado; - Apresentaram argumentos incorretos; - Não se convenceram e nem convenceram os outros sobre a sua interpretação pessoal; - Acomodaram-se com o que foi apresentado apesar de não concordarem - Existência de consenso entre os intervenientes.

A categorização foi realizada com base nos dados recolhidos em: Andriessen (2006), Hunter (2007) & Krummheuer (1995, 1998)

Calendarização.

Este estudo desenvolveu-se em três principais fases. Na Tabela 1 que segue é apresentado a cronologia das ações desenvolvidas em cada uma das fases.

Tabela 1
Calendarização do estudo

Fases do Estudo	Ações	Calendarização
1.ª Fase	Revisão de Literatura Desenvolvimento dos instrumentos Seleção do contexto e dos participantes Autorizações Elaboração do questionário Seleção e adaptação das tarefas Aplicação das tarefas introdutórias	Setembro/dezembro 2010
2.ª Fase	Revisão de Literatura Aplicação do questionário Resolução das tarefas Observações Entrevistas	Janeiro/março 2011
3.ª Fase	Análise e Interpretação dos dados Entrevista Escrita do relatório	Abril 2011/janeiro de 2012

Na primeira fase, que decorreu entre setembro e dezembro de 2010, foi iniciada a revisão de literatura e foram desenvolvidos os instrumentos. Pela dúvida do contexto onde as tarefas seriam aplicadas, começou-se pela seleção de diversas tarefas dentro do tema da geometria e, posteriormente, adaptadas/ reformuladas ao objetivo do estudo. Depois de saber a escola da zona norte onde seria possível aplicar o estudo (devido à logística e disponibilidade profissional do investigador que este tipo de intervenção requer) em outubro de 2010 procedeu-se à seleção de uma turma do 5.º ano onde fosse viável (professora titular e direção em acordo) aplicar o estudo durante o final do primeiro período e início do segundo. Após a aceitação da professora titular para colaborar neste estudo procedeu-se à elaboração e envio das autorizações para os encarregados de educação e direção da escola. Em simultâneo, foram, então, desenvolvidos, o questionário e as tarefas introdutórias. Durante os meses de novembro e dezembro, após a confirmação das autorizações, procedeu-se à aplicação das tarefas introdutórias. Estas foram necessárias devido aos alunos não estarem habituados à dinâmica que o estudo exigia e terem pouco e/ou nenhum contacto com tarefas envolvendo padrões, onde necessitassem de apresentar o seu raciocínio.

Após a escolha do contexto da aplicação do estudo foram efetuadas algumas alterações às tarefas, optando-se por diminuir o número de tarefas envolvendo padrões.

Na segunda fase, em janeiro de 2011 foi aplicado o questionário sobre conceções da matemática e do conhecimento matemático (Anexo A). A aplicação das tarefas ocorreu em janeiro e fevereiro, todas as semanas, às segundas feiras e às quartas feiras, e as entrevistas eram feitas às segundas feiras, relativamente à tarefa resolvida na quarta feira, e às terças feiras ou quartas feiras das tarefas resolvidas às segundas feiras. Durante esta fase de recolha procedeu-se, também, à transcrição das gravações áudio que ocorreram durante a resolução das tarefas.

Em março, no final da aplicação das tarefas, foi aplicado novo questionário sobre as conceções dos alunos relativamente à matemática e ao conhecimento matemático.

Na terceira e última fase, entre abril de 2011 e janeiro de 2012, procedeu-se à análise, interpretação e redação da dissertação final. Em finais de junho de 2011, devido às dúvidas causadas por algumas das respostas dos alunos, foi necessário marcar uma entrevista geral com os dois pares. No entanto, esta só foi possível calendarizar-se para primeira semana de setembro de 2011, devido à dificuldade em conciliar a disponibilidade dos encarregados de educação dos quatro alunos do estudo para se deslocarem até à escola.

CAPÍTULO IV – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo pretende-se fazer a apresentação, a análise das tarefas e a análise comparativa dos resultados obtidos no estudo a partir das categorias utilizadas. Na primeira parte referem-se as conceções dos alunos antes e depois da aplicação das tarefas, na segunda parte as tarefas que foram realizadas por cada par e na terceira parte faz-se a análise comparativa dos casos.

Antes de se proceder à análise de cada tarefa foi efetuada a descrição detalhada da resolução de cada tarefa por cada par (Anexos E e F, respetivamente). As tarefas foram resolvidas no trabalho a pares por escrito e depois discutidas num diálogo em grande grupo. Assim, na segunda parte no final de cada tarefa surge uma secção relativa à análise geral da turma. Este aspeto é realçado porque surgiram raciocínio dos pares observados que não conseguiram ser explorados dentro do par, ou porque não tiveram tempo ou porque não o conseguiram transmitir.

I Parte – Conceções da turma e dos casos.

Para o estudo em causa considerou-se importante conhecer as conceções dos alunos relativamente à matemática e ao conhecimento matemático.

As conceções foram tidas em conta porque segundo Garofalo referido por Segurado e Ponte (1998) é importante considerá-las devido à sua influência na forma como os alunos pensam, abordam e resolvem as tarefas, assim como, estudam e participam na aula.

Apesar de se ter consciência de que a alteração das conceções é morosa, difícil e que segundo Ponte (1991) "mudanças profundas no sistema de conceções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de grandes desequilíbrios", pretende-se analisar se houve alterações ao nível das suas conceções no intervalo de, aproximadamente, dois meses. Vale (1993) referindo Ponte (1992) salienta que as conceções são influenciadas pelas experiências no âmbito da matemática e pelas influências sociais. Assim sendo, mesmo que tenham sido aplicadas, desenvolvidas e exploradas tarefas na turma de modo diferente do habitual, podem não provocar qualquer alteração conceptual. A não mudança pode ser justificada pela curta duração da aplicação do estudo e/ou por não serem capazes de gerar grandes desequilíbrios.

Para averiguar se existiu alteração das conceções foi aplicado em dois momentos distintos o mesmo questionário, constituído por questões de resposta de escolha múltipla e, opcionalmente, podiam responder a uma questão aberta (Anexo A).

O primeiro momento efetuou-se antes do início da aplicação de tarefas e o segundo momento efetuou-se no final da aplicação das mesmas, passado, aproximadamente, dois meses.

Como foi referido na revisão de literatura a natureza das conceções matemáticas, segundo Thompson (1992) refere "a matemática é uma atividade mental, sujeita a mudanças porque envolve conjeturas, provas e refutações, e como é uma construção social também está submetida à validação social" (p. 127). Fonseca (1995) referindo Garofalo sugere que para se contribuir para a alteração das conceções "o ensino da matemática deve dar ênfase a atividades que os encorajem [aos alunos] a explorar certos tópicos, a desenvolver as suas próprias ideias, estratégias e métodos e a refletir e discutir conceitos e procedimentos, matemáticos" (p. 17), donde se pode depreender que a mudança é possível se houver a oportunidade dos alunos usufruírem desta atividade mental.

Perfil da Turma.

No primeiro momento de aplicação do questionário a maior parte dos alunos da turma (90%) considera que "Todos os alunos conseguem aprender matemática" e que eles empenhando-se também conseguem aprender (95%). Quanto à capacidade de aprender matemática discordam (55%) que seja inata, e concordam que quando estudam entendem a matemática (70%). Sendo assim, parece que a maioria da turma considera que a capacidade de aprendizagem da matemática não é atribuída às capacidades inatas e, por isso com trabalho, empenho e estudo todos conseguem aprender matemática e entendê-la.

A maioria considera que tem jeito para a disciplina (65%), que esta não é muito difícil (75%) e discordam que nunca foram bons alunos (70%). Assim, demonstram uma atitude positiva perante a disciplina. No entanto, quando se fala à turma que vão ter aula de matemática isto é sinónimo de "fazer cálculos" (90%) e quando se fala de matemática metade da turma, também se lembra dos problemas difíceis.

Para resolver esses problemas difíceis, a maioria dos alunos da turma considera que conseguem compreender melhor quando os resolvem a pares (95%).

No que concerne ao conhecimento matemático há uma "falha" porque 95% dos alunos (apenas um aluno é que não) consideram que conseguem criar conhecimento matemático e 75% que na matemática pode-se questionar, argumentar e fazer interpretações pessoais. No entanto, 60% dos alunos vê o professor como o único transmissor desse conhecimento e 50% dos alunos considera que o conhecimento matemático é imutável. Não existe coerência nas respostas dadas a este tema, visto que se os alunos podem e conseguem criar conhecimento matemático, então é porque o professor não será a única via de transmissão.

No segundo momento de aplicação do questionário a maior parte dos alunos da turma (90%) continuou a considerar que "Todos os alunos conseguem aprender matemática" e que eles empenhando-se também conseguem aprender (95%). Quanto à capacidade de aprender matemática mais 15% dos alunos passaram a discordar que seja inata (70%), e mais 5% dos alunos passaram a discordar que se estudarem não entendem a matemática (75%).

Sendo assim acentuou-se a ideia de que a maioria dos alunos da turma considera que a capacidade de aprendizagem da matemática não é atribuída às capacidades inatas e, por isso com trabalho, empenho e estudo todos conseguem aprender matemática e entendê-la.

Quanto ao jeito para a disciplina a sua conceção, relativamente ao primeiro momento, mantém-se. Considerando que têm jeito para a disciplina 65% dos alunos. A percentagem de alunos que não a considera como uma disciplina muito difícil subiu 5%, passando para 80%. A maioria dos alunos que discorda que nunca foi bom a matemática ficou reforçada em 5%, passando para 75%. Assim, fica reforçada a ideia que a turma demonstra uma atitude positiva perante a disciplina.

Quando se fala à turma que vão ter aula de matemática continua para a maioria a ser sinónimo de "fazer cálculos", no entanto agora apenas para 60% dos alunos (em vez dos anteriores 90%). Quando se fala de matemática, 55% da turma, lembra-se dos problemas difíceis. Para resolver esses problemas difíceis, a maioria dos alunos continua a considerar que conseguem compreender melhor quando os resolvem a pares (85%) apesar de 10% dos alunos (2 alunos) deixarem de ter essa ideia. Pela observação da dinâmica de trabalho dentro de cada par parece que esta alteração se deve ao facto de terem de convencer o colega de que a sua resolução é a mais ajustada e de que o seu raciocínio está correto, da conjugação de diferentes ritmos de trabalho e de concentração e à dificuldade de comunicar o seu raciocínio.

No que concerne ao conhecimento matemático houve uma mudança significativa porque todos os alunos (100%) consideram que conseguem criar conhecimento matemático, 75% que se pode questionar, argumentar e fazer interpretações pessoais. A percentagem dos alunos que considerava que o professor não era o único transmissor desse conhecimento duplicou, passando de 40% para 80%, e 70% dos alunos (subiu 20%) passou a considerar que o conhecimento matemático não é imutável.

Verificando-se uma alteração, a nível geral, do que os alunos consideram acerca do conhecimento matemático como se pode observar no quadro 5 que é comparativa entre os dois momentos.

Quadro 5

Conceções da turma em dois momentos

Questões	1.º Momento		2.º Momento	
	% Discordo	% Concordo	% Discordo	% Concordo
1. Todos os alunos conseguem aprender matemática.	10	90	10	90
2. Não tenho jeito para a matemática.	65	35	65	35
3. Se me empenhar, consigo aprender matemática.	5	95	5	95
4. A matemática é muito difícil.	75	25	80	20
5. Nunca fui bom aluno(a) a matemática.	70	30	75	25
6. Mesmo quando estudo não entendo a matemática.	70	15	75	20
7. A capacidade para aprender a matemática nasce com as pessoas.	55	40	70	30
8. Na matemática não se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais.	75	25	75	25
9. Quando te dizem que vais ter a aula de matemática lembras-te que vais fazer cálculos.	5	90	40	60
10. Quando te falam em matemática lembras-te de problemas difíceis.	50	50	45	55
11. O teu professor gosta de dar aulas de matemática.	0	100	0	100
12. O conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera).	50	50	70	30
13. O trabalho a pares ajuda-me a perceber melhor os problemas.	5	95	15	85
14. Só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático.	40	60	80	20
15. Os alunos conseguem criar conhecimento matemático.	5	95	0	100

Nota: Nas questões 7 e 9 do 1.º momento, o somatório das percentagens não dá 100%, discrepância que se deve a questões não respondidas.

Perfil dos casos.

Par A.

O Diogo. No final do primeiro ciclo o Diogo era um aluno excelente em todas as disciplinas ao nível da aprendizagem, curiosidade, comportamento e gosto pelo ensino. As aparentes mudanças ao nível das conceções deste aluno entre o primeiro momento e o segundo foram poucas pois parece ser um aluno bastante coerente e que responde de forma confiante e segura. O Diogo concorda totalmente que “Todos os alunos conseguem aprender matemática” e que se se empenharem conseguem aprender. Quanto à capacidade de aprender matemática no primeiro momento discordava que era inata e discordava totalmente que quando estuda não entende a matemática. No segundo momento quanto à primeira afirmação, reforçou a sua opinião, passando a discordar completamente e, quanto à segunda afirmação deixou de ser tão absoluto, passando apenas a discordar. Este aluno atribuiu a capacidade de aprendizagem da matemática completamente ao trabalho, empenho e estudo. Considera-se um aluno com muito jeito para a matemática e que é muito bom à disciplina. Quanto à dificuldade desta, no primeiro momento discordou que "é muito difícil" e no segundo momento passou a discordar totalmente. Assim, demonstra uma atitude muito positiva perante a disciplina. Não se lembrava dos problemas difíceis quando lhe falam na disciplina. No entanto, inicialmente, quando ia ter aula de matemática lembrava-se que ia "fazer cálculos" mas depois deixou de o considerar. Para resolver esses problemas considera que consegue percebê-los melhor quando os resolve a pares. No que concerne ao conhecimento matemático, contrariamente à turma, o Diogo tem as suas ideias alinhadas mantendo-se coerente entre o primeiro e o segundo questionário. Este aluno considera que consegue criar conhecimento matemático, que na matemática pode-se questionar, argumentar e fazer interpretações pessoais, que o professor não é o único transmissor desse conhecimento e que o conhecimento matemático não é imutável.

O Eduardo. O Eduardo era um aluno excelente no primeiro ciclo. As aparentes mudanças ao nível das conceções entre o primeiro momento e o segundo foram consideráveis. O que se observou e registou através dos suportes áudio e vídeo e resolução das tarefas é substancialmente diferente ao respondido pelo aluno no questionário. É um aluno que responde de forma confiante e segura, respeitador das regras de sala de aula e parece ver a professora como autoridade. Esta conduta escolar, visão de sala de aula e de professor parece ser devido à profissão da mãe (professora da área de humanidades) e da educação dada pelos pais. A forma como respondeu ao questionário subentende-se que seja condicionada pelo que acha que o professor espera que ele responda, e/ou por não perceber as questões e/ou por ter receio de parecer que se está a autoelogiar, pelo que foi necessário esclarecer esta situação. Pelo que na entrevista geral o Eduardo foi confrontado com o questionário a que tinha respondido no segundo momento. Nos questionários o Eduardo concorda que "Todos os alunos conseguem aprender matemática", no entanto, inicialmente considerava que mesmo que se ele se empenhasse não conseguia aprender matemática, mas no segundo momento já considerou que sim. Quanto à capacidade de aprender matemática, no primeiro momento concordava totalmente que apesar de estudar não entende a matemática e no segundo momento a sua opinião deixou de ser negativa, passando a discordar. Este aluno no primeiro questionário parecia atribuir a capacidade de aprendizagem da matemática às capacidades inatas e depois passou a atribuir ao trabalho, empenho e estudo. Considera-se um aluno com pouco jeito para a matemática e no primeiro momento concordava que não era bom a matemática, mas no segundo momento já achou que era bom à disciplina. Quanto à dificuldade desta, no primeiro momento discordou totalmente, não a considerando "muito difícil", mas no segundo momento passou a concordar sobre a dificuldade da disciplina. Assim, demonstrava uma atitude pouco positiva perante a disciplina, no entanto na entrevista geral alterou a sua resposta. Não se lembrava dos problemas difíceis quando lhe falam na disciplina. No entanto, inicialmente, quando ia ter aula de matemática concordava totalmente que se lembrava que ia "fazer cálculos", mas depois passou a discordar. Para resolver esses problemas considerava que conseguia percebê-los melhor quando os resolvia a pares, mas no segundo momento já achava que não. No que concerne ao conhecimento matemático o Eduardo no primeiro momento, concorda que na matemática não se consegue criar conhecimento matemático, concorda totalmente que não se pode questionar, nem argumentar, nem fazer interpretações pessoais e que o professor é o único transmissor desse conhecimento, mas discorda totalmente que o conhecimento matemático seja fixo e imutável. No segundo momento, antes da entrevista geral, manteve a opinião sobre a matemática, de que não se consegue criar conhecimento matemático, e concorda (posição menos segura) que não se pode questionar, nem argumentar e nem fazer interpretações pessoais. Contínua a concordar totalmente que o professor é o único transmissor desse conhecimento, mas passou a considerar que o conhecimento matemático é fixo e imutável. As tarefas não conseguiram alterar as suas conceções quanto ao conhecimento matemático, até pelo contrário, o aluno foi coerente nas suas ideias, numa perspetiva em que o professor é que sabe e ensina, a matemática não se cria, nem se desenvolve, nem há inovação e que os alunos não a podem questionar. Como já referido, devido às conceções que o Eduardo manifestou, o par foi entrevistado e o Eduardo foi confrontado com as suas respostas ao segundo questionário sendo-lhe permitido que alterasse de acordo com o que pensava, principalmente, numa perspetiva de tentar esclarecer quais eram as suas opiniões.

Edu. – Porque eu pensava que sendo duas ideias que ia funcionar melhor mas com este às vezes não dá para perceber!
Inv. – É?
Edu. – Também depende… […] Ia logo para a resposta… não me deixava responder!
Diogo – Era direto! […]
Edu. – Não, é assim ele… é assim… nós devíamos ser mais organizados porque dizíamos as ideias em simultâneo… e era um bocadinho isso. […]
Diogo – Então nesse dia estavas chateado comigo. […]
Inv. – Só os cientistas e o professor podem criar conhecimento matemático?
Edu. – Criar? Só os cientistas! Agora dizer… […]
Edu. – Os cientistas e toda a gente pode.
Inv. – Então vocês nunca criam ou recriam conhecimento matemático!

Diogo – Já!
Edu. – Sim, mas são coisas mínimas. Por exemplos naquelas formas de contar! Aquelas formas de contar foi uma maneira que nós criamos para contar. Criamos! […]
Edu. – Aqui é 3 porque há pessoas que mesmo empenhando-se não conseguem aprender matemática.
Inv. – É?!
Edu. – [Lê] matemática é muito difícil. Não é! [lê] nunca fui bom aluno a matemática. [responde] eu fui sempre bom aluno! […]
Edu. – Não nasce, as pessoas é que aprendem! E aqui pode-se questionar, perguntar e fazer isso tudo…
Inv. – E já fizeram isso alguma vez?
Edu. – Se não se fizesse isso praticamente a matemática era o professor com o livro a ler a matéria. […]
Edu. – Aqui é 3 porque às vezes temos que ir para a aula e lembrarmos de um problema que fizemos antes! Aqui pus 1 porque é como na língua portuguesa basta mudar uma coisinha que vai alterar tudo!

O Eduardo justificou que as respostas que deu não correspondiam ao que ele pensava e, talvez, tenha respondido daquela forma porque estava "mal".

Síntese comparativa de conceções do par A.

Comparando os alunos do par A foi possível verificar as seguintes semelhanças e diferenças ao nível das conceções.

Após o esclarecimento na entrevista geral, tendo o Eduardo alterado as suas respostas do segundo momento e justificado porque selecionava cada uma das opções, foi possível verificar as seguintes semelhanças e diferenças ao nível das conceções entre os alunos do par.

Os dois alunos do par estavam de acordo e mantiveram a opinião entre o primeiro e o segundo momento nas seguintes afirmações: todos os alunos conseguem aprender matemática; discordaram que a matemática é muito difícil; discordaram que quando lhes falam de matemática se lembravam de problemas difíceis; concordaram que o professor deles gosta de matemática; discordaram que o conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera).

Relativamente ao contributo do trabalho em pares no primeiro momento concordaram que era positivo, no entanto no segundo momento o Eduardo passou a discordar.

Nalgumas afirmações do questionário os alunos do par no primeiro momento não tinham a mesma opinião, mas o Eduardo no segundo momento alterou-as passando a ter, sendo elas: concordaram que se eles se empenharem, conseguiam aprender matemática; discordaram que nunca tinham sido bons alunos a matemática; discordaram que mesmo quando estudam não entendem a matemática; discordaram que a capacidade para aprender a matemática nasce com as pessoas; discordaram que na matemática não se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais; discordaram que só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático; e concordaram que os alunos conseguem criar conhecimento matemático.

Os dois alunos estiveram sempre de acordo, mas alteraram os dois as suas ideias, inicialmente concordavam e depois passaram a discordar que quando lhes diziam que iam ter a aula de matemática se lembravam de cálculos.

O Diogo e o Eduardo apenas estiveram sempre em desacordo quanto ao seu jeito para a matemática, sendo que o primeiro sempre achou que tinha e o segundo não. O Diogo mostrou-se constante, mais seguro e confiante nas suas conceções sobre a matemática do que o Eduardo. Este último alterou algumas das suas conceções entre o primeiro e o segundo (considerando as respostas alteradas na entrevista geral) momentos e justificou cada uma das suas alterações mostrando que sabia sobre o que estava a ser perguntado e que já tinha pensado sobre tal. Este par mostra uma atitude positiva perante a disciplina e, como tal pensa que todos podem aprender matemática, não pensa que a matemática é difícil, nem nos problemas difíceis e nem que o conhecimento matemático é fixo e imutável. No segundo momento este par associou totalmente o desempenho na disciplina ao trabalho, empenho e estudo e o conhecimento matemático a algo que até eles podem criar e descobrir pequenas "coisas" e que este não permanece inalterável.

Par B.

O Luís. No primeiro ciclo descreveram o Luís como um aluno bom em termos de comportamento, aproveitamento e colaboração com os colegas. Parecem ter ocorrido algumas mudanças ao nível das conceções deste aluno entre o primeiro momento e o segundo. No primeiro momento respondeu com bastante confiança e segurança e no segundo algumas das questões não foram respondidas com tanta segurança mostrando-se indeciso, visto que assinalou a resposta e depois riscou ou colocou uma extra. O Luís discordava que "Todos os alunos conseguem aprender matemática" mas achava que se ele se empenhar consegue aprender matemática. No segundo momento já acha que "Todos os alunos conseguem aprender matemática" e concorda totalmente que se ele se empenhar consegue aprender matemática. Quanto à capacidade de aprender matemática no primeiro momento discordava que era inata e discordava que quando estuda não entende a matemática e no segundo momento quanto à primeira afirmação passou a concordar e quanto à segunda manteve a sua opinião. Este aluno parece atribuir grande parte da capacidade de aprendizagem da matemática ao trabalho, empenho e estudo mas está com insegurança quanto ao facto dessa capacidade também poder ser por motivos inatos. Em ambos os momentos considera-se um aluno com jeito para a matemática e que é bom à disciplina, escrevendo "eu sempre fui bom aluno a matemática". Quanto à dificuldade desta, no primeiro momento discordou totalmente que "é muito difícil" e no segundo momento passou apenas a discordar. Assim, demonstra uma atitude muito positiva perante a disciplina. No entanto, quando lhe falavam de matemática não se lembrava dos problemas difíceis, apenas se lembrava que ia fazer cálculos. No segundo momento, quando lhe falam da disciplina, lembra-se dos problemas difíceis e que vai "fazer cálculos". Para resolver esses problemas considerava que conseguia percebê-los melhor quando os resolve a pares e depois passou a achar que não. No que concerne ao conhecimento matemático o Luís tem as suas ideias bastante alinhadas, no entanto entre o primeiro e o segundo questionários foi no último onde revelou mais incerteza no que responder. Este aluno, no primeiro e segundo momentos, considera que consegue criar conhecimento matemático, que na matemática pode-se questionar, argumentar e fazer interpretações pessoais, que o professor não é o único transmissor desse conhecimento pois "a matemática está em todo o lado" e no segundo momento colocou que concordava (mas também registou 2,5 e rodeou, sendo que o 2 corresponde ao discordo e o 3 ao concordo) e que o conhecimento matemático que se altera, tendo mostrado alguma insegurança no seu registo.

O Zé. No primeiro ciclo descrevem-no como um aluno muito bom mas, que por vezes era precipitado nas respostas que dava, bastante falador e tinha excesso de confiança. Considerado excelente em todas as disciplinas ao nível da aprendizagem, curiosidade, comportamento e gosto pelo ensino. Não foram detetadas aparentes mudanças ao nível das conceções deste aluno entre o primeiro momento e o segundo pois responde de forma confiante e segura. O Zé concordava que "Todos os alunos conseguem aprender matemática" e que se se empenharem conseguem aprender. No segundo momento passou a concordar totalmente com a primeira e manteve a opinião relativamente à segunda. Quanto à capacidade de aprender matemática no primeiro momento discordava totalmente que era inata e que quando estuda não entende a matemática. No segundo momento quanto à primeira afirmação passou a considerar que a capacidade era inata e na segunda questão deixou de ser tão absoluto, passando a discordar. Este aluno parece atribuir, em grande parte, a capacidade de aprendizagem da matemática ao trabalho, empenho e estudo mas revela ter algumas dúvidas se não se deve também às capacidades inatas. No entanto, no primeiro momento referiu no questionário que não era inato porque "com um pouco de estudo logo se fica bom". Considera-se um aluno com jeito para a matemática e que é bom à disciplina. Quanto à dificuldade desta, no primeiro momento discordou totalmente que "é muito difícil" e no segundo momento passou apenas a discordar. Assim, demonstra uma atitude positiva perante a disciplina mas a sua autoestima parece ter baixado. Quando lhe falavam de matemática lembrava-se que ia fazer cálculos mas não se lembrava dos problemas difíceis. No segundo momento continuava a lembrar-se que ia fazer cálculos mas também dos problemas difíceis. Para resolver esses problemas considera que consegue percebê-los melhor quando os resolve a pares. No que concerne ao conhecimento matemático o Zé tem as suas ideias alinhadas mantendo-se coerente entre o primeiro e o segundo momentos (com pequenas oscilações). Considera que consegue criar conhecimento matemático, que na matemática pode-se questionar, argumentar e fazer interpretações pessoais, que o professor não é, de todo, o único transmissor desse conhecimento e que o conhecimento matemático não é fixo e imutável.

Síntese comparativa de conceções do par B.

Comparando os alunos do par B foi possível verificar as seguintes semelhanças e diferenças ao nível das conceções.

Os alunos do par estavam de acordo e mantiveram a opinião entre o primeiro e o segundo momento, nas seguintes afirmações: discordaram que não têm jeito para a matemática, que a matemática é muito difícil, que nunca foram bons alunos a matemática, que mesmo quando estudam não entendem a matemática, que na matemática não se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais, que o conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera); concordaram que se eles se empenhassem, conseguiam aprender matemática, que quando lhe dizem que vão ter a aula de matemática se lembram que vão fazer cálculos, que o professor deles gostava de matemática e que os alunos conseguem criar conhecimento matemático.

Os dois alunos estavam sempre de acordo, mas alteraram os dois as suas ideias, inicialmente discordavam e depois passaram a concordar que a capacidade para aprender a matemática nasce com as pessoas e que quando lhes falavam em matemática lembravam-se de problemas difíceis. Os dois alunos tinham a mesma opinião no primeiro momento, mas o Luís no segundo momento alterou-a. Concordavam que o trabalho a pares os ajudava a perceber melhor os problemas e, depois o Luís passou a discordar; discordavam que só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático e, no segundo momento, o Luís passou a concordar.

Numa das afirmações, no primeiro momento os alunos do par não tinham a mesma opinião, mas o Luís no segundo alterou-a passando a concordar, que todos os alunos conseguem aprender matemática.

O Luís e o Zé em todas as afirmações estiveram, pelo menos, num dos dois momentos, com a mesma opinião. O Luís foi o que alterou mais as suas opiniões. Talvez motivado pela diferença com que cada um destes alunos reage perante uma tarefa e a nítida dificuldade que este par teve em trabalhar como tal. Este par mostrou sempre uma atitude positiva perante a disciplina, acham que têm jeito para a matemática, que a disciplina não é muito difícil e discordam que nunca tenham sido bons alunos. Atribuem o bom desempenho na disciplina ao estudo e trabalho. No entanto o Luís, no segundo momento, discordou que mesmo que se empenhasse podia aprender matemática. Consideram que a matemática é cálculo, mas passaram a pensar também nos problemas difíceis. Para eles na matemática pode-se questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais, o conhecimento matemático altera-se e que eles conseguem criar conhecimento matemático.

Síntese comparativa de conceções dos Casos.

Para melhor comparar as possíveis alterações entre os elementos dos casos foi efetuada uma tabela comparativa nos dois momentos (Anexo G). O par A esteve menos em acordo nas suas conceções que o par B. Os dois pares mostram ter uma atitude positiva perante a disciplina; como tal pensam que todos podem aprender matemática, que a matemática não é muito difícil, discordam que nunca tenham sido bons alunos à disciplina, à exceção do Eduardo, todos pensam que têm jeito para a matemática. Atribuem o sucesso ao estudo, empenho e trabalho, e para eles na matemática pode-se questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais, o conhecimento matemático altera-se e conseguem criar conhecimento matemático.

Dos quatro alunos observados o Eduardo foi o que alterou mais as suas conceções e de forma positiva. Passou a considerar que o desempenho matemático se deve ao estudo e empenho e, não é inato. A matemática não é cálculo e que se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais, que os alunos são capazes de criar conhecimento matemático e, como tal, não é a professora a única que pode transmiti-lo. Apesar deste aluno não ter registado no primeiro questionário uma visão positiva, sempre mostrou atitude positiva perante as tarefas.

O Eduardo e o Luís foram os alunos que mais alteraram as suas conceções e os que apresentaram mais raciocínios distintos, maior envolvência, mais tentativa de generalização e concentração mostraram ter. Será que existe alguma relação entre a mudança das conceções e o grau de envolvência dos alunos nas tarefas propostas? Será que o facto de “serem bons alunos” fez com que preenchessem o primeiro questionário como pensavam que seria esperado que o fizessem? No entanto, o Luís e o Eduardo passaram a ter uma ideia negativa sobre o trabalho a pares.

II Parte – Apresentação e análise das tarefas

Tarefa 2.

Par A.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo E – Resolução da tarefa 2).

O nível de desempenho global do par A na tarefa 2 é considerado médio, porque parece ter efetuado a leitura do enunciado com compreensão; consideraram todos os dados e compreenderam e interpretaram algumas questões da tarefa autonomamente, noutras fizeram-no porque puderam contar com ajuda da professora ou da investigadora; resolveram corretamente as questões solicitando esclarecimentos da professora ou investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentaram um trabalho organizado; construíram um raciocínio e explicação corretos; apresentaram com rigor a estratégia utilizada; utilizaram esquemas, representações ou materiais manipuláveis para resolver parte da tarefa; não aplicaram de modo totalmente correto os conhecimentos matemáticos necessários mas pareceu que os possuíam; construíram uma explicação correta mas incompleta; explicaram corretamente após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram; explicaram corretamente porque o professor fez uma série de questões que levaram os alunos a refletir; apresentaram argumentos mas com alguma "fragilidade".

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram todos os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Após iniciarem o trabalho com o material manipulável, contando 14 palhinhas ouve-se o Diogo "Dois de lado depois separa. Um, dois, três, quatro, cinco" (17.01.2011).

A maioria das questões que resolveram corretamente conseguiram interpretar e compreender correta e autonomamente. No entanto, numa das doze questões tiveram que recorrer ao apoio da professora como se pode ver na resolução da tarefa (Anexo E – Resolução da tarefa 2).

A entrevista foi fundamental para que a investigadora conduzisse o par à reflexão. Algumas das respostas apresentadas no trabalho escrito transpareciam que o par não se tinha empenhado o suficiente, como nas restantes, e que se tinha cingido ao que lhes parecia, sem refletir e/ou argumentar. Por exemplo: o par estava a responder à questão 2 e o Diogo resolveu ler a questão 4 e comentou para o colega "Aposto contigo que tem menos comprimento e mais largura tem mais área" (quando chegaram à questão 4 registaram esta conjetura) e depois na entrevista concluem dizendo que não estava bem que "faltou explicar melhor"; outro exemplo: o

Eduardo leu a questão 6 e imediatamente disse que se verificava também para 20 ou 30 palhinhas… O Diogo pediu-lhe “não, tem calma…”, ao que o Eduardo voltou a responder-lhe “sim, a professora disse que dava para todos…”. Na entrevista disseram que não apresentaram um trabalho completo porque não tiveram tempo. Nas gravações áudio confirma-se esta preocupação e observa-se uma alteração no desempenho do par. Verificando-se que o Eduardo deixou de tentar encontrar argumentos matemáticos para convencer o Diogo de que o seu raciocínio estava correto. Ouvindo-se o Eduardo “Sim, a professora disse que dava para todos.” (17.01.2011).

Apresentaram um trabalho escrito organizado e, na maioria, os raciocínios e explicações estavam corretos. As repostas incompletas ou com raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista (18.01.2011).

Inv. – [resolvem e param no 4x3] Já fizeram todas?
Diogo – sim.
Inv. – Porquê?
Edu – Porque a partir daí temos retângulos com área iguais. […]

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa e em algumas recorreram a uma estratégia para resolverem corretamente. Na questão 1 iniciaram a resolução por experimentação e depois prosseguiram de uma forma organizada. O Eduardo justificou o retângulo por onde começaram a resolução “Porque foi o que nos veio à cabeça e que dava para construir com as 14 palhinhas” (18.01.2011).

Na questão 7 começaram igualmente por experimentação, depois estavam a dividir por 2 a medida da área (como faziam com o perímetro para achar o comprimento e a largura) e, como concluíram que assim não dava passaram a experimentar pelas tabuadas da multiplicação por ordem crescente.

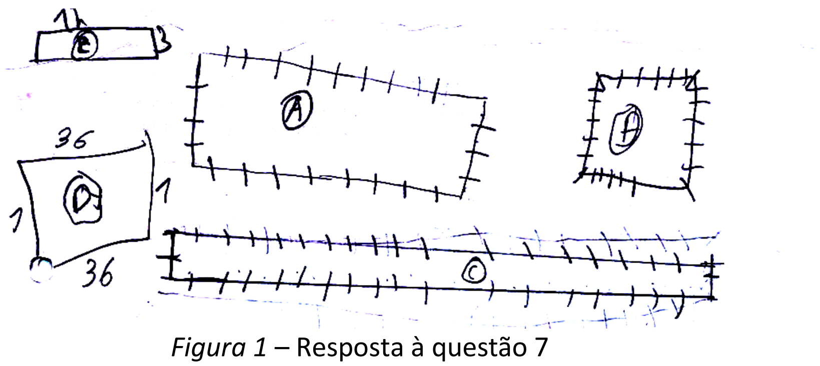


Figura 1 – Resposta à questão 7

O par precipitou-se e a verificação das respostas nas questões onde se pretendia que generalizassem (6 e 12) não foi feita ou não foi feita devidamente, sendo necessário explorar na entrevista. Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários, apesar de existirem algumas confusões entre perímetro e área e dúvida na classificação do quadrado como retângulo, parecendo que eles não estão convencidos desta classificação, mas dizem-na com base na informação da professora.

> Edu – Mas temos aqui uma dificuldade!
> Diogo – Não, que o quadrado também é um retângulo! (18.01.2011)

Quando na aula a dúvida surgiu para o Diogo,

> Diogo – Mas isso é um quadrado.
> Edu – E é um retângulo, a professora disse que podia!
> Diogo – Pois podia. (17.01.2011)

No entanto, para acharem as diferentes possibilidades de medidas do comprimento e da largura quando o perímetro é constante, revelam possuir os conhecimentos matemáticos necessários. Como por exemplo, “[o retângulo] Tem os lados iguais dois a dois” (18.01.2011).

Esclareceram a confusão inicial entre área e perímetro dentro do par, mas continuava a haver alguma indefinição no que consideram como comprimento e largura, “Ai, faltava-nos dizer que é a largura na horizontal e não na vertical” (Diogo, 18.01.2011).

Os argumentos apresentados surgiram com algumas “fragilidades” que dificultou a generalização dos mesmos. Nas questões 6 e 12 não tiveram o cuidado de apresentar no trabalho escrito argumentos gerais e resistentes, apesar de, aparentemente, terem convencido os seus colegas e professora. Exemplo de um argumento apresentado pelo Eduardo para justificar a invariância do perímetro dos diferentes retângulos: “São todos iguais porque todos têm o mesmo número de palhinhas…” (17.01.2011) e para não desenharem mais retângulos utilizando 14 palhinhas, do que os três desenhados “Porque a partir daí temos retângulos com área iguais.” (Eduardo, entrevista 18.01.2011).

Na questão 5 utilizaram um argumento não geral para responderem à questão porque recorreram a um caso particular dos retângulos desenhados, mas formularam uma conjetura: “Consideramos os retângulos que escolhemos (A e C). O C é o que tem menos área porque tem mais comprimento e menos largura.” .

Na questão 11 continuaram a responder de modo particular: “Escolhemos o A e B e comparamos. O que tem menos perímetro é o B.”.

Assim verifica-se que quando a medida do perímetro é constante conseguiram apresentar argumentos gerais, para a maior área e para a menor, “Os números começam a aproximar-se mais… a área vai ser maior. Quando estão mais afastados a área vai ser menor.” (Diogo, 18.01.2011). No entanto, quando a área é constante tiveram dificuldades em apresentar um argumento geral, quer para o maior quer para o menor perímetro. No trabalho escrito escreveram que os retângulos “Têm a mesma área e não têm o mesmo perímetro”. Durante a resolução da questão o par conversava mostrando-se em concordância, satisfeito com a resposta e convencido de que o que escreveram estava correto.

Quando questionados na entrevista (18.01.2011) dizem que faltava explicarem-se melhor.

Inv. – E quando é maior a medida da perímetro?
Edu – É quando os números estão mais afastados.
Inv. – E quando é que é menor a medida do perímetro?
Edu – É este, que é 24!

Para o menor perímetro ficaram-se por um argumento particular mesmo depois de lhes ser pedido para pensarem em retângulos com quaisquer medidas de área eles continuaram a escolher dois dos retângulos desenhados.

O nível da argumentação colaborativa do par foi média porque trabalharam quase sempre através do debate, partilharam conhecimentos matemáticos, trabalharam em conjunto para resolver o mesmo assunto, a argumentação decorreu como diálogo (Anexo E – tarefa 2), e não pareceu que desenvolvessem o trabalho para uma aprendizagem competitiva.

No entanto, surgiram raros momentos de argumentação agressiva durante o trabalho escrito (17.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiram.

Edu – Sim, a professora disse que dava para todos…
Diogo – Tu não me deixas ver a pergunta! […]
Edu – Oh Diogo, está quieto! Então 4x 6 não dá 36!?

As dificuldades identificadas durante a resolução da tarefa que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: a passagem do raciocínio do par para o trabalho escrito; limitação das construções dos retângulos às situações não congruentes tornando-se num obstáculos à generalização; o tempo; agirem como se considerassem a professora como a única transmissora do conhecimento; a compreensão das questões. Algumas destas dificuldades foram sendo superadas durante a entrevista.

O tempo foi um grande limitador do desempenho do par nas questões que deixaram para resolver por último, sendo, principalmente, nas últimas questões que se verificou a falta de reflexão. O Diogo referiu que não responderam devidamente à 6 e à 12, "Pois… íamos fazer e depois acabou o tempo!". A reação dos elementos do par quando a professora disse "vamos terminar" foi evidente, pois o Eduardo exclamou imediatamente "Ainda nos falta a última página…" e, prontamente regista como resposta à questão 9 "Observamos que áreas dos retângulos são sempre as mesmas!", mesmo com o seu colega a protestar "Só dizes isso para despachar.". No entanto, quando a professora voltou a alertar o término do tempo já foi o Diogo que propôs, "Rápido … rápido…". Passaram para a questão seguinte sem verificar nem refletir sobre a resposta. Por exemplo, na questão 6, quando se estende para 20 palhinhas o Eduardo escreve inicialmente “sim dá” argumentando junto do colega “sim, a professora disse que dava para todos”.

Um argumento do Eduardo que surgiu como incontestável foi “a professora disse…”. Esta afirmação está alinhada com as conceções que revelou, mas não com as do seu colega. No entanto, ele não é capaz de contra argumentar mediante esta imposição.

Penso que alguma instabilidade, ao nível de trabalho dentro do par, se deve ao sentido de responsabilidade, à consciência dos limites da sua capacidade (metas) e à aptidão para refletir e identificar a matemática no que o rodeia, serem muito diferentes entre os dois. Talvez seja por essas diferenças que o Eduardo se irritava com facilidade quando o Diogo “brincava” enquanto resolviam a tarefa. Sentimento que também manifestaram durante a entrevista geral, como se pode ler anteriormente. Por estas razões talvez, este par não fosse o mais adequado. O Eduardo precisava de alguém mais calmo, ponderado e, como ele diz “organizado”. Na entrevista geral mostrou que lhe agradava o facto do Diogo ter um bom raciocínio, caso contrário não ia gostar de trabalhar, dizendo “Gosto de trabalhar com um aluno que é bom porque se não é bom ele não gosta de trabalhar e depois… é chato! Diogo estou a elogiar-te!”. Ponderando as dificuldades que o Eduardo sentiu em dialogar com o Diogo, de forma calma e “organizada”, faz pensar que não foi boa a formação do par. Possivelmente, o Eduardo teria melhor desempenho com o Luís do par B, devido às suas características. A professora para eles continuava a ser a autoridade o que por vezes dificultou a predominância da argumentação nos diálogos em par ou em grande grupo. Hunter (2007) refere que compete ao professor não apresentar, durante um esclarecimento, o seu raciocínio, mas pode colocar questões que clarifiquem o seu raciocínio. Deste modo os alunos, como não obtêm a resposta imediatamente do professor, passarão, progressivamente, a confiar mais em si e a não achar que a professora é a detentora da verdade até porque é ela que lhes “dá” as respostas “certas”. No entanto, parece que este par tem bastante consciência de quem é que é capaz de transmitir e/ou criar conhecimento matemático. Podendo-se analisar tal pelo diálogo na entrevista geral:

> Inv. – Se o professor não é o único transmissor do conhecimento matemático, então quem o pode transmitir? […]
> Diogo – Os cientistas e os professores! […]
> Diogo – E o pai e a mãe. [em simultâneo] […]
> Edu. – Criar? Só os cientistas! Agora dizer…
> Diogo – É o pai e a mãe.
> Edu. – Os cientistas e toda a gente, pode.
> Inv. – Então vocês nunca criam ou recriam conhecimento matemático!?
> Diogo – Já!
> Edu. – Sim, mas são coisas mínimas. Por exemplo, naquelas formas de contar! Aquelas formas de contar foi uma maneira que nós criamos para contar. Criamos!

Para que eles deixem de considerar que a professora é que lhes diz se está bem ou mal e/ou a resposta, é necessário, como Komatsu (2009) refere, dar oportunidade ao aluno para que ele passe a ter mais protagonismo e conseguir desenvolver um trabalho mais abstrato na sala de aula.

Par B.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo F – Resolução da tarefa 2).

O nível de desempenho global do par B na tarefa 2 é considerado médio, porque compreenderam e interpretaram corretamente alguns aspetos na maioria das questões; após o esclarecimento do significado de algumas palavras compreenderam a tarefa; resolveram corretamente mas de forma insegura esperando muitas vezes a aprovação da professora; apresentaram alguns raciocínios e explicações parcialmente corretos, parecendo faltarem-lhe conhecimentos matemáticos ou não se lembraram deles; falta de rigor na apresentação da estratégia; estratégia utilizada dificultou a generalização; recorreram a materiais manipuláveis para concretizar a tarefa; realizaram trabalho mas não completaram a tarefa durante a aula tendo que recorrer ao tempo da entrevista para o fazer; a estratégia escolhida permitiu-lhe chegar à solução por recorrência; apresentam um trabalho pouco organizado; revelam possuir alguns dos conhecimentos matemáticos necessários; apresentaram uma explicação incompleta após a professora fazer uma série de questões que os levaram a refletir; os argumentos apresentados durante a aula tinham fragilidades, não foram resistentes, nem gerais, nem convincentes, nem rigorosos, nem completos e nem válidos.

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita quase sempre com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Ao lerem o enunciado da questão 2 surgiram-lhe dúvidas. O Zé lê a questão 2, depois lê novamente e comenta "1 palhinha é 1 unidade de comprimento?! Professora…! Não estamos a perceber isto!". De imediato pediram ajuda à professora para os esclarecer o que era considerado como uma unidade de área.

Após iniciarem o trabalho com o material manipulável, contando 14 palhinhas ouve-se o diálogo sem qualquer discussão entre os dois alunos, "1, 6; 2, 5; 3, 4" (17.01.2011).

Conseguiram interpretar e compreender correta e autonomamente algumas questões e resolveram corretamente a maioria das questões. No entanto, em quatro questões, tiveram que solicitar o apoio da professora ou investigadora, como se pode observar na resolução da tarefa

(Anexo F – Resolução da tarefa 2). Após verem as suas dúvidas esclarecidas completaram corretamente o tabela da questão 2. A entrevista foi fundamental para que a investigadora conduzisse o par à reflexão e completasse a tarefa.

Algumas das respostas apresentadas no trabalho escrito transpareciam que o par se tinha cingido ao que lhes parecia, sem refletir e raramente apresentaram argumentos. Ao primeiro obstáculo que lhes surgia recorriam imediatamente à professora ou à investigadora. Por exemplo: o Luís, na questão três, disse que tinha "…que ter obrigatoriamente 14 de perímetro" mas como o Zé discordava chamou imediatamente a Professora dizendo que não estava a perceber a questão; outro exemplo: estavam a desenhar retângulos com 36 unidades de área, o Zé lembra-se que se calhar dava "Pela tabuada que só tenha números pares. Tabuada do 2." Mas para confirmar pergunta "Professora podemos fazer o 2x 13?" (17.01.2011).

Na questão 6 e 12 apenas registaram "é válido". Na 6 ainda verificaram se dava para 20 palhinhas, fazendo 9, 9, 1, 1, mas na 12 já nem verificaram porque quando o Luís se lembra de verificar parte do trabalho o seu colega diz "Isso não interessa agora! Deixa de ser burro! Já acabamos.". No momento em que o Zé anunciava que tinham terminado, verifiquei o trabalho e perguntei porque não justificaram algumas respostas, ao que o Luís disse que pensava que não era preciso. Nas gravações áudio confirma-se que o Zé tinha "vontade" de terminar a tarefa antes do outro par. No entanto, o Luís estava mais preocupado em verificar algumas das respostas.

Apresentaram um trabalho escrito organizado e com alguns raciocínios e explicações corretos. As repostas incompletas ou os raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista, porque a investigadora fez uma série de questões que os levaram a refletir.

Inv. – Na questão 4 vocês disseram que obtinham "multiplicando o comprimento pela largura".
Zé – Para fazer com quadrados.
Luís – Aquilo dos quadrados estava a ver o que dava por ali, eu como sabia que o comprimento largura também dava… […]
Luís – Quando o comprimento é mais grande e a largura é menor é a que tem menos área.
Inv. – Tens a certeza? E se for ao contrário?
Luís – Tem maior área. […]
Inv.– Qual é o que tem menor área? O que acontece entre a medida do comprimento e da largura?
Zé – Maior o comprimento e menor a largura.
Inv. – E se fosse ao contrário? [referindo-me à maior área]
Zé – Era igual… 3x4 ou 4x3 dá 12. […]
Inv. – O que acontece aos números?
Luís – Estão quase a fazer o mesmo número e estão quase a fazer os mesmos números e a trocar de posições! (18.01.2011).

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa. Na questão 1 resolveram de uma forma organizada, ouvindo-se no diálogo como se pode observar na resolução da tarefa (Anexo F – Resolução da tarefa 2).

Durante o trabalho escrito, na questão 4 não responderam ao pedido nem explicaram o raciocínio; na questão 6 e 12 não apresentaram a verificação que lhes permitiu responder; na questão 7 resolveram por experimentação, procurando dois números naturais cujo produto fosse 36. Como o par se precipitou e a verificação das respostas nas questões de extensão não foi feita, ou foi feita indevidamente, foi necessário, na entrevista, fazê-los refletir.

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários, de comprimento, largura, área e perímetro. Apenas numa das justificações o Luís se referiu a número designando-o por algarismo.

Os raros argumentos que surgiram do trabalho do par apresentaram algumas "fragilidades" que dificultou a generalização dos mesmos. Nas questões 6 e 12 não tiveram o cuidado de apresentar no trabalho escrito argumentos gerais e resistentes. Exemplo de um argumento apresentado para justificar a invariância do perímetro dos diferentes retângulos: "Todos os retângulos têm 14 de perímetro. Se temos 14 palhinhas o perímetro é de 14.". Na resolução não houve consenso entre o par e como queriam registar uma resposta chamaram a professora para lhes "dizer".

> Luís – Mas se temos 14 palhinhas tem que ter 14 de perímetro.
> Zé – Não, não é nada.
> Luís – Vai ter obrigatoriamente 14.
> Zé – Não, não.
> Prof. – Quem chamou?
> Zé – Fomos nós, não estamos a perceber esta. (17.01.2011).

Argumento utilizado para não desenharem mais retângulos utilizando 14 palhinhas,

> Luís – Ia dar igual a esta, esta igual a esta e esta igual a esta mas só que ao contrário.
> Inv. – Conseguem dizer quantos retângulos era possível construir com 14 palhinhas?
> Zé – 3. (entrevista, 18.01.2011).

Argumento utilizado para responder a um colega,

> Luís – Lembra-te da outra vez a professora ter dito… O que é a área? É comprimento vezes largura.
> Zé – E o que é que tem?
> Luís – 4x3… 12 de área. (17.01.2011).

Assim, quando surge a questão "O que pensamos acerca da área dos retângulos?" o Luís viu a sua resposta aceite sem ser contestada:

> Luís – Acerca da área é o comprimento vezes largura!
> Zé – Os retângulos são todos diferentes.
> Luís – São todos diferentes. […]
> Luís – Multiplicamos comprimento vezes a largura.
> Zé – M-U-L-T-I-P-L-I-C-A-M-O-S [escrevem] … (17.01.2011)

Na entrevista, mediante a condição de invariância do perímetro, conseguiram apresentar um argumento geral para a maior e menor área, "Quanto mais próximo são maiores, se estiverem os números, maior será a área. […] É como eu estava a dizer se estivessem mais perto seria maior e o 9 e o 1 estão muito longe” (Zé, 18.01.2011).

Na questão 5, o argumento apresentado pelo Luís e aceite pelo seu colega foi “O que tem menor largura é o que tem… O que tem maior comprimento e menor largura é o que tem menos.” (Luís, 17.01.2011).

Estando registado no trabalho escrito um argumento não geral, recorreram aos retângulos desenhados para responderem à questão e, com base neles, formularam uma conclusão: “É o retângulo A. Porque é o que tem maior comprimento e menor largura.”

Na questão 11, responderam de modo pouco claro, sem identificarem os dois retângulos escolhidos em particular: “É de 24”.

Quando questionados como podiam ter o maior perímetro entre retângulos com a mesma área, o Luís responde, “Para ter maior perímetro é necessário ter maior comprimento e menor largura.”; “E para ter menor?” O Luís responde “É necessário ter as medidas dos lados mais aproximadas.” (17.01.2011).

Assim verifica-se que quando a medida do perímetro é constante conseguiram apresentar argumentos gerais, para a maior área e para a menor, mas quando a área é constante tiveram dificuldades em apresentar um argumento geral principalmente para o maior perímetro. No trabalho escrito escreveram que nos retângulos que desenharam “A área é sempre igual”. Durante a resolução da questão o par conversa e solicita a ajuda da professora, no final mostraram-se em concordância, satisfeitos com a resposta e convencidos de que o que escreveram era o esperado. Quando questionados na aula (17.01.2011) o Zé olhava sem se manifestar, para ele já tinha terminado a tarefa, contrariamente o Luís respondeu prontamente como obtinha o menor e o maior perímetro. No entanto, para o menor perímetro ficou-se por um argumento particular e pouco rigoroso. Mesmo depois de lhe ser pedido para pensar em retângulos com quaisquer medidas de área, o Luís continuou a basear-se nos retângulos desenhados. Para o maior perímetro responderam de forma mais completa e rigorosa.

O nível da argumentação colaborativa do par foi fraca porque não souberam trabalhar em conjunto. Quando discordavam para “desfazer” essas divergências, em vez de contra-argumentarem, chamavam a professora. Os conhecimentos matemáticos partilhados eram mais pela parte do Luís, que nem sempre conseguia fazer-se ouvir pelo colega. Por outro lado estiveram envolvidos e trabalharam em conjunto para resolver as questões que estavam em acordo até à questão 9. Há que salvaguardar que quando os elementos que estão envolvidos num trabalho estão de acordo também há menos necessidade de argumentar. Neste caso o par necessitava de utilizar mais a argumentação para conseguir resolver sozinho as questões e ultrapassar os seus pontos de discórdia. A argumentação raramente surgiu como diálogo, como se pode verificar em anexo (Anexo F – Resolução da tarefa 2). Nas últimas questões da tarefa, foi notório que, um dos elementos do par, o pouco trabalho que desenvolveu foi com o objetivo de terminar em primeiro lugar, pretendendo ser competitivos com o outro par observado. No entanto, no par, não pareceu que desenvolvessem o espírito de competitividade.

Durante o trabalho escrito surgiram momentos de argumentação agressiva (17.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiam.

> Luís – O que tem menor perímetro é o 6… lembras-te?... Ora vê! O que tem menor é o que eu vou fazer. Olha agora. […]
> Zé – Isso não interessa agora! Deixa de ser burro! Já acabamos. […]
> Luís – Se é para por 14 palhinhas tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro. […]
> Zé – Oh professora, professora.
> Zé – Professora. Oh professora Joana! Não estamos a perceber a 3!
> Luís – Não sabemos se está bem. […]

As dificuldades que surgiram e que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: a compreensão das questões; a partilha do raciocínio de um dos elementos ao seu colega; o saber apresentar o seu raciocínio de forma a justificar a sua não concordância; necessidade extrema da professora para confirmar, esclarecer qual dos elementos "estava certo" e/ou ajudar a chegar à "resposta correta"; limitação das construções dos retângulos às situações não congruentes tornando-se num obstáculo à generalização; a competição por parte do Zé relativamente ao outro par do estudo.

Apesar de não considerarem a professora como a única transmissora do conhecimento porque segundo as suas conceções "o pai e a mãe também podem ensinar matemática" (Zé) e "em quase todo o lado há matemática" (Luís) mostraram que estavam completamente dependentes dela ou da investigadora. Parece que a maior dependência surge por parte do Zé, visto que foi quase sempre ele a tomar a iniciativa de solicitar apoio. No primeiro questionário das conceções ele explica-se atribuindo apenas ao pai, à mãe e à professora a capacidade de transmitir conhecimento matemático. Na entrevista geral disse que também existe conhecimento matemático nos livros (focando-se especialmente nos livros e nos professores), justificando que o pai trabalhava na construção civil e nunca o ouviu falar de potências.

Durante toda a tarefa o Zé quando discordava apenas dizia "não, não" sendo incapaz de justificar a sua negação ou de apresentar um argumento convincente ao seu colega.

Este par, possivelmente, não permitiu que os dois elementos tivessem o melhor desempenho, especialmente devido ao ritmo de trabalho de ambos e de tempo de concentração.

Penso que este par necessita de ganhar mais autonomia de trabalho e, como foi referido, é importante potenciar atividades diversificadas para "refletirem e discutirem sobre conceitos e processos matemáticos…" (Segurado & Ponte, 1998, p. 8). A alteração da cultura de sala de aula é algo que demora o seu tempo e, segundo Andriessen (2006), na aprendizagem colaborativa "as atividades argumentativas são baseadas em outras atividades" (…) onde é necessário incorporar "uma condução colaborativa impulsionada por um desejo de compreensão e de partilha com os outros" (p. 443). Segundo Komatsu (2009), para que a argumentação predomine no trabalho de sala de aula é necessário dar oportunidade ao aluno para que ele passe a ter mais protagonismo e ação, possibilitando-lhe ganhar, progressivamente mais confiança e autonomia.

Os alunos consideraram a tarefa longa e repetitiva, verificando-se no registo vídeo e áudio o decréscimo do seu nível de concentração e envolvimento. Como não estavam habituados a tal dinâmica, e talvez tivessem sentido algumas dificuldades nas questões de generalização e/ou explicação do seu raciocínio pareceram-lhes "iguais".

Análise geral da turma.

A primeira reação da turma à tarefa foi positiva e foi notório o entusiasmo que o material colorido (palhinhas) para manipularem trouxe. Esse primeiro impacto foi-se desvanecendo e o grau de envolvimento dos alunos na tarefa foi diminuído ao longo do tempo e à medida que lhes era pedido que explicassem ou que generalizassem as suas respostas. Começou-se a observar alguns alunos a conversar com os seus pares sobre outros temas ou "desligavam" mesmo da tarefa, conversando com alunos de outros pares, ou esperavam por apoio da professora ou investigadora, ou passavam à frente e não faziam a questão.

O desempenho geral da turma foi médio, porque os alunos foram desenvolvendo algum trabalho ao longo da tarefa, as questões onde lhes era solicitado que registassem uma explicação ou que generalizassem as suas respostas foram as menos bem sucedidas. Após o esclarecimento do significado de alguns excertos do enunciado, tais como: "Tomando como unidade de medida de comprimento uma palhinha…", "…unidade de área, o quadrado cujo lado tem o comprimento de uma palhinha…", "verifiquem…", conseguiram compreender a maioria das questões e resolvê-las total ou parcialmente de forma correta. No entanto, alguns pares, como por exemplo, o par B, resolveram corretamente mas de forma insegura, pedindo e esperando constantemente a aprovação do professor. A maioria dos raciocínios apresentados estava parcialmente correta, mas a explicação não estava completa. Por vezes, existiu falta de rigor na apresentação da estratégia o que dificultou a generalização (questão 6 e 12). Alguns dos motivos para que tal se tenha verificado parecem ser a incompreensão de alguns conceitos como área, perímetro, comprimento, largura e quadrado com sendo um retângulo, o número excessivo de questões para justificarem, ou para explicarem o raciocínio ou para generalizarem, ser a primeira tarefa que resolveram com esta estrutura, ser-lhe exigido que pensassem sobre as suas afirmações/opções, dinâmica a que não estão habituados.

Na exploração da tarefa em grande grupo, inicialmente houve a participação de vários pares. No entanto, a partir da quarta questão, cujo grau de dificuldade para os alunos foi notoriamente maior, a argumentação coletiva sustentou-se, principalmente, com base nos dois casos, talvez porque estes alunos eram considerados pela turma e pela professora como "bons alunos". Tentaram resolver toda a tarefa antes do diálogo em grande grupo, ou pelo menos tinham chegado a pensar nas questões (Anexo F – Resolução da tarefa 2).

A argumentação coletiva foi condicionada, de certo modo, pela professora. Pareceu que devido à limitação do tempo nem todos os alunos que queriam participar tiveram oportunidade de o fazerem e nem sempre que solicitaram a palavra a professora considerava oportuna a sua intervenção. Por vezes, ao colocar o nosso ponto de vista podemos, igualmente, estar a condicionar o ponto de vista do aluno como se pode ver pelo diálogo anteriormente apresentado.

Participaram de forma organizada, mas as ideias apresentadas à turma nem sempre eram compreendidas pelos restantes (por exemplo, uma das ideias do Luís). Para aliviar esta situação a professora recorreu ao "revoicing" (Forman & Ansell, 2002) numa tentativa de lançar novamente a ideia. Em algumas questões existiu consenso coletivo inicial, desde o momento em que o primeiro par expos a sua resposta, (questões 2, 5, 7, 8, 10,11) e noutras houve dificuldade na apresentação de argumentos matemáticos capazes de justificar a sua forma de resolução (questões 6, 9, 12), os argumentos apresentados não foram gerais e não ficou claro se estes permitiam convencer os colegas.

Os pares de estudo e mais um par responderam a todas as questões, apesar de nem todas estarem justificadas. Respondendo, por exemplo, "sim, dá" ou "sim". A sexta questão é idêntica à décima segunda (sendo pedido em ambas a generalização: na primeira mantendo o perímetro variando a área, na segunda mantendo a área variando o perímetro), pelo que seria de esperar que se verificasse o mesmo número de pares com trabalho realizado. O que parece acrescer ao grau de dificuldade da questão foi a desconcentração e desmotivação porque ouviu-se "que seca!" e quando questionados sobre o motivo da sua expressão a aluna referiu "professora, gosto da tarefa mas já respondemos a esta questão!".

Foi notória a competição entre pares, e mais vincada entre os dois casos. O querer terminar de resolver a tarefa em primeiro lugar condicionou bastante o par B porque não lhes permitiu refletir o suficiente em algumas questões.

A argumentação coletiva, na sua maioria, não foi efetuada com sucesso, considerando-se fraca segundo a grelha de classificação do estudo, porque para que tal aconteça com sucesso, segundo Hunter (2007), entre outros aspetos, os alunos têm que ter a noção da importância de convencer o colega. Este aspeto pode também dever-se ao surgimento de uma pressão provocada pelo contexto social, pois há colegas que são considerados "mais capazes matematicamente" (Godino, Batanero & Font, 2004a) e a professora sendo considerada como autoridade, o que ela transmite na sala de aula, "… normalmente é aceite como correto, sem reflexão" (Forman & Ansell, 2002, p. 284) apesar de não concordarem com as argumentações apresentadas acomodam-se e não apresentam o seu raciocínio. Isto parece ir de encontro, com o que os casos referiram algumas vezes, principalmente, um dos elementos do par A, em que muitas vezes apresentou argumentos "com base na autoridade" (Normas, 2007, p. 393). Para esta turma o professor é considerado como uma autoridade e, segundo Hunter (2007), nesse momento a turma devia passar a ver o professor como organizador de aprendizagem.

Assim, considera-se que o desempenho global dos alunos ao nível da argumentação coletiva foi fraco, porque as poucas ideias que expuseram à turma fizeram-no de forma desorganizada, em metade da tarefa, a maioria das participações, basearam-se nos dois elementos do par A (como se pode verificar no diálogo abaixo transcrito), com uma ou outra intervenção do Zé (aluno do par B), e mais dois elementos da turma, respeitaram a sua vez de intervenção mas não souberam ouvir os colegas e formular a sua intervenção com base na do seu colega, expressaram-se pouco, não souberam ouvir e/ou não tentaram perceber os colegas, apresentaram argumentos incorretos, existência de consenso aparente entre os intervenientes.

Prof. – Então o que se verificou é que comprimento aumentou e a área?
Edu – Diminuiu!
Prof. – Diminuiu.
Inv. – Reparem se foi isso que se verificou. Olhem para a figura 3. Qual é o comprimento?
Edu – Comprimento?
Prof. – Então esta errado o que vocês estão a dizer…
Edu – Diminuiu
Prof. – Em relação a quê?
Edu – Em relação ao perímetro. E aumenta à área
Inv. – À área?
Prof. – A área diminuiu. (Exemplifica 9 x1) A área é igual a quê?
Edu – Ahum, ahumm
Prof. – Não estou a falar só para dois grupos!

Ao nível da argumentação utilizada foi médio porque, por vezes, o raciocínio estava correto, no entanto, não era partilhado com sucesso; utilizaram conceitos e propriedades matemáticas; iniciaram o processo de generalização; apresentaram argumentos incompletos.

De modo geral, os pares tiveram grandes dificuldades em apresentar o seu raciocínio, generalizar, argumentar e contra-argumentar.

Tarefa 3.

Par A.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo E – Resolução da tarefa 3).

O nível de desempenho global do par A na tarefa 3 é considerado médio, porque parece ter efetuado a leitura do enunciado com compreensão; compreenderam e interpretaram corretamente parte da tarefa considerando todos os dados; resolveram corretamente as questões solicitando esclarecimentos da professora ou da investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentaram um trabalho organizado; construíram um raciocínio parcialmente correto e explicação parcialmente correta ou correta mas incompleta; apresentaram com rigor a estratégia utilizada; utilizaram representações para resolver parte da tarefa; não aplicaram de modo totalmente correto os conhecimentos matemáticos necessários, mas pareceu que os possuíam; explicaram corretamente após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram ou porque a professora fez uma série de questões que os levaram a refletir; apresentaram argumentos mas com alguma "fragilidade".

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram todos os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Conseguiram interpretar e compreender autónoma e corretamente as questões. Durante o trabalho escrito, resolveram corretamente, mas com apoio da professora ou da investigadora três das quatro questões e com uma explicação incompleta. A última questão, também foi resolvida corretamente, mas durante a entrevista. Apesar da investigadora e/ou da professora oferecerem apoio, sempre que acharam conveniente, para o bom desempenho do par durante a tarefa. No momento em que o Diogo estava a "brincar" foi necessário alertá-lo dizendo ao Eduardo para o pôr a trabalhar.

A entrevista foi fundamental para a investigadora conduzir o par à reflexão e ao esclarecimento de alguns raciocínios. Nalgumas das respostas apresentadas no trabalho escrito transparecia que o par não se tinha empenhado e/ou concentrado o suficiente. Por exemplo na entrevista:

> Inv. – Na expressão numérica só fizeram 7x9… o que é que vos faltava?
> Edu. – Menos!
> Diogo – Ele é que fez isso sem a minha autorização!
> Inv. – Então completa! Menos o quê?
> Diogo – Menos 4.
> Inv. – Assim não estão a seguir a vossa regra!
> Diogo – Então é menos o que está dentro!
> Edu. – Ah… Pois! (24.01.2011)

Na entrevista, o Diogo aproveitou de imediato para acusar o Eduardo, e este, por sua vez, defendeu-se dizendo "Fiz, fiz… nem estavas a olhar para isto…" (Eduardo, 24.01.2011). Após este diálogo, o par completou o trabalho iniciado na aula. Nas gravações áudio confirma-se esta preocupação do Eduardo e, o Diogo após ser chamado à atenção observa-se uma alteração no seu desempenho, deixando de fazer ruídos e ações sem sentido para passar a colaborar com o Eduardo. Ouvindo-se,

> Inv. – Ó Eduardo tens que o pôr a trabalhar… que estou a ver muita preguiça.
> Diogo – Ele é que não me deixa fazer… [Eduardo dá-lhe a folha]
> Edu. – Olha para aquilo…
> Diogo – Eu sei o que estou fazendo. (19.01.2011).

Apresentaram um trabalho escrito organizado e, na maioria, os raciocínios e explicações estavam corretos e apresentados com rigor. As repostas incompletas ou com raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista.

> Edu – Pois e nós metemos 199!
> Diogo – Pois mas tu concordaste!
> Inv. – Quantos é que tiraram?
> Edu e Diogo – Um.
> Inv. – E quanto precisavam de tirar?
> Diogo – Dois e ficava 198. E tu concordaste por isso não comeces a resmungar!
> Edu. – É melhor fazer isto de novo. (24.01.2011).

No entanto, na questão 4 quando confrontados na entrevista com a sua resposta verificaram que estava incorreto e detetaram o erro. Quando corrigiram o erro não foram capazes de aplicar a estratégia de resolução que tinham registado anteriormente. O Eduardo considerou que a estratégia utilizada na questão 4 era a mais fácil. As expressões numéricas foram escritas segundo a estratégia de resolução que o Diogo defendia. A estratégia do Eduardo foi a mais utilizada pelos pares da turma, apesar destes não se manifestaram.

Na questão 1 optaram por recorrer a uma estratégia, iniciaram a resolução por contagem unidade a unidade e depois de observarem melhor encontraram outras formas de contagem mais organizadas, como se pode verificar na resolução da tarefa do par A (Anexo E – Resolução da tarefa 3).

O par precipitou-se e não verificou cuidadosamente as expressões numéricas que escreveram, sendo necessário serem exploradas na entrevista.

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários, apesar de existir algumas confusões entre perímetro e área (Anexo E – Resolução da tarefa 3). O Eduardo se tivesse bem presente o conceito de área, contra argumentava o que o colega estava a dizer. Em vez de "corrigir" o colega ele confundiu-se e repetiu o raciocínio anterior. No momento em que se pede outra forma de resolução eles já não se recordavam (Anexo E – Resolução da tarefa 3).

Os argumentos que surgiram foram poucos mas rigorosos e gerais. No entanto, parece que não foram resistentes e convincentes porque o Diogo transmite a ideia de que não ficou convencido que a forma como o Eduardo resolveu seria a melhor. Quando o Eduardo foi fazer o trabalho escrito registou uma expressão numérica que representa outra forma de visualização do número de quadrados da moldura e, na questão 3, o Diogo registou ainda outra.

Inv. – Qual afinal tinha sido a vossa estratégia? Porque alteraram depois?
Edu. – Se calhar foi assim… nós vimos que as duas maneiras dava então fizemos primeiro a maneira dele e depois fizemos a minha maneira.
Inv. – Ah.
Edu. – Mas primeiro vimos que as duas estavam certas!
Inv. – Agora já concluíram alguma coisa?
Edu. – Sim, a minha é melhor!
Diogo – Oh, nas baixas a outra também! (entrevista geral)

Exemplo de um argumento apresentado para justificar o seu processo de resolução:

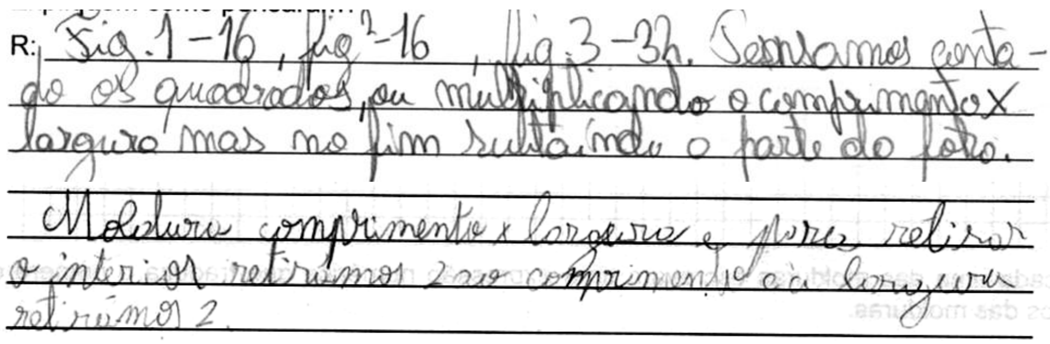

R: Fig.1 – 16, fig2 – 16, fig3 – 32. Sabíamos contado os quadrados, ou multiplicando o comprimento x largura mas no fim subtraindo a parte da foto.
Moldura comprimento x largura e para retirar o interior retirámos 2 ao comprimento e à largura retirámos 2.

Figura 2 – Resposta à questão 1

Na entrevista geral (realizada após algum tempo do termino do estudo) ainda não estava bem clara qual seria a "melhor" forma de resolução: contagem 2 "quadrado a quadrado" "1,2,3,4,5,6,7,8,9,10! 1,2,3,4…" (Eduardo); contagem de forma agrupada comprimentos e larguras "6, 12… tem calma… 12 mais 10 e 10 20…" (Eduardo) […] "10 e 10 20 com mais 12 32. A maneira mais fácil não é esta?" (Diogo) […] "Somar mas sem contar o mesmo quadrado duas vezes… portanto, só podemos contar um azulejo uma vez!"; cálculo da área correspondendo cada azulejo a uma unidade de área "É a dele! Com números mais altos é a dele mas mais baixos é pela área!".

O argumento utilizado para explicarem que a sua estratégia de resolução estava correta foi o seguinte: "Fizemos cxl mas dava isto tudo! Depois tiramos a parte da foto!" (24.01.2011).

No trabalho escrito agruparam de diferentes formas os azulejos que rodeavam cada pintura e escreveram as respetivas expressões numéricas.

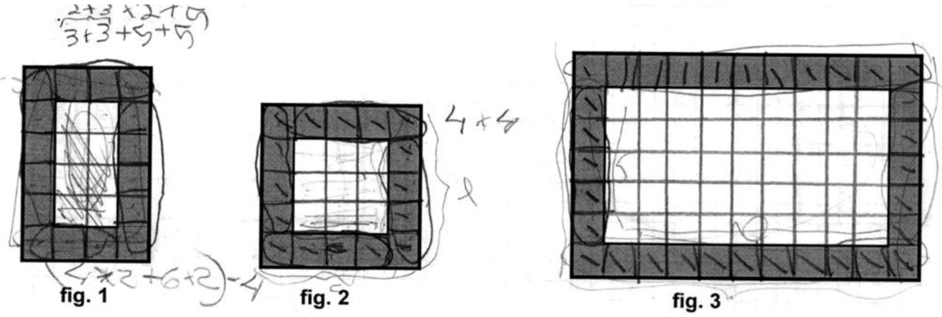


Figura 3 – Agruparam os quadrados da moldura

Durante a resolução da questão o par conversava mostrando-se em concordância, satisfeito com a resposta e convencido de que o que escrevera estava correto e pela forma mais fácil, apesar dos diálogos serem um pouco atribulados. O Diogo estava bastante brincalhão, mesmo estando sempre envolvido na tarefa, fazendo com que o Eduardo não o levasse a sério.

O nível da argumentação colaborativa do par foi médio porque trabalharam quase sempre através do debate, partilharam conhecimentos matemáticos, trabalharam em conjunto para resolver o mesmo assunto, a argumentação decorria como diálogo, mesmo que perturbado, e não pareceu que desenvolvessem o trabalho para uma aprendizagem competitiva. Sentiram ainda dificuldades em ouvir-se, raciocinar sobre o que o colega dizia e tiveram pouco tempo para refletirem. A rara argumentação surgiu como diálogo como se pode verificar nos registos áudio (Anexo E – Resolução da tarefa 3).

Mas surgiram raros momentos de argumentação agressiva durante o trabalho escrito (19.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiram. O Diogo estava irrequieto e o Eduardo já não o conseguia ouvir nem o levava a sério.

Diogo – Pensamos contando os quadradinhos… contando os quadra-dra-dos-dos.
Edu. – Está calado pá! Está calado!!!
Diogo – Ó eu quero trabalhar… desenhe retângulos de várias dimensões. Essa está bem!
[Faz sons com a boca "oaoaoaaaa" e ri]
Edu. – Ó Carvalho está calado. […]
Diogo – aaaoooaaaa!
Edu. – Está calado pá!!!

As dificuldades identificadas durante a resolução da tarefa que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: o diálogo entre o par; falta de concentração; a passagem do raciocínio do par para o trabalho escrito; rigor ("fizemos vezes"); conceito de área e perímetro ainda não interiorizado devidamente (o Eduardo diz “o comprimento da moldura mais a largura…” e o Diogo completa “área”); não serem capazes de pensar sobre o raciocínio do colega, pensando apenas no que encontravam individualmente; o Diogo com receio de ser julgado pelo Eduardo quando faz algo “à revelia” e está mal; o Diogo estar irrequieto.

O estado irrequieto do Diogo prejudicou o diálogo entre o par e, consequentemente, o bom desempenho do par na tarefa porque provocou desconcentração (como se pode verificar pelo diálogo anteriormente apresentado). O Diogo e o Eduardo pareciam estar a raciocinar individualmente e a não tentaram refletir e raciocinar sobre o pensamento do colega tornando a argumentação colaborativa enfraquecida. Os raros argumentos apresentados foram apresentados com um raciocínio correto, no entanto, não foi partilhado com sucesso. Conseguiram utilizar conceitos e propriedades matemáticas e generalizaram a partir dos casos particulares. Não deixaram de apresentar um trabalho incompleto porque não verificaram as suas respostas. A “linguagem matemática” utilizada nem sempre foi a mais correta. E não ficou claro qual era o método que melhor convencia, no par e na turma.

Parece que o momento do dia em que resolveram a tarefa prejudicou o bom desempenho do par. O Diogo estava irrequieto, perturbando o colega e dificultando a imprescindível interação entre o par. Pretende-se num trabalho como este que, segundo Hunter (2007), os alunos quando trabalham juntos, estejam envolvidos na participação colaborativa no diálogo matemático, tanto como ouvintes como locutores e que devem tentar prever as questões que os colegas colocarão para contra argumentar. Situação que parece ser impossível quando um dos elementos está a fazer barulhos enquanto resolve a tarefa com o seu par. Para mim, durante o tempo em que esteve a brincar produzindo sons com a boca, no máximo, ele poderá conseguir resolver a tarefa individualmente, mas nunca ser capaz de refletir, pensar sobre o pensamento do outro e tentar prever as suas respostas para contra argumentar.

Par B.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo F – Resolução da tarefa 3).

O nível de desempenho global do par B na tarefa 3 é considerado fraco, porque compreenderam e interpretaram corretamente uma questão e nas restantes apenas o conseguiram fazer em alguns aspetos; após o esclarecimento do significado de algumas palavras compreenderam a tarefa, resolvendo-a corretamente mas de forma insegura esperando muitas vezes a aprovação da professora; alguns raciocínios e explicações estavam parcialmente corretos, parecendo faltar-lhe conhecimentos matemáticos ou não se lembrarem deles; falta de rigor na apresentação da estratégia; estratégia utilizada dificultou a generalização; recorreram a desenhos para concretizarem a tarefa; realizaram trabalho mas não completaram a tarefa durante a aula tendo que recorrer ao tempo da entrevista e ao apoio da investigadora para o fazer; revelam possuir alguns dos conhecimentos matemáticos necessários; apresentaram uma explicação incompleta e após a professora fazer uma série de questões que os levaram refletir; os argumentos apresentados tinham fragilidades.

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram todos os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Conseguiram interpretar e compreender autónoma e corretamente uma das quatro questões. Resolveram corretamente as questões, apesar da investigadora e/ou da professora oferecerem apoio, sempre que acharam conveniente para o bom desempenho do par durante a tarefa. No momento em que o Zé disse ao Luís "vamos dizer que já acabamos", mesmo ainda faltando três questões, foi necessário incentivar o par a continuar e ajudá-los a rebater os obstáculos que os estava a impedir de terminar a tarefa.

A entrevista foi fundamental para a investigadora ajudar o par, conduzindo-os à reflexão e ao esclarecimento de alguns raciocínios. Nalgumas respostas apresentadas no trabalho escrito transparecia que o par não se tinha empenhado e/ou concentrado o suficiente.

> Zé – Não. Caímos na ratoeira de trás!
> Inv. – Atrás fizeram uma coisa e chegaram aqui e escreveram outra.
> Luís – Contamos aquele. 10, 10, 5, 5. Dava 20 a… 30. (24.01.2011)

Durante o trabalho escrito o Zé, por vezes, mudava de assunto desconcentrando o Luís ou desviava o seu interesse deixando o Luís a resolver sozinho a tarefa. "Ó Professora! Não consigo perceber esta… lá, lá, lá (canta)" (Zé, 19.01.2011), mas mal termina de dizer, vê-se nos registos vídeo, ele a conservar com os colegas. Quando a professora passa perto do par ele queixa-se que os colegas o estão a distrair. Apresentaram um trabalho escrito organizado e, na maioria, os raciocínios e explicações estavam corretos. As repostas incompletas ou com raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista.

> Inv. – Faltava depois escreverem a expressão numérica. Aqui deduzi que estavam a calcular o perímetro. 2x a largura mais 2x o comprimento.
> Zé – Mas assim depois não ia dar.
> Inv. – Porquê?
> Zé – O Luís contou comprimento e largura e ia fazer duas vezes o comprimento e duas vezes a largura mas nunca ia dar porque assim estávamos a somar outra vez este. Já não ia dar! Ia dar a mais.
> Luís – Eu pensei assim (agrupando os quadrados na primeira moldura) depois ele disse... deixa estar assim que é mais fácil…
> Zé – Eu disse que era melhor contar um a um porque assim temos a certeza que está bem.

Inv. – Ainda contaram um a um mas depois acabaram por agrupar. Não é? Compx2 e depois aqueles.
Luís – Tirava 2. (…) (24.01.2011).

No entanto, apesar de detetarem o erro, não foram capazes de aplicar a estratégia de resolução registada anteriormente. Mantendo o comprimento e retirando à largura duas unidades porque "morriam". Como resposta à questão 3 não colocaram em todas a expressão numérica e nas que colocaram mantiveram a largura e alteraram o comprimento.

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa e em algumas recorreram a uma estratégia (desenharem a moldura e contarem "quadrado a quadrado") para resolverem corretamente. Na questão 1 iniciaram a resolução por contagem "unidade a unidade". Depois de lhes ser solicitado que observassem melhor é que foram encontrando outras formas de contagem mais organizadas.

Zé – Ah, pois não. Porque contamos quadrados…
Luís – Através da contagem dos quadrados.
Zé – Quadrado a quadrado. (19.01.2011).

Zé – Mas como este nesta fila já não ia contar e aqui já acabava. Contávamos este e este e estes dos lados morriam. Contamos 4 e este morria para os outros e ficava 4, depois morria para este.
Zé – […] Que era contar de outra forma 6+6+2+2. […]
Zé – O Luís contou comprimento e largura e ia fazer duas vezes o comprimento e duas vezes a largura mas nunca ia dar porque assim estávamos a somar outra vez este. Já não ia dar! Ia dar a mais.
Luís – Eu pensei assim (agrupando os quadrados na primeira moldura) depois ele disse... deixa estar assim que é mais fácil…
Zé – Eu disse que era melhor contar um a um porque assim temos a certeza que está bem. (24.01.2011).

O par não conseguiu completar devidamente a tarefa durante o trabalho escrito, porque na sua opinião não tinham compreendido o que era para fazer e depois já não tiveram tempo. Sendo necessário ser explorada a questão na entrevista (Anexo F – Resolução da tarefa 3).

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários, apesar de existir alguma confusão entre o perímetro e o número de azulejos. Colocaram o "P= c+c+l+l" como sendo a "expressão numérica" utilizada. No entanto, no diálogo em grande grupo, o Luís disse que foi dessa forma que obtiveram o resultado mas, depois referindo-se à fig.1, disse que o perímetro era "4+4+4+4 […] não é 6 porque se não repetia os quadrados". Deste modo ele estava a considerar cada quadrado como uma unidade de comprimento e não como uma unidade de área.

O Zé preferia seguir pela contagem "quadrado a quadrado" porque assim tinha a certeza que estava bem. Ou seja, ele tinha receio de que com os cálculos não conseguisse determinar o número certo de quadrados. Parece encontrar-se ainda numa fase em que necessita de concretizar, enquanto o Luís já se consegue abstrair dos objetos e raciocinar de uma forma menos concreta. O argumento apresentado para a contagem “quadrado a quadrado” foi convincente, todos concordaram que obtinham “a resposta certa”. Nem todos concordaram é que seria a forma mais rápida, por isso tentaram encontrar outras estratégias para a contagem.

Os argumentos apresentados foram poucos mas rigorosos e gerais. No entanto, não ficou claro se foram resistentes porque o outro par, apesar de não admitir, acabou por utilizá-la na última questão; o Zé confessou na entrevista que primeiro tinha sugerido, “contar um a um” e depois quando questionados sobre a estratégia disse,

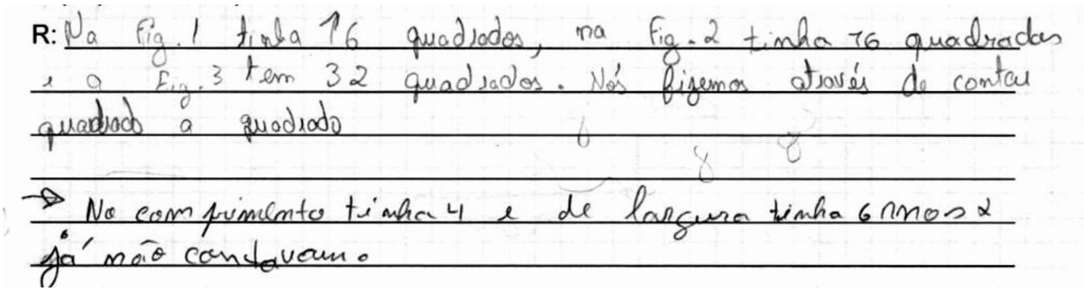
> Zé – Mas este nesta fila já não ia contar, como se morresse e estes 4 aqui também morriam. Mas este aqui são outros 4.
> Inv. – Já percebi. Primeiro contaram ao comprimento, não foi? E depois à largura tiraram…
> Luís – 2.
> Inv. – Dois. Não foi? Foi assim que vocês pensaram!
> Luís – Mas eu já tinha explicado esta no quadro.
> Inv. – Pois explicaram no quadro mas não tinham registado! E qual acham a forma mais fácil? A vossa forma de contagem, ou a do Diogo ou a da Beatriz.
> Zé – A nossa forma. Alguém começou a contar aqui.
> Inv. – Como?
> Zé – Era a nossa forma. Contamos aqui, mas não era a nossa forma. Que era contar de outra forma 6+6+2+2.

As diferentes formas de contagem que resultaram de diferentes formas de visualizar a moldura. Por tal, uns agruparam os quadrados mantendo uma das medidas do comprimento ou da largura e à outra medida retiravam dois quadrados, outros retiraram sempre um quadrado a cada medida do comprimento e da largura ou, ainda, aqueles que não confiaram nessa estratégia e preferiram desenhar e contar “quadrado a quadrado”.

Ou seja, o Zé enuncia primeiro a forma que foi referida pelo Luís mas ainda não sabia muito bem qual seria a melhor, optando por referir outras formas como outros colegas pensaram. Talvez tenham ficado um pouco confusos e não tenham chegado a um consenso sobre a melhor forma de resolução porque no diálogo em grande grupo tal também não ficou explicito. Na entrevista geral o par continuava a discordar, o que parece significar que o diálogo em grande grupo não foi explícito.

> Inv. – Qual consideram ser a mais fácil?
> Zé – Contando. Assim tenho a certeza.
> Luís – Fazendo vezes. Como aqui 4 vezes 4. […]
> Zé – A do Luís!
> Inv. – Porque achas que é a do Luís?
> Zé – Porque deu certo.
> Inv. – E mais rápido.
> Luís – Ainda podia ser mais rápido. Eu é que me enganei a contar a primeira vez. (contou o comprimento e a largura, tirou 2 à largura e somou o dobro do comprimento com o dobro da diferença do comprimento por dois).

Exemplo de um argumento apresentado para justificar o seu processo de resolução:


R: Na fig. 1 tinha 16 quadrados, na fig. 2 tinha 16 quadrados e a fig. 3 tem 32 quadrados. Nós fizemos através de contar quadrado a quadrado

No comprimento tinha 4 e de largura tinha 6 menos 2 já não contavam.

Figura 4 – Resposta à questão 1

Argumento utilizado pelo Zé para explicar que a estratégia de resolução do par estava correta: "Mas como este nesta fila já não ia contar e aqui já acabava. Contávamos este e este e estes dos lados morriam. Contamos 4 e este morria para os outros e ficava 4, depois morria para este." (24.01.2011).

No trabalho escrito agruparam segundo a sua forma de visualizar o número de azulejos que rodeavam cada pintura, mas não escreveram respetivas expressões numéricas.

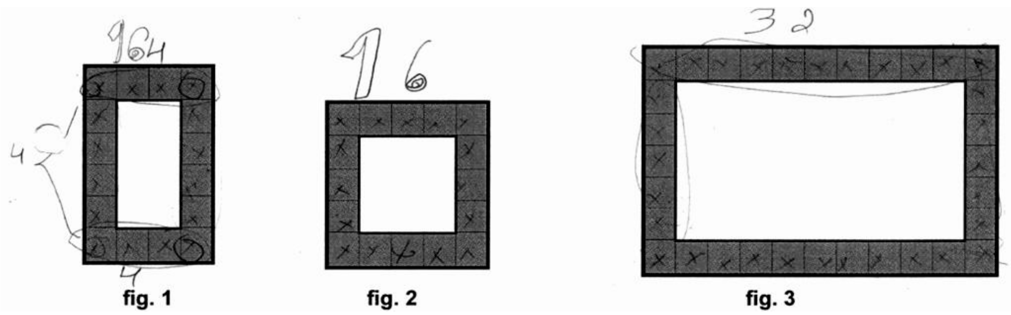


Figura 5 – Agruparam os quadrados da moldura

Durante a resolução da questão o par conversava mostrando-se em concordância e convencido de que seria o mais fácil, apesar dos diálogos serem de curta duração, porque o Zé dispersava facilmente da tarefa. Quando questionados na entrevista (24.01.2011) disseram que não tinham percebido a questão 4, "Nessa eu não estava a perceber de onde era o 100 ou o 200!? De que lado…" (Luís).

O par conseguiu apresentar o seu raciocínio com rigor mesmo numa moldura 100 por 200. O nível da argumentação colaborativa do par foi média porque trabalharam quase sempre através do debate, partilharam conhecimentos matemáticos. Por vezes, trabalharam em conjunto para resolver o mesmo assunto, a argumentação decorreu como diálogo, e não pareceu que desenvolvessem o trabalho para uma aprendizagem competitiva. Sentiram ainda dificuldades em ouvir-se, raciocinar sobre o que o colega dizia, refletirem sobre o seu próprio trabalho e manterem os dois o nível de concentração e envolvimento na tarefa. A rara argumentação surgiu como diálogo como se pode constatar em alguns dos diálogos apresentados na resolução da tarefa (Anexo F – Resolução da tarefa 3).

A tarefa foi preenchida metade por cada aluno e resolvida em par, segundo eles disseram na entrevista geral. No entanto existiu pouco diálogo, apenas para iniciar a questão e quando um tinha dúvidas. Assim, foram raros os momentos que surgiram com argumentação colaborativa porque, além do fator já descrito, os dois estavam de acordo na maioria das respostas não gerando necessidade de argumentar e/ou contra argumentar. No entanto, como foi descrito, houve momentos de argumentação colaborativa, até mesmo durante a entrevista (Anexo F – Resolução da tarefa 3). Não surgiram momentos de argumentação agressiva durante o trabalho escrito (19.01.2011), apesar de, por vezes, não se ouvirem e nada ou pouco refletirem.

As dificuldades identificadas durante a resolução da tarefa que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: a falta do diálogo entre o par; a falta de concentração; a compreensão autónoma das questões; a passagem do raciocínio do par para o trabalho escrito; rigor (numa moldura de 4 por 6, eles consideraram, devido ao que lhes era pedido na tarefa, o perímetro como sendo 4+4+4+4); conceito de perímetro não estar devidamente esclarecido; não serem capazes de pensar sobre o raciocínio do colega, pensavam no que encontravam individualmente; o Zé conseguia concentrar-se durante menos tempo que o colega.

O Zé e o Luís pareceram estar a raciocinar individualmente e a não tentaram refletir e raciocinar sobre o pensamento do colega tornando a argumentação colaborativa enfraquecida.

Os raros argumentos apresentados integravam um raciocínio parcialmente correto e foi partilhado com sucesso apesar de não ser aceite por todos, porque consideraram que tinha "erros". Conseguiram utilizar conceitos e propriedades matemáticas. Com apoio da investigadora conseguiram generalizar a partir dos casos particulares das molduras desenhadas, para molduras, igualmente retangulares, de maiores dimensões. No entanto, antes da entrevista, tinham apresentado um trabalho incompleto porque não fizeram a última questão e não verificaram a resposta à questão 3. A "linguagem matemática" utilizada nem sempre foi a mais correta. Durante a resolução da tarefa não ficou claro qual era o método que melhor convencia, o par e a turma.

Parece que ao Luís lhe falta ser um participante persistente como Cobb e Bauersfeld (1995, p. 27) referem que os alunos têm que ser aquando da resolução de problemas. Isto aconteceu devido ao contexto social, pelo facto de não querer ficar "mal" com o colega. Ao Zé parece faltar um pouco de autonomia e poder de abstração. O que talvez seja significado que o Zé ainda não esteja no mesmo nível de abstração que o Luís, sentindo-se mais seguro se concretizar, aspeto que parece dificultar o diálogo entre os dois alunos do par. Como Komatsu (2009) defende que a argumentação torna-se mais simplificada quando os alunos recorrem a ações concretas. No entanto, o Luís em algumas situações mostra que já é capaz de se abstrair do concreto.

Análise geral da turma.

A primeira reação dos pares à tarefa foi positiva principalmente porque observaram que apenas lhes distribuíram uma folha por par. Esse primeiro impacto manteve-se mas notou-se alguma agitação. Alguns pares não conseguiram completar a tarefa, aparentemente por falta de conhecimentos matemáticos (p. exemplo: conhecimento do que é uma expressão numérica, a distinção entre o perímetro e o número de azulejos que é utilizado para cada moldura) ou por necessitarem de um acompanhamento.

O desempenho geral da turma foi médio porque os alunos foram desenvolvendo algum trabalho ao longo da tarefa. As questões menos bem sucedidas ao nível da compreensão e acerto foram a 3 e a 4. Na primeira era-lhes solicitado que escrevessem a expressão numérica e na segunda que generalizassem, aplicando uma estratégia de contagem para uma moldura de 100 por 200. Após o esclarecimento do significado de alguns excertos do enunciado ou conceitos, tais como, “expressão numérica” e “número de azulejos necessários”, conseguiram compreender a maior parte das questões e resolver duas totalmente corretas, metade dos dez pares respondeu corretamente à questão 4 e só três pares conseguiram responder corretamente ou de modo parcialmente correto à questão 3. No entanto, alguns pares, como por exemplo o par B do estudo, necessitaram de ajuda para esclarecer novamente o que era expressão numérica, mas depois conseguiram resolver de modo parcialmente correto, no entanto, foi de forma insegura, esperando constantemente a aprovação da professora ou da investigadora. A maioria dos raciocínios apresentados estão corretos, mas a explicação não está totalmente completa. Por vezes, existe falta de rigor na apresentação da estratégia o que dificultou a generalização. Alguns dos motivos para que tal se tenha verificado parecem ser a dificuldade na visualização das imagens de forma a permitir-lhes agrupar para facilitar a contagem; falta de confiança nas outras formas de contagem porque consideram que a contagem “quadrado a quadrado” que assim “não se enganam”; incompreensão do conceito de “expressão numérica” porque ainda não tinha sido abordada durante as aulas de matemática. Ao ler o enunciado a professora esclareceu, mas pelas resoluções só três pares compreenderam (par A e B) e um deles (par B) foi necessário o apoio da professora e da investigadora; ser-lhes exigido que apresentassem uma expressão numérica para a sua forma de contagem e que explicassem como agrupavam os azulejos.

Depois da resolução em pares, na exploração da tarefa em grande grupo, houve a participação de vários pares nas duas questões iniciais. No entanto, a partir da terceira questão, cujo grau de dificuldade para eles foi notoriamente maior, a argumentação coletiva sustentou-se com base nos dois pares de estudo e em outros dois. Participaram de forma organizada, mas a forma de contagem apresentadas à turma nem sempre eram compreendidas pelos restantes. Para aliviar esta situação a professora recorreu ao "revoicing" (Forman & Ansell, 2002) numa tentativa de lançar novamente a ideia. Em algumas questões existiu consenso coletivo inicial, desde o momento em que o primeiro par expôs a sua resposta, (questões 1, 2) e noutras houve dificuldade na apresentação de argumentos matemáticos capazes de justificar a sua forma de resolução (questões 3 e 4), os argumentos apresentados alguns foram gerais mas com um pouco de falta de rigor, no entanto pareceu que permitiram convencer os colegas.

Os pares de estudo e mais um par responderam a todas as questões mas a questão 3 incompleta ou com alguma falta de rigor. O que parece acrescer ao grau de dificuldade da questão 3 foi o não compreenderem o que era uma expressão numérica. O próprio Luís do par B ficou admirado com o que era uma expressão numérica.

A competição entre os pares, principalmente entre os de estudo, diminuiu substancialmente relativamente à tarefa anterior mas continuou a sentir-se alguma necessidade, por parte do Zé, em falar quando o par A estava envolvido. A dificuldade de concentração de alguns elementos da turma dificulta o seu desempenho. Parece ser por ser próximo da hora de almoço.

A argumentação coletiva foi média porque houve momentos em que esta foi efetuada com sucesso, como se pode observar nas imagens da gravação vídeo. A argumentação coletiva sustentou-se essencialmente na participação dos pares de estudo e mais dois pares da turma. Apresentaram alguns argumentos corretos, mas pela entrevista aos pares de estudo pareceu que eles se acomodaram com o que lhes foi apresentado mas não concordavam. Ficou por esclarecer qual seria a melhor estratégia para contarem de forma mais eficaz e rápida os azulejos necessários para uma moldura. Faltou ainda os alunos terem bem presente a importância de convencer os colegas. Queriam expôr a sua estratégia à turma dizer "que está bem" que "conseguiram resolver corretamente" mas esquecem-se, muitas vezes, do resto: convencer com argumentos que é a melhor estratégia para resolver a tarefa. Este aspeto pode também dever-se ao surgimento de uma pressão provocada pelo contexto social, pois há colegas que são considerados "mais capazes" (Godino, Batanero & Font, 2004a) e a professora ainda é considerada como a "autoridade máxima" (Forman & Ansell, 2002, p. 284) apesar de não concordarem com algumas argumentações apresentadas acomodam-se e não apresentam o seu raciocínio. O tempo de discussão tornou-se curto, pelo que não ficaram bem esclarecidas algumas ideias lançadas pelos alunos.

Assim, considera-se que o desempenho global dos alunos ao nível da argumentação coletiva foi Médio, ao nível da argumentação utilizada foi médio. De modo geral, os pares tiveram grandes dificuldades em apresentar o seu raciocínio, generalizar, argumentar e contra-argumentar.

Relativamente aos pares do estudo verificam-se níveis de concentração e de empenho na tarefa substancialmente diferentes interpares e intrapares. No par A o Eduardo tem um nível de envolvimento com a tarefa por um período contínuo e de longa duração e o Diogo, esse período, é intercalado com alguns momentos de descontração. No par B o Luís é muito mais persistente, tenta observar sempre o máximo de relações e de regularidades, tem um envolvimento muito maior com a tarefa e por muito mais tempo que o Zé. O Zé não consegue estar muito tempo concentrado mas, a maior parte das vezes, também não quer ver o seu colega a resolver sozinho por isso tenta desconcentrá-lo nos momentos em que não lhe apetece trabalhar mais. O par A, apesar de muitas vezes não se saber ouvir e falar um por cima do outro e, se não o fazem, esperam que o colega acabe de falar e dizem a sua ideia como se o colega não tivesse dito nada (parecendo que não pensam sobre o pensamento do outro), acabam por ser mais produtivos, com maior envolvência na tarefa e, normalmente, não se contentam com qualquer resposta e consideram que a deles está correta. O par B tem uma grande dificuldade em transmitir o seu raciocínio e apresentar organizadamente e com rigor as suas ideias e argumentos.

Em comparação entre os pares do estudo e os restantes pares, os primeiros evidenciam-se nos registos apresentados no trabalho escrito, antes da entrevista, e durante a argumentação coletiva. Evidenciam-se na organização do trabalho apresentado, na capacidade de interpretação e compreensão, na insatisfação com o que o par apresenta, nas diferentes estratégias de resolução e na autoestima. O par A mostra ter mais capacidade de concentração, de autonomia e capacidade de argumentação que qualquer outro par da sala de aula.

Ao nível das conceções, mesmo no primeiro questionário, o par A já se evidenciava. Esta diferença entre os pares de estudo e os restantes pares da turma talvez se deva a estes alunos verem-se como "bons alunos a matemática", sempre tiveram bons resultados, o meio familiar, a forma como a família transmite "o que é a matemática" e a sua motivação para a disciplina. No diálogo em grande grupo, a sua autoconfiança e autoestima, faz com que tenham menos receios de transmitir o que pensam e de expor o seu raciocínio. O Diogo, no início do estudo, tinha sido referenciado pela professora como o melhor aluno a nível de raciocínio.

TAREFA 4.

Par A.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo E – Resolução da tarefa 4).

O nível de desempenho global do par A na tarefa 4 é considerado bom, porque parece ter efetuado a leitura do enunciado com compreensão; compreenderam a maioria das questões considerando todos os dados, interpretaram e resolveram correta e autonomamente; outras questões apenas resolveram corretamente após solicitarem esclarecimentos da professora ou da investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentam um trabalho organizado; construíram um raciocínio e explicação corretos, umas vezes ocorreu, autonomamente, outras vezes após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram e outras vezes porque a professora ou a investigadora fez uma série de questões que levaram os alunos a refletir; apresentaram com rigor a estratégia utilizada; utilizaram desenhos para resolver parte da tarefa; construíram uma explicação correta mas incompleta; apresentaram argumentos completos, rigorosos, gerais, e aparentemente convincentes.

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita com compreensão, até porque resolveram-na, após analisarem os dados fornecidos e utilizaram-nos ao longo da resolução. Iniciaram o trabalho pela contagem dos quadrados da base, em cada figura, passando de seguida para a verificação da existência ou não de regularidades.

> Edu – 1,2,3… Aqui aumenta 1.
> Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
> Edu - 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
> Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras.
> Edu – 4 e aqui já tem… (19.01.2011)

O par conseguiu interpretar e compreender correta e autonomamente a maioria das questões. No entanto, a última questão (e) não responderam durante o trabalho escrito, mas sim na entrevista (já tendo acontecido o diálogo em grande grupo), e noutras questões responderam porque a professora ou a investigadora auxiliaram com questões orientadoras.

> Diogo – Ó professora Joana! Aqui na figura 7 não é para desenhar, pois não?
> Inv. – Aqui só queres saber o número de quadrados pelo método de contagem…
> Edu – Nós vimos que daqui da 8 para a 15 são 7, da 15 para a 24 são 9, daqui para aqui são 11. Ou seja são sempre mais dois. Mas daqui para aqui já não dá!
> Inv. – Não dá?!

Edu – Não. 35 mais 13 não dá 64! Dava 48!
Inv. – Então confirmem melhor a 5. Para verificarem se construíram e contaram bem. […]
Inv. – Confirma com o número de quadrados que tinham dito?
Edu – Dá… […]
Edu – Nós contamos mal! Nós contamos mal! 1,2,3,4 – 1,2,3,4,5 – 1,2,3,4,5,6
Inv. – E aqui quantos vai ter?
Diogo – Porque aqui era três. (19.01.2011).

Para responder a qual seria a área da figura 7 não seguiram o último raciocínio que tiveram mas sim o anterior, assim obtinham o valor da área recorrendo à área da figura anterior.

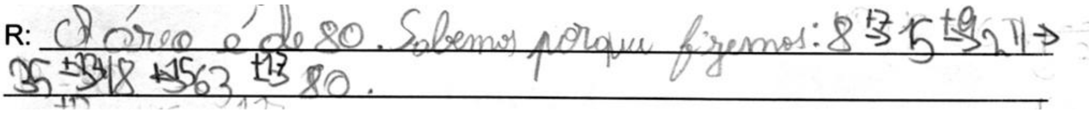

R: A área é de 80. Sabemos porque fizemos: 8 +7 15 +9 24 +11 35 +13 48 +15 63 +17 80.

Figura 6 – Resposta à questão c)

A entrevista foi fundamental para a investigadora apoiar o Diogo e o Eduardo a explicar melhor o raciocínio. Algumas das respostas apresentadas no trabalho escrito não mostravam os diferentes raciocínios e o que apresentaram não era considerado o mais rápido, mas sim o que se sentiam mais seguros (Anexo E – Resolução da tarefa 4).

Não completaram totalmente a tarefa porque não tiveram tempo. Quando estavam a resolver a alínea d) a professora mandou parar. Na entrevista responderam à questão e).

Inv. – Acham que conseguiam convencer os vossos colegas?
Diogo – Naquela altura tocou e, claro, eles disseram todos que sim!
Inv. – Pois, mas se não tocasse acham que eles iam dizer todos que sim!?
Diogo – Sim, porque a minha resposta estava bem.
Edu – A do Luís também estava mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…
Diogo – A minha era mais fácil.
Edu – Se fosse outra figura, por exemplo 200, era 201 e 203. (24.01.2011).

Apresentaram um trabalho escrito organizado e, na maioria, os raciocínios e explicações estavam corretos. Na entrevista, apenas lhes foi pedido que voltassem a explicar como chegaram à reposta da alínea d) (registaram na e)) para que, com o apoio da investigadora chegassem à expressão algébrica da sua generalização (Anexo E – Resolução da tarefa 4).

E registaram,

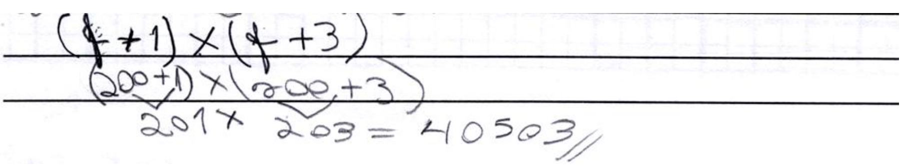

$(x+1) \times (x+3)$
$(200+1) \times (200+3)$
$201 \times 203 = 40503$

Figura 7 – Área da figura número 200

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa. Em algumas questões recorreram a uma estratégia para as resolver, por exemplo: movimentar um dos quadrados para formar um retângulo e calcular mais facilmente a área da figura. Começaram por desenhar, depois observaram uma regularidade entre a sequência das imagens.

Na questão a) iniciaram a resolução por contagem e depois verificaram que existiam regularidades entre os termos da sequência, permitindo-lhes encontrar outras formas de contagem mais organizada.

Edu – 1,2,3… Aqui aumenta 1
Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui. […]
Edu – 4 e aqui já tem…
Diogo – Não! Aumenta em baixo duas!
Edu – E aqui tem 5, 2 e 6, 3. […]
Diogo – 5x8 é 40.
Edu – 6x8 é 48. 6x9 é 54.
Diogo – Está bem mas não posso fazer as contas?! Tu não tiraste uma aqui? 48.
Edu – Viste. Tirei e pus ali! […]
Edu – Para a próxima vai ser mais 15. 48 mais 15…
Diogo – E para a 9 se fizéssemos assim?
Edu – Dá 63 a três…
Diogo – Agora vamos confirmar com a minha conta…
Edu – [insiste] 63 mais dezassete dá…
Diogo – Porquê 63 mais 17?
Edu – Porque olha é 4 daqui! 3 e 7 dá 10 tens daqui 2… 80. Agora para justificar vai ser bonito! (19.01.2011)

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários. Existiram algumas confusões entre linha e coluna, que iniciaram durante o diálogo em grande grupo e voltaram a surgir na entrevista, "Filas ou colunas?!" (Eduardo, 24.01.2011). Como a confusão não se esclareceu dentro do par foi-lhes identificado no desenho o que é designado por fila e por coluna, para que tal não continuasse a significar um obstáculo à comunicação do raciocínio dentro do par.

Os argumentos apresentados surgiram com algum receio e estava a dificultar a generalização dos mesmos. Nas questões e) não tiveram o cuidado de apresentar, no trabalho escrito, qualquer resposta. Na questão c) explicaram o seu raciocínio por cálculos mas não conseguiram redigir como chegaram ao raciocínio (Anexo E – Resolução da tarefa 4).

No entanto, oralmente apresentaram argumentos gerais que lhes permitiram escrever a resposta. Como se pode verificar nos diálogos anteriormente apresentados. Aparentemente, o raciocínio por recorrência apresentado conseguiu convencer os seus colegas e a professora.

Edu – Quinze para vinte e quatro já são nove. Acrescentamos sempre dois.
Prof. – Acrescentam sempre dois?
Edu – Sim, sete, nove…
Zé – Mais dois.
Prof. – Sim, e agora? Mais dois! [desenha no quadro]
Edu – Não!
Diogo – Mais dois do que ia de trás.
Zé – Mais dois… do que acrescentamos ao que ia de trás! […]
Prof. – E porquê este somatório, sempre mais dois do que o anterior?
Marco – Porque na figura 1 tinha oito e na figura dois tinha 15, logo aumentou mais dois…
Prof. – Diogo.

Diogo – Nós fizemos nas três primeiras figuras a área e depois eu reparei, o Eduardo reparou… Então dá para juntar mais dois do que tínhamos juntado…. E depois fomos contar para ver se estava certo e estava!

Zé – Nós também fizemos assim mas logo ao início… e depois fizemos como eles.

Exemplo de um argumento apresentado para justificar o número de quadrados da figura 100:

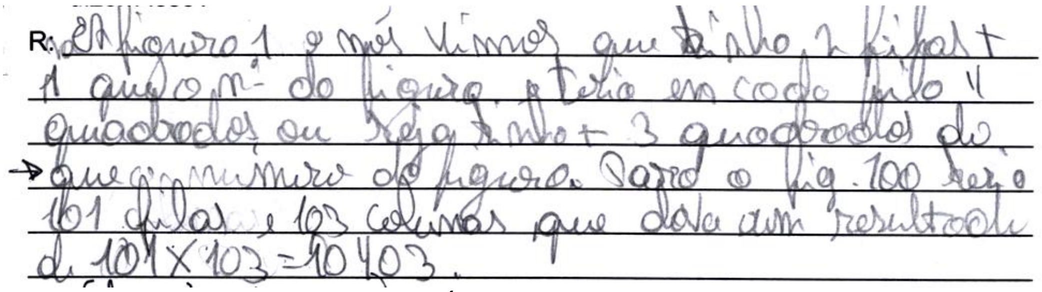

R: A figura 1 e nós vimos que tinha 2 filas + 1 que o nº da figura e teria em cada fila 4 quadrados ou seja tinha + 3 quadrados do que o número da figura. Então a fig. 100 seja 101 filas e 103 colunas que dava um resultado de 101 X 103 = 10403.

Figura 8 – Área da figura número 100

Diogo – Então eu vi que a figura 1 tinha duas filas, ou seja, mais uma que o n.º da figura. E teria em cada fila quatro quadradinhos, ou seja, mais três quadrados que o nº da figura. (24.01.2011)

Argumento utilizado pelo Diogo para justificar porque é que considerava que a resposta tinha convencido os colegas "naquela altura tocou e claro que eles disseram todos que sim!". Acrescentando depois (24.01.2011),

Diogo – Sim. Porque a minha resposta estava bem.

Eduardo – A do Luís também estava mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…

Diogo – A minha era mais fácil.

Na entrevista (24.01.2011) quando foram interpelados para explicar melhor a sua estratégia, o Eduardo é que se recordou dizendo, "Foi a tua. A mais fácil! A tua era… duas… três na …vertical.".

O argumento apresentado nesta questão é geral, recorreram a casos particular para verificarem a sua conjetura: "Ao número da figura juntar 3 e depois multiplicá-lo pelo número da figura mais um". Exemplificando com figuras já desenhadas e depois com a figura 100, que já tinham calculado seguindo o raciocínio do Luís. O Eduardo para mostrar que dava para todas as figuras recorria a outros exemplos "Se fosse outra figura, por exemplo 200, era 201 e 203." (24.01.2011). Assim, verifica-se que após alguma reflexão, conseguiram apresentar argumentos gerais, para a área de cada uma das figuras da sequência. Durante o trabalho escrito chegaram a falar neste processo mas apenas exploraram um outro, apresentando argumentos igualmente gerais mas por recorrência. O par mostrava-se em concordância, satisfeito com a resposta e convencido de que o que escreveram estava correto.

Quando questionados na entrevista (24.01.2011) dizem que não escreveram todos os seus raciocínios porque não tinham espaço para escrever, como disse o Eduardo "Não cabia!", mas convencidos que estava correta acabaram por escrevê-la na questão e).

O nível da argumentação colaborativa do par foi boa porque trabalharam quase sempre através do debate, partilharam conhecimentos matemáticos, trabalharam em conjunto para resolver o mesmo assunto, a argumentação decorria como diálogo e não pareceu que desenvolvessem o trabalho para uma aprendizagem competitiva, como se pode observar na maioria dos diálogos transcritos (Anexo E – Resolução da tarefa 4). Mas continuam a surgir dificuldades, mesmo que momentâneas em ouvir o colega, refletir e construir a sua contra argumentação com base no que o colega disse.

> Edu – 1,2,3… Aqui aumenta 1
> Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
> Edu - 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
> Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras.
> Edu – 4 e aqui já tem…
> Diogo – Não! Aumenta em baixo duas!
> Edu – E aqui tem 5, 2 e 6,3.
> Diogo – Já sei como deve ser… aumentou um em baixo e aqui aumenta dois… (19.01.2011)

Surgiram raros momentos de argumentação agressiva durante o trabalho escrito (24.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiam.

> Edu – Filas ou colunas?!
> Diogo – Filas!
> Edu – Tu és teimoso…
> Diogo – A professora está a entender-me!

As dificuldades identificadas durante a resolução da tarefa que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: confusões nos conceitos de coluna e fila; diferente nível de maturidade entre os elementos do par; reação à tarefa; colocar o raciocínio por escrito; ouvir o colega, pensar sobre o seu pensamento e construir o seu argumento com base nele; a limitação do tempo.

A confusão de conceitos, durante a resolução da tarefa, não pareceu que representasse um grande obstáculo para a resolução da tarefa. O tempo foi um limitador do desempenho do par porque ele ainda não tinha debatido todas as ideias durante o trabalho escrito e teve que “passar” para o diálogo em grande grupo antes de terminar o trabalho. Este facto fez com que surgissem estratégias de resolução no diálogo em grande grupo que não tinham sido exploradas e debatidas antecipadamente pelo par. Na entrevista, responderam à questão e), que ocorreu posteriormente ao diálogo em grande grupo.

Parece que este par, apesar das suas dificuldades, conseguiu melhorar significativamente o seu desempenho geral e o nível de argumentação colaborativa. Segundo uma das conclusões do estudo de Andriessen (2006) é que quanto mais prolongado for o estudo melhor, por isso é provável que com o treino eles comecem a interiorizar algumas regras de trabalho e alguma prática ao nível da argumentação. Como as autoras Forman e Ansell (2002) referiram que os alunos têm que começar a mudar as suas crenças no modo como atuam nas atividades matemáticas mas para isso o professor tem que lhes dar tarefas mais desafiadoras. Com a rotina de tarefas diferentes do que estavam habituados a resolver, onde o seu papel como aluno mudou substancialmente, e as cinco tarefas introdutórias envolvendo regularidades, o par parece que começou a sentir-se mais à vontade na resolução deste tipo de tarefas.

O facto da investigadora esclarecer o que é fila e coluna ao Diogo, permitiu-lhe explicar-se melhor perante o Eduardo. Nesta situação considerou-se que esta opção seria a mais benéfica, já que Hunter (2007) refere-se ao professor como um meio para ajudar os alunos a explicarem as suas ideias.

Par B.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo F – Resolução da tarefa 4).

O nível de desempenho global do par B na tarefa 4 é considerado bom, porque compreenderam a maioria das questões considerando todos os dados, interpretaram e resolveram-nas correta e autonomamente; outras questões apenas resolveram corretamente após solicitarem ou receberem esclarecimentos da professora ou da investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentaram um trabalho organizado; na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa e em algumas recorreram a uma estratégia para as resolverem; construíram um raciocínio e explicação corretos, umas vezes ocorreu, autonomamente, outras vezes após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram e, outras vezes, porque a professora ou a investigadora fez uma série de questões que levaram os alunos a refletir; utilizaram desenhos para resolver parte da tarefa; construíram uma explicação correta mas incompleta; apresentaram argumentos completos, rigorosos, gerais. A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita com compreensão, até porque após analisarem os dados fornecidos utilizaram-nos apara resolvê-la. Iniciaram o trabalho pela contagem do número de quadrados em cada figura e, posteriormente verificaram se existiam ou não regularidades. Descobriram de imediato uma regularidade na sequência, "É sempre mais dois que se acrescenta",

> Luís – (contam) Aqui tem 8 e aqui tem 15.
> Zé – Se aqui tem 8 e aqui tem 15, então, aqui vão sete.
> Luís – (contam) Aqui tinha quinze e aqui quanto é que tinha?
> Zé – Tinha 7.
> Luís – Agora tem 9. Aumenta sempre dois!
> Zé – No primeiro aumentou sete e depois aumentou nove… É sempre mais dois que se acrescenta. Então, se acrescenta sempre mais dois, quantos vamos ter aqui? (19.01.2011)

A maioria das questões foi interpretada e compreendida correta e autonomamente. No entanto, a última questão não responderam durante o trabalho escrito e noutras questões a professora ou a investigadora auxiliaram com questões orientadoras. Como se pode verificar na resolução da tarefa (Anexo F – Resolução da tarefa 4).

Para responder à questão da alínea c), não seguiram o último raciocínio pelo cálculo da área, mas sim o raciocínio anterior (por recorrência). Assim obtiveram o valor da área da figura recorrendo à figura anterior.

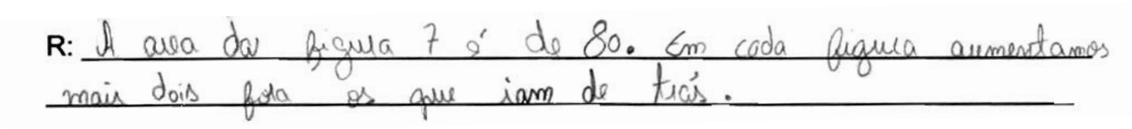

R: A area da figura 7 é de 80. Em cada figura aumentamos mais dois fora os que iam de trás.

Figura 9 – Resposta à questão c)

Resolveram corretamente a maioria das questões. A entrevista foi fundamental para que a investigadora ajudasse o Zé e o Luís a explicar melhor o seu raciocínio. Algumas das respostas apresentadas no trabalho escrito não mostravam os diferentes raciocínios e os que apresentaram não era os que consideravam o mais rápido, mas sim, em que se sentiam mais seguros.

Não completaram totalmente a tarefa porque não tiveram tempo. Quando estavam a resolver a alínea d) a professora mandou parar. Na entrevista responderam à questão e).

Zé – Convence, a minha convence mas a dele também convence.
Luís – Como estava aqui não convencia porque eu aqui tinha uma coisa mal!
Zé – Relativo a esta porque é parecido. A do Luís dava mas a do Diogo era melhor era mais… rápida…
Inv. – Mas quando vocês acabaram a tarefa acham que convencia os vossos colegas?
Luís – sim.
Zé – sim.
Luís – Na altura acho que não! Porque tinha erros. Era no comprimento. Na altura acho que não porque tinha erros!

Apresentaram um trabalho escrito organizado e, na maioria, os raciocínios e explicações estavam corretos. No diálogo, em grande grupo, apenas lhes foi pedido que voltassem a explicar como chegaram à reposta da alínea d) para tentar encontrar uma estratégia que lhes permitisse chegar à generalização.

Luís – [continua] Contávamos o comprimento e contávamos a largura e fazíamos de vezes e sabíamos quanto tinha de área! […]
Zé – Mais dois… do que acrescentamos ao que ia de trás! […]
Inv. – Acham que este raciocínio seria o mais fácil? E se vos perguntasse da figura 100? […]
Luís – Professora, sei uma maneira mais fácil! […]
Luís – A figura 1 tinha 4, a figura 15 iam ter os 15 mais os 4 dá dezanove!... Como tirávamos a de cima e púnhamos ali, de lado, dava sempre mais um que o número da figura por isso ía ter 16 de lado. […]
Luís – Na figura 1 vai ter quatro e a figura cinco vai ter nove por baixo.
Inv. – Porque é que a figura 15 ia ter 19 por baixo? [..]
Luís – Porque na figura 1 tem 4 logo temos que somar ao n.º da figura os da primeira. […]

Inv. – Então confirma se a regra que se confirma é o número da figura mais 4 ou se é o número da figura, menos um, mais quatro? […]

Luís – É! Porque para dar bem tenho que tirar um ao comprimento. […]

Luís – Na figura um tinha 2 filas (explica que completou a segunda), logo na quinze também vai ter mais uma que o número da figura!

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa e em algumas recorreram a uma estratégia para as resolverem. Na questão a) iniciaram pela contagem mas já resolveram com base nas regularidades encontradas entre os termos da sequência. Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários. Existiu alguma confusão entre o nome da figura geométrica representada, que foi esclarecida dentro do próprio par.

Os argumentos apresentados surgiram com algum receio e estava a dificultar a generalização dos mesmos. Na questão e) não apresentaram, no trabalho escrito, qualquer resposta. Na questão c) explicaram o seu raciocínio, apresentando os cálculos efetuados na tabela (Anexo F – Resolução da tarefa 4) e escreveram uma resposta pouco clara. No entanto, oralmente apresentaram argumentos gerais que lhes permitiram escrever a resposta.

Zé – Em cada figura aumenta sempre mais 2, aqui é 7, aqui é 9, aqui é 11, aqui é 13 agora é 15, 17.

Luís – Qual a área da figura. …

Zé – Nós já sabemos! Aqui é sete, não é? Mais 7, 7+2 =9, 9+2=11, 11+2=13, 13+2=15, 15+2= 17. Qual é a área da figura 7? (lê a questão e começa a responder) A área da fig. 7 é…

Luís – Tens que aumentar mais 15 para dar! 48 mais 15 … 53. Agora tens que aumentar mais 17.

Zé – Mais 15 ou mais 17?

Luís – Ó professora?! Aqui é 7, 9, 11, 15 e ia dar 53… mais 17.

Zé – Dá 70.

Luís – Em cada figura aumentamos mais dois.

Zé – Aumentamos mais dois dos que iam de trás… primeiro o 7, depois o 9. (19.01.2011).

Aparentemente, este raciocínio por recorrência conseguiu convencer os seus colegas, até porque a maioria dos pares tinha observado essa regularidade.

O Luís não ficou satisfeito com a resolução por recorrência e, ainda durante a resolução a apares, sugeriu outra forma de contagem, segundo ele, mais rápida. A dificuldade que sentiu foi na verificação:

Luís – Para fazer aquilo que eu disse tem sempre mais um dos lados, logo a figura quinze vai ter que ter 16 e aqui 19! E 16x19 vai dar o resultado.

Prof. – Faça assim e veja quanto dá! […]

Zé – 9x6 54… 6 e 4? 9… 304. Mas não temos nada para confirmar! (19.01.2011)

Ao Luís pareceu-lhe que esta forma de contagem dava para contar a área de qualquer figura. No entanto, quando se deparou com o argumento do Zé "Mas não dá para confirmar", o Luís não conseguiu contra argumentar e aparentemente desistiu da sua ideia. Acabaram por resolver a questão recorrendo à figura anterior. No entanto, o Luís parecia considerar que o raciocínio estava correto e que seria a melhor solução e, quando a professora passou pelo par eles aproveitaram para descrever, novamente. Mas a professora não manifestou a sua opinião fazendo com que o Luís não insistisse com o seu par para tentar percebê-lo. No entanto, o Luís não desistiu e aproveitou a oportunidade para apresentar a sua forma de resolução, que não a do par, em grande grupo:

> Luís – Ó professora também é mais fácil de contar! Víamos de lado...
> Prof. [interrompe] – contabilizar…era mais fácil?! […]
> Luís – [continua] Contávamos o comprimento e contávamos a largura e fazíamos de vezes e sabíamos quanto tinha de área!
> Edu. – Nós fizemos assim, a figura 1 tinha oito. Oito para 15 são sete!
> Prof. – Sim.
> Edu. – Quinze para vinte e quatro já são nove. Acrescentamos sempre dois.
> Prof. – Acrescentam sempre dois?
> Edu. – Sim, sete, nove…
> Zé – Mais dois.

A professora não deu importância ao que o Luís estava a dizer e deixou que o Eduardo dissesse como ele e o Diogo pensaram. Na segunda tentativa o Luís conseguiu fazer-se ouvir, transmitindo o seu raciocínio mas com um erro na contagem do comprimento. Posteriormente, com bastante insistência, e questões orientadoras, o Luís conseguiu identificar o erro e retificá-lo.

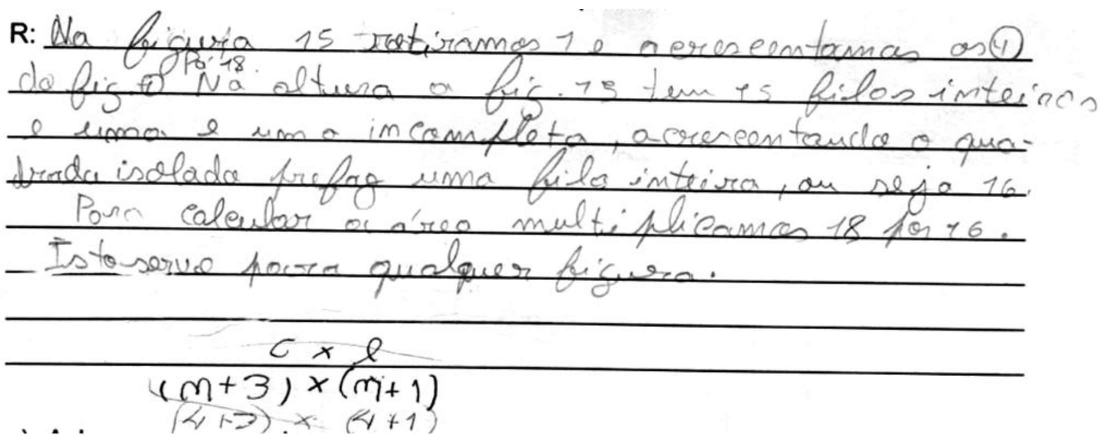
> Inv. – Retomando à figura 2, seria os 4 da 1.ª, mais o número da figura. Sendo assim, quanto é que seria?
> Luís – 6.
> Inv. – Então, tens 4 da primeira mais?
> Luís – Dois. Não, um.
> Inv. – Então confirma para a figura 3 qual das duas regras se verifica. A regra que se confirma é o número da figura mais 4, ou é o número da figura menos um, mais quatro?
> Luís – É menos um. […]
> Prof. – Luís, explica agora como registar.
> Luís – Na figura 15, retiramos um e acrescentamos os quatro da 1.ª figura.
> Prof. – Os quatro da figura 1. Na altura o que devemos fazer?
> Luís – Na altura, na figura 15 tem 15 filas inteiras e 1 incompleta, acrescentamos aquele ali. O que está sozinho.
> Prof. – Acrescentamos o quadrado isolado.
> Luís – Que faz uma fila inteira.
> Prof. – Perfaz uma fila inteira. Logo…
> Luís – Ao todo dá 16 filas inteiras. […]
> Luís – Professora! Ainda falta fazer 15x16.

Os argumentos do Luís não foram convincentes porque a maioria dos seus colegas não o estavam a compreender e os restantes achavam que não estava certo. No entanto, os dois ou três colegas que achavam que o raciocínio do Luís não estava certo, não sabiam como contra argumentar porque não estavam a conseguir acompanhar o seu raciocínio. Posteriormente, depois do Luís detetar o erro e começar a escrever no quadro como pensou, a professora explicou para a turma o raciocínio do Luís. No final da explicação, a turma parece ter achado que o Luís descobriu uma forma mais fácil para saber a área de qualquer figura da sequência.

> Prof. – Se nós fizéssemos para a figura 100 ou 200 pela forma do Luís era ou não mais fácil?
> Turma – Era… Sim…

Zé – Eu acho que sei uma maneira mais fácil. […]
Inv. – Afinal qual é melhor?
Zé – A dele!

Exemplo de um argumento apresentado para justificar o número de quadrados da figura 15:


R: Na figura 15 retiramos 1 e acrescentamos o (1) da fig. 18. Na altura a fig. 15 tem 15 filas inteiras e uma e uma incompleta, acrescentando o quadrado isolado fica uma fila inteira, ou seja 16. Para calcular a área multiplicamos 18 por 16. Isto serve para qualquer figura.

$c \times l$

$(n+3) \times (n+1)$

$(4+3) \times (4+1)$

Figura 10 – Resposta à questão d)

Argumento utilizado pelo Luís por considerar que a resposta tinha convencido os colegas mas só depois de corrigir o "erro",

Zé – Convence, a minha convence mas a dele também convence.
Luís – Como estava aqui não convencia porque eu aqui tinha uma coisa mal. […]
Inv. – Mas quando vocês acabaram a tarefa acham que convencia os vossos colegas?
Luís – sim.
Zé – sim. (24.01.2011)

O argumento apresentado na questão d) é geral mas pareceu que não conseguiu convencer toda a turma, primeiro porque inicialmente apresentou um raciocínio com falta de rigor e segundo teve grande dificuldade em expressar-se de forma a transmiti-lo tal como tinha pensado.

O Zé mostra-se resistente ao raciocínio do Luís porque não o podia verificar e depois porque achava que devia existir outro ainda mais fácil.

Assim, verifica-se que após alguma reflexão conseguiram apresentar argumentos gerais, para a área de cada uma das figuras da sequência. Durante o trabalho escrito chegaram a falar neste processo mas apenas exploraram um outro, apresentando argumentos igualmente gerais mas por recorrência. O par mostrou-se em concordância no processo apresentado, satisfeito com a resposta e convencido de que o que escreveram estava correto.

Quando questionados na entrevista (24.01.2011) dizem que faltava responder à questão e) porque não tiveram tempo para escrever. O Luís disse: "E nós íamos para esta!" e o Zé confirmou "Nós íamos explicar.".

O nível da argumentação colaborativa do par foi médio porque trabalharam quase sempre através do debate, partilharam conhecimentos matemáticos, trabalharam em conjunto para resolver o mesmo assunto, a argumentação decorria como diálogo e não pareceu que desenvolvessem o trabalho para uma aprendizagem competitiva (Anexo F – Resolução tarefa 4). No entanto, durante o trabalho escrito, o par não conseguiu refletir o suficiente, e o Luís não conseguiu que o colega compreendesse o seu raciocínio (falha na comunicação).

Mas continuaram a surgir dificuldades, mesmo que momentâneas em ouvir o colega, refletir e construir a sua contra argumentação com base no que o colega disse.

> Zé – Mas para fazer isso temos que saber a da catorze!
> Luís – Não!
> Zé – É, é!
> Luís – Para fazer aquilo que eu disse tem sempre mais um dos lados, logo a figura quinze vai ter que ter 16 e aqui 19! E 16x19 vai dar o resultado.
> Prof. – Faça assim e veja quanto dá! […]
> Zé – 9x6 54… 6 e 4? 9… 304. Mas não temos nada para confirmar!
> Luís – E a prova real?
> Zé – Não dá para ver o resultado. (19.01.2011).

Parece que o Zé só aceitou “fazer” porque a professora disse para quanto dava, mas mal a professora voltou as costas induziu o colega para não pensarem mais por aquele método porque “não temos nada para confirmar”. Até, no diálogo em grande grupo, o Zé, inicialmente, não compreendeu muito bem o raciocínio do Luís, o que parece surgir quando o Luís estava a tentar explicar o Zé não refletiu nem se esforçou para o compreender, dizendo “Eu estou a seguir outro raciocínio porque aquele… eu não estou a perceber.” (Zé, 19.01.2011).

As dificuldades identificadas durante a resolução da tarefa que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: diferente nível de concentração; tempo de envolvimento na tarefa e reação à mesma; colocar o raciocínio por escrito; pensar sobre o pensamento do colega e construir o seu argumento com base nele; refletir; o tempo. Verificou-se algumas dificuldades em colocar o seu raciocínio por escrito principalmente ao nível da generalização. O tempo foi um limitador do desempenho do par porque ainda não tinham debatido todas as suas ideias durante o trabalho escrito e tiveram que “passar” para o diálogo em grande grupo. Este facto fez com que surgissem estratégias de resolução que não foram devidamente exploradas e debatidas, antecipadamente, pelo par. Na entrevista, responderam à questão e), que aconteceu depois do diálogo em grande grupo.

O principal ponto que parece que falhou e, que é considerado fulcral para o bom desempenho numa argumentação colaborativa é “ambas as partes trabalham juntas para resolver um problema e no qual esperam estar de acordo em última instância” (Andriessen, 2006, p. 443).

O Luís teve dificuldade em transmitir o seu raciocínio e, como o seu colega não compreendeu, a professora quando solicitada não “o apoiou”, então tentou transmiti-lo em grande grupo. A persistência do Luís acabou por resultar, mas só após a professora clarificar o seu raciocínio. Pretende-se que quando os alunos "confrontam" os seus colegas com o seu raciocínio consigam desenvolver "a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem" (ME – DGIDC, 2007, p. 9).

Análise geral da turma.

A primeira reação dos alunos à tarefa foi positiva e fixaram esta tarefa por causa do desenho na folha de rosto. Ao lerem "sequência", o primeiro "passo que deram" foi contar o número de quadrados da base e procurar regularidades. Parecendo que esse modo de proceder deveu-se ao trabalho já realizado nas tarefas de sequências (as introdutórias e a tarefa 2). No entanto, tal não foi suficiente para que os alunos conseguissem completar totalmente a tarefa. Aparentemente, a maioria dos pares estava inseguro e não sabia se convencia ou não os colegas.

O desempenho geral da turma foi médio porque os alunos foram desenvolvendo algum trabalho ao longo da tarefa. As questões c), d) e e), onde lhes era solicitado que registassem como chegaram à resposta, ou como sabem, ou que generalizassem as suas respostas, foram as menos bem sucedidas. Na questão c) a maioria chegou ao resultado por recorrência e apresentou os cálculos tendo uma certo dificuldade em transmitir o que fizeram e qual foi a sua estratégia. Na questão d) quase todos os pares resolveram inicialmente por recorrência à figura anterior até chegar à figura 15. Na questão e) a maioria das pares não apresentou qualquer trabalho escrito. Após o esclarecimento do significado de alguns excertos do enunciado ou conceitos, tais como, "cada quadrado é considerado uma unidade de área", "fila", "coluna", "necessidade de convencer" conseguiram compreender e resolver, a maior parte das questões, total ou parcialmente corretas. No entanto, alguns pares necessitaram novamente de ajuda para esclarecer algumas expressões do enunciado e só depois conseguiram resolver as questões total ou parcialmente corretas. Sendo que, alguns dos pares parece que resolveram de modo inseguro, esperando constantemente a aprovação da professora ou da investigadora e não tendo a certeza de convencer os colegas (não registaram qualquer resposta). A maioria dos raciocínios apresentados estava correta mas a explicação estava incompleta ou foi baseada numa estratégia de recorrência. Alguns dos motivos para que tal se tenha verificado parecem continuar a ser a dificuldade na visualização e relacioná-las com o número de ordem do termo da sequência. Nesta tarefa o que limitou, de certo modo, os pares foi a falta de reflexão e a falta da constante insatisfação, que seria o impulsionador para procurarem uma forma melhor de resolução.

Na exploração da tarefa em grande grupo, houve a participação de vários pares até ao momento em que os pares de estudo começaram a apresentar outros raciocínios, mesmo os individuais que não tinham apresentado ao seu colega ou não o tinham conseguido convencer. Como por exemplo, o Luís (par B), na questão d), apresentou uma estratégia de resolução que não a de recorrência, como a da maioria dos pares, e que não tinha sido registado no seu trabalho escrito porque o Zé não o compreendeu. A partir desse momento os únicos pares que ficaram envolvidos no diálogo em grande grupo foram os pares de estudo porque os outros "desistiram" devido à não compreensão do que o colega estava a dizer. Inicialmente, apenas estavam envolvidos o Luís, a professora e a investigadora, porque nem o seu par (o Zé), nem o Diogo e nem o Eduardo não estavam a perceber a estratégia. Posteriormente, o Eduardo e o Zé foram capazes de se manifestar dizendo que não estavam a perceber a estratégia do Luís. Após fazer-se uma série de questões para levar o Luís a refletir, detetar o erro e corrigir a sua estratégia de resolução, a professora explicou para todos, e de modo organizado, como o Luís tinha resolvido a questão. A partir desse momento alguns alunos compreenderam e consideraram que realmente era mais fácil desse modo, para descobrir uma área de um termo de ordem qualquer daquela sequência. Mesmo os que não compreenderam ou não concordaram registaram no seu trabalho porque a professora solicitou que transcrevessem o raciocínio do Luís. Mas, o Diogo, entretanto, tinha encontrado outra forma, segundo ele, mais fácil. Este esperou que a professora lhe desse autorização para falar e expôs a sua estratégia. Apresentou os seus argumentos e a maioria dos colegas que tinham considerado a do Luís mais fácil pareceu que passaram a considerar a do Diogo como a melhor estratégia. Sendo assim, a argumentação coletiva teve a participação de toda a turma na maior parte das questões. No entanto, nas questões com grau de dificuldade superior, que ocuparam a maior parte do diálogo em grande grupo, a argumentação coletiva sustentou-se nos dois pares de estudo. Inicialmente, participaram de forma pouco organizada, mas com umas chamadas de atenção da professora tudo se regularizou. As estratégias apresentadas à turma pelos diferentes pares nem sempre foram compreendidas pelos restantes alunos. Para aliviar esta situação e de certo modo resolvê-la a professora recorreu ao "revoicing" (Forman & Ansell, 2002) numa tentativa de esclarecer o que o aluno estava a querer transmitir e lançar novamente essa ideia para os colegas poderem argumentar e contra-argumentar, caso considerassem necessário. Nas primeiras duas questões existiu consenso coletivo inicial o primeiro par expôs a sua resposta e os restantes concordaram, (questões a), b)) e noutras houve dificuldade na apresentação de argumentos matemáticos capazes de argumentar e contra-argumentar a sua forma de resolução (questões c) e d)), os argumentos apresentados alguns foram gerais mas com alguma falta de rigor, no entanto pareceu que permitiram convencer os colegas.

Apenas um par respondeu a todas as questões e os pares do estudo durante o trabalho escrito apenas não responderam à questão e), completando a tarefa na entrevista.

A dificuldade de concentração, de transmissão e de compreensão de alguns elementos da turma dificultou o seu desempenho e, consequentemente, o desempenho da turma na argumentação coletiva. O que, por vezes, pareceu acontecer é que nas tarefas que envolveram maior raciocínio e estratégia, apenas os pares de estudo e mais um outro, pontualmente, conseguiam acompanhar e participar.

A argumentação coletiva foi média porque houve momentos em que esta foi efetuada com sucesso, como se pode observar nas imagens da gravação vídeo. A argumentação coletiva sustentou-se essencialmente na participação de vários pares, mas na questão d) foi suportada pelos pares de estudo. Conseguiram apresentar argumentos rigorosos, gerais e completos, e esses parece que conseguiram resistir e convencer. O que trouxe maior dificuldade à resolução da tarefa em pares e ao diálogo em grande grupo foi a transmissão de raciocínio. Se não fosse a colaboração da professora e da investigadora o raciocínio do Luís ia continuar por explorar, como aconteceu quando ele tentou expô-lo ao par. No entanto, o Luís foi persistente e à primeira oportunidade voltou a dizê-lo, mas em grande grupo, para ver se alguém o compreendia. Para alguns pares continuou a faltar terem presente a importância de convencer os colegas. Provavelmente, os alunos considerados "menos capazes", como normalmente são "rotulados" não são capazes de enfrentar o contexto social e questionar os colegas considerados "mais capazes". O tempo de discussão tornou-se curto, no entanto, foram exploradas todos os raciocínios apresentados em grande grupo.

Assim, considera-se que o desempenho global dos alunos ao nível da argumentação coletiva foi médio, ao nível da argumentação utilizada foi bom. De modo geral, os pares conseguiram apresentar a generalização por recorrência, mas continuaram a ter dificuldades em apresentar o seu raciocínio, argumentar e contra-argumentar.

Tarefa 7.

Par A.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo E – Resolução da tarefa 7).

O nível de desempenho global do par A na tarefa 7 é considerado bom, porque compreenderam a maioria das questões considerando todos os dados; interpretaram e resolveram correta e autonomamente a maioria das questões; outras questões apenas resolveram corretamente após solicitarem esclarecimentos da professora ou da investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentaram um trabalho organizado; construíram um raciocínio e explicação corretos, umas vezes ocorreu, autonomamente, outras vezes após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram e outras vezes porque a professora ou a investigadora fez uma série de questões que levaram os alunos a refletir; utilizaram desenhos para ajudar a resolver parte da tarefa; apresentaram com rigor a estratégia utilizada; construíram uma explicação correta mas incompleta; apresentaram argumentos gerais, convincentes, mas alguns dos argumentos tinham "fragilidades".

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita quase sempre com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Ao lerem o enunciado da questão 1.e) surgiram-lhe dúvidas,

> Diogo – Ui… como se calcula a área do triângulo? Ah, já sei! Pegamos na área deste triângulo e vemos em cada um quantos tem. Já estás a entender? Quantos triângulos 1 tem em cada figura.
> Edu – Não sei se é.
> Diogo – Professora.
> Edu – Não sei se é!
> Diogo – Eu já entendi mas o Eduardo está com dúvidas. Uma unidade de área é quantas vezes cabe em cada um. Não é?
> Prof. – Exatamente. (31.01.2011).

De imediato, o Diogo pede ajuda à professora para reforçar a sua interpretação e confirmá-la perante o Eduardo.

Após contarem o número de pontos da base de cada triângulo e o perímetro dos triângulos, tiveram que observar a sequência dos números que era gerada pelo número de pontos da base. O Diogo e o Eduardo tiveram dificuldades em compreender o enunciado e não conseguiram superar as dúvidas dentro do par, recorrendo à professora. No entanto, para responder à questão seguinte, o Diogo verificou logo, que "o número de pontos da base é mais um que o número do triângulo", ao que o Eduardo acrescenta que tal acontecia para qualquer lado do triângulo (31.01.2011).

Em duas questões, tiveram que recorrer ao apoio da professora ou investigadora. Na primeira questão da alínea b) porque não compreendiam o enunciado e na questão da alínea e) para terem a certeza de como faziam para determinar a área de cada triângulo.

Após a confirmação por parte da professora, o Eduardo ficou convencido que o seu colega estava correto, mas não tinha a certeza se percebeu bem. Preferindo o Diogo dividir cada um dos triângulos seguintes, dizendo "Eu faço com o lápis." (31.01.2011). Observando as divisões nos triângulos em triângulos geometricamente iguais ao triângulo 1 e contando o número de triângulos existentes

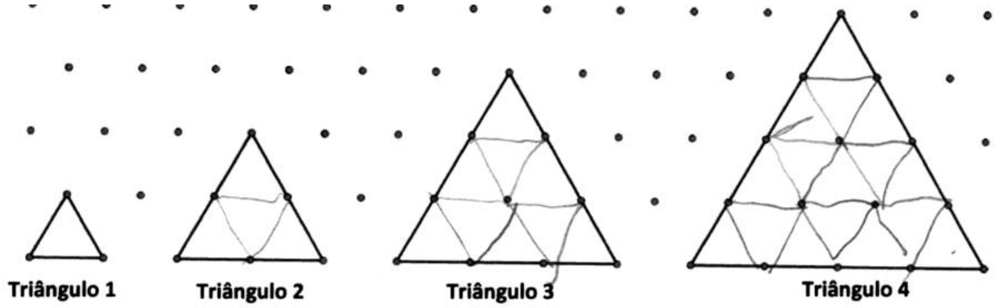


Figura 11 – Divisão dos triângulos em triângulos iguais à unidade de área

preencheram, sem qualquer dificuldade a tabela.

Triângulo	1	2	3	4	5	6
Área do triângulo geral	1	4	9	16	25	36

Figura 12 – Tabela da alínea e) preenchida

A entrevista foi fundamental para que o par conseguisse expressar melhor as suas ideias.

Nalgumas das respostas apresentadas no trabalho escrito parecia que o par tinha bastantes dificuldades em expressar o seu pensamento, pelo que os argumentos apresentados eram pouco rigorosos. Aparentemente, nos raros obstáculos que o par teve recorreu, imediatamente, à professora. Por exemplo: O Diogo, na questão d), disse que "…Pegamos na área deste triângulo e vemos em cada um quantos tem. Já estás a entender? Quantos triângulos 1 tem em cada figura." mas como o Eduardo não estava convencido, o Diogo não tentou apresentar argumentos para convencer o colega e chamou imediatamente a Professora.

Na segunda questão da alínea b) e na questão da alínea d) identificaram as relações existentes entre os números referidos, mas não explicaram como pensaram. No entanto, consegue-se verificar que eles identificaram as relações pela observação dos números organizados na tabela.

> Edu – 1,2, depois 2,3…
> Diogo – É sempre mais um.
> Edu – Pois é sempre mais um que o triângulo.
> Diogo – O número de pontos da base é mais um que o número do triângulo.
> Edu – O número de pontos de cada lado do triângulo é mais um do que o número do triângulo.
> Diogo – O número de pontos do ponteado é mais um que o número do triângulo. (31.01.2011).

Apresentaram um trabalho escrito organizado e com alguns raciocínios e explicações corretos. As repostas incompletas ou com raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista (2.02.2011) porque a investigadora fez uma série de questões que os levaram a refletir.

Como, por exemplo, na resolução da primeira questão da alínea b) colocaram “Números inteiros e seguidos ex. 3, 4, 5, 6, 7.” e na entrevista foram capazes de explicar melhor:

> Edu – São números consecutivos mas não me lembrava da palavra. […]
> Edu – Ah… inteiros.
> Inv. – Ou seja, são números inteiros consecutivos. Agora falta dizer a partir de onde. Qual a sua limitação? Caso exista, pode ter limitação superior e/ou inferior. […]
> Edu – …do dois.
> Inv. – Digam-me tudo como deviam ter escrito ai.
> Diogo – São números inteiros e seguidos…
> Edu – Estes são números inteiros positivos e consecutivos a partir a partir do dois.
> Inv. – E perceberam tudo o que disseram?
> Edu – Sim. Positivos, não é abaixo de zero; inteiros, é que não tem casas decimais; e consecutivos, quer dizer que são seguidos nessa sequência. (18.01.2011).

Na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa.

Na questão da alínea a) resolveram de uma forma organizada, ouvindo-se primeiro a contar o número de pontos da base de cada triângulo, depois a relacioná-los com o número do triângulo e, só, por fim, é que desenharam os dois seguintes. Permitindo-lhes assim preencher facilmente a tabela da alínea b) (Anexo E – Resolução da tarefa 7).

Na primeira questão da alínea b) e na questão da alínea d) não responderam de modo completo porque não registaram como tinham pensado. Na questão e) perceberam mas não conseguiram transmitir corretamente o seu raciocínio.

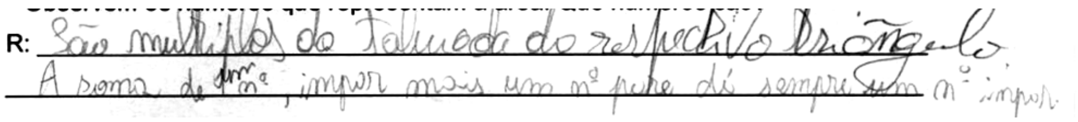

R: São multiplos do tabuada do respectivo triângulo
A soma de um nº impar mais um nº par dá sempre um nº impar.

Figura 13 – Resposta à questão da alínea e)

Na alínea f) resolveram com base na observação e análise da tabela, por eles preenchida, conseguindo constatar que o resultado da área de cada um dos triângulos era sempre um número pertencente aos quadrados perfeitos. No entanto, não conseguiram transmitir com rigor, escrevendo “…nós reparamos que o número da fig. multiplicado pelo mesmo daria o certo resultado.”. O par ficou muito entusiasmado com a regularidade que encontrou na tabela, até o Diogo, expressando a sua alegria, diz “somos magos”, mas precipitou-se na resposta à alínea h) escrevendo “Sim convence, porque testamos o nosso raciocínio em todas as respostas e deu certo”. Como não verificaram o que registaram, foi necessário, na entrevista, fazê-los refletir.

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários, de triângulo, área, perímetro, múltiplos, sequências, números inteiros, números consecutivos, entre outros. Os argumentos que surgiram do trabalho do par alguns apresentavam “fragilidades”, principalmente pela falta de rigor. No entanto, não lhes dificultou a generalização. Na primeira questão da alínea b), se calhar é onde está apresentado o argumento mais incompleto, não sendo rigoroso e, por isso, o menos resistente. Exemplo de um argumento apresentado para dizerem que números são os do perímetro do triângulo equilátero: "São múltiplos de 3.", justificando na entrevista (2.02.2011) que

> Diogo – O perímetro dos triângulos?
> Inv. – Sim.
> Diogo – N.º da figura vezes 3.
> Edu – 1x3 é 3; 3x2 é 6… […]
> Edu – Porque tem três lados! […]
> Inv. – Concordas Diogo?
> Diogo – Concordo.
> Inv. – Se vos pedisse para calcular o perímetro de um triângulo de uma ordem qualquer como fariam?
> Diogo – Tabuada do 3. […]
> Diogo – Se for o 100 é 3x100.

Na entrevista, com incentivo e apoio, conseguiram escrever a expressão algébrica que permitia calcular o perímetro de qualquer triângulo da sequência (Anexo E – Resolução da tarefa 7).

O argumento utilizado para justificarem como calcular a área de um triângulo de qualquer ordem da sequência,

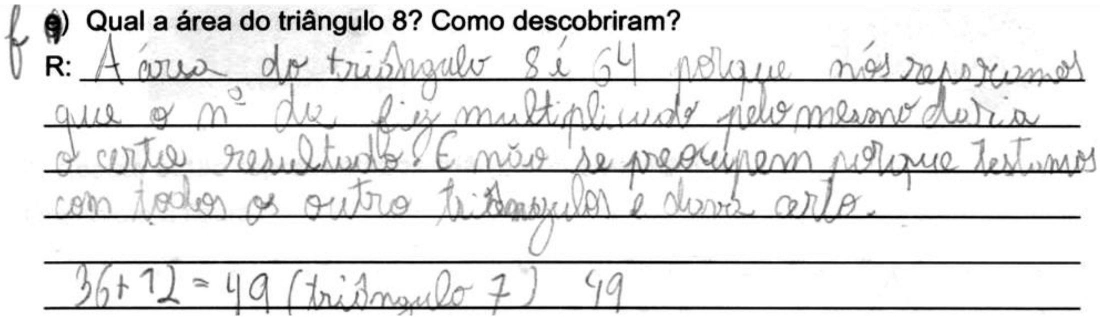
> Edu e Diogo – 7x7, 8x8…
> Diogo – Somos magos.
> Edu – É a tabuada do respetivo triângulo.
> Diogo – Escreve tu isso que eu não percebi nada. […]
> Prof. – Foi assim que completaram a tabela e descobriram a área para a figura 8?
> Diogo – Não, nós é que reparamos agora. Mas já tínhamos completado.
> Prof. – Escrevam agora esse raciocínio.
> Edu – Faz isso. A área do triângulo 8 é 64 porque 8x8 dá 64
> Diogo – A área do triângulo 8 é 64 porque nós reparamos que o número da figura multiplicado pelo mesmo daria um certo resultado. E não se preocupem porque testamos com todos os outros triângulos e dava certo … (31.01.2011).

O argumento utilizado pelo Eduardo para justificar que números da sequência encontraram, "Sim. Positivos, não é abaixo de zero; inteiros, é que não tem casas decimais e consecutivos, quer dizer que são seguidos nessa sequência." (2.02.2011).

Assim, quando surge a questão sobre que sequência de números era a que estava representada:

> Diogo – N.º da figura vezes 3.
> Edu – 1x3 é 3; 3x2 é 6…
> Inv. – Quais as características do triângulo que vos permitam fazer essa observação?
> Edu – Características?
> Inv. – Sim, o que é que o triângulo tem que vos permite dizer que o perímetro seja esse?
> Edu – Porque tem três lados. (02.02.2011).

Estando registado no trabalho escrito um argumento geral para o perímetro que, posteriormente, explicaram melhor durante a entrevista, e também para a área de qualquer triângulo, como se pode ver na resposta apresentada pelo par:



f) Qual a área do triângulo 8? Como descobriram?

R: A área do triângulo 8 é 64 porque nós reparamos que o nº de fiz multiplicado pelo mesmo daria o certo resultado. E não se preocupem porque testamos com todos os outros triângulos e dava certo.

36+13 = 49 (triângulo 7) 49

Figura 14 – Resposta à questão f)

Na questão seguinte, responderam com base nesta: “A área do triângulo 30 é 900 porque pensamos da mesma maneira da alínea anterior”. Quando questionados como podem ter o valor da área, eles respondem:

Edu – 1x1 dá 1.
Diogo – 2x2 dá 4…
Inv. – Não me podem dizer isso de outra forma?
Diogo – Multiplicando o respetivo número pelo mesmo.
Inv. – “Para dar o resultado certo”. O que entendem por resultado certo? Como têm a certeza?
Edu – nós reparamos que o número da figura 1 dava um certo resultado e testamos nas outras figuras e dava certo!
Inv. – Não percebi?!
Diogo – 8x8 é 8.
Inv. – Como?!
Diogo – 64.
Edu – 62. Ai não, 64!
Diogo e Edu – 2x2 4; 3x3 9; 4x4 16… (2.02.2011).

Assim, verifica-se que conseguem identificar a sequência de números inteiros e positivos e quando se refere ao perímetro conseguiram apresentar argumentos gerais, e determiná-lo para qualquer termo da sequência. Mas quando é para a área, como ainda não tinham conhecimento académico dos quadrados perfeitos, conseguiram verificar que aqueles números eram especiais mas tiveram dificuldades em expressar que números eram aqueles. No trabalho escrito registaram que “São múltiplos da tabuada do respetivo triângulo” e ainda que “A soma de um número ímpar mais um n.º par dá sempre um n.º ímpar.”. Durante a resolução da questão o par conversa e solicita a ajuda da professora para esclarecer o que era pedido na questão. No final mostraram-se em concordância, satisfeitos com a resposta e convencidos de que escreveram o esperado e corretamente. Quando questionados na aula o Eduardo e o Diogo explicaram prontamente como tinham pensado. No entanto, em algumas situações não foi explorado o devido. Devia ter-se explorado mais as suas participações para que os alunos pudessem explicar melhor, de forma mais completa e rigorosa, como chegaram a tais conclusões.

O nível da argumentação colaborativa do par foi média porque apesar de se verificarem algumas situações menos corretas souberam trabalhar em conjunto. Numa das situações, quando discordaram, para “desfazer” essas divergências, em vez de contra-argumentarem, chamaram a professora. Os conhecimentos matemáticos partilhados eram efetuados tanto pelo Diogo como pelo Eduardo. No entanto, nem sempre se conseguiam fazer ouvir pelo colega porque cada um falava do seu raciocínio e, por vezes, em simultâneo. Eles próprios na entrevista geral tiveram consciência que “devíamos ser mais organizados a falar”. Por outro lado, estiveram envolvidos e trabalharam em conjunto para resolver as questões, onde estiveram em quase todas em comum acordo. Há que salvaguardar que quando os elementos que estão envolvidos num trabalho e estão de acordo também há menos necessidade de argumentar. Neste caso, nas duas situações em que chamaram a professora, o par conseguia superar as dificuldades se utilizasse mais a argumentação. Assim poderiam resolver sozinhos as questões e ultrapassar os seus pontos de discórdia. A argumentação surgiu várias vezes como diálogo como se pode verificar na resolução da tarefa (Anexo E – Resolução da tarefa 7). Nas últimas questões da tarefa, foi notório que, um dos elementos do par, estava muito contente por considerar que ele tinha razão e estava completamente correto e começou a divergir e “a gabar” o desempenho do par. No entanto, não desenvolveu um trabalho para uma aprendizagem competitiva, nem entre eles nem com os outros pares.

Durante o trabalho escrito surgiram momentos de argumentação agressiva (17.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiam. Utilizando expressões como “Tu és maluco!” (Diogo, 31.01.2011) ou “Está calado.” (Eduardo, 02.02.2011).

As dificuldades que surgiram e que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: a compreensão das questões; a forma como partilhavam o raciocínio com o seu colega; apresentar o raciocínio de forma a justificar a sua não concordância; necessidade extrema da professora para confirmar, esclarecer qual dos elementos “estava certo” e/ou ajudar a chegar à “resposta correta”. Apesar de não considerarem a professora como a única transmissora do conhecimento, porque segundo as suas conceções “a matemática está em todo o lado”, mas nos momentos de insegurança recorreram a uma pessoa que consideraram como a detentora da verdade. No entanto são capazes de discordar da professora e chamá-la à atenção caso cometa algum “erro”. Durante todo a tarefa o Diogo ou o Eduardo quando discordavam, na primeira vez, diziam “não, não” e só quando viam que desse modo não resultava é que chamavam a professora ou apresentavam argumentos que consideravam convincentes para o seu colega.

Penso que este par mostrou evidências de que consideram a descoberta fascinante, porque quando encontravam alguma estratégia de resolução que consideravam “de alto nível” reagiam satisfatoriamente e o Diogo até mesmo euforicamente. Parecendo acontecer, neste par, o que Andriessen (2006) refere que existe se a argumentação for apresentada em situações de aprendizagem como forma de competição, em que “os alunos não querem mais respostas, pois eles querem defender a deles…” (p.466). No entanto, a este par parece faltar, como refere o próprio Eduardo “mais organização” quando cada um expõe as suas ideias. Para que aprendam, futuramente a ouvir, respeitar-se “uns aos outros e a si mesmos” (Hunter, 2007, p.3-82) e consigam tirar o melhor proveito das suas capacidades e desenvolver outras. Ressalve-se que esta turma teve o primeiro contacto com esta dinâmica no dia 17 de novembro de 2010. Para que a argumentação seja uma dinâmica bem sucedida na sala de aula há um conjunto de regras a serem interiorizadas e alterações significativas ao nível do papel do professor e do aluno.

Apesar desta tarefa ter quase tantas questões como a segunda tarefa, os alunos resolveram-na mais rapidamente, não a acharam repetitiva e obtiveram melhor desempenho.

Par B.

A Análise da tarefa foi efetuada com base na resolução efetuada pelo par (Anexo F – Resolução da tarefa 7).

O nível de desempenho global do par B na tarefa 7 é considerado bom, porque parece ter efetuado a leitura do enunciado quase sempre com compreensão; compreenderam a maioria das questões considerando todos os dados; interpretaram e resolveram correta e autonomamente a maioria das questões, outras apenas resolveram corretamente após solicitarem ou receberem esclarecimentos da professora ou da investigadora e, outras vezes, com apoio da investigadora durante a entrevista; apresentam um trabalho organizado; na maioria das questões as respostas foram apresentadas com rigor e de forma completa e em algumas recorreram a uma estratégia para as resolverem; construíram um raciocínio e explicação corretos, umas vezes ocorreu, autonomamente, outras vezes, após uma leitura mais atenta sobre o que escreveram e, outras vezes, porque a professora ou a investigadora fez uma série de questões que levaram os alunos a refletir; utilizaram desenhos para resolver parte da tarefa; construíram uma explicação correta mas incompleta; apresentaram argumentos com “fragilidades” porque não se conseguiu verificar se resistiam a uma contra argumentação.

A leitura dos enunciados da tarefa parece ter sido feita quase sempre com compreensão, até porque para a resolverem utilizaram os dados fornecidos e/ou os obtidos ao longo da resolução da mesma. Ao lerem o enunciado da questão 1.e) surgiram-lhe dúvidas e perante a dificuldade, resolveram dar por terminada a tarefa “Já acabamos!” [faltavam 3 questões]

(31.01.2011). Como a investigadora pediu-lhes para ver a sua resolução da tarefa o par reconsiderou a sua decisão.

Iniciaram a tarefa por contar o número de pontos da base de cada triângulo e o perímetro dos triângulos. Observando que o número de pontos da base gerava uma sequência de números.

> Zé – É sempre a figura 1 mais 2. Na figura 1 isto aqui nunca resulta. Na figura 2 tem a figura 2 mais 1 dá 3. 3x2 dá 6. 3+4 … 4 e depois 4.
> Luís – Não fica aqui.
> Zé – Pois aqui já não dá!
> Luís – Ui… depois zero!!!
> Zé – Não vamos começar enquanto não acabarmos o raciocínio! Ok!?
> Luís – Este estúpido deste cérebro tem o raciocínio meio estragado…
> Zé – Então diz! O que esse estúpido desse cérebro meio estragado…
> Luís – [ri] Tipo no triângulo 2 tem mais um dois, um dois, um dois … sempre…1 2, 12, 1 2. Aqui na figura três continuas a ter um, dois, três; 1,2,3;1,2,3…

Depois de verificar algumas das regularidades da sequência o par desenhou os dois triângulos seguintes (Anexo F – Resolução da tarefa 7).

O Luís e o Zé preencheram a tabela mas inicialmente tiveram algumas dificuldades em compreender o enunciado, mas conseguiram-nas superar dentro do par. A investigadora, colocou algumas questões orientadoras porque, pela observação, considerou que ia ser melhor para o desempenho do par. Para responder à questão, o Luís verificou logo que "o número de pontos da base é mais um que o número do triângulo", com o que o Zé não concordou de imediato (31.01.2011).

> Inv. – Se não tem número é porque é relativamente a este. Estas duas questões são relativamente à 4. O que são o números de pontos da base?
> Zé – São estes.
> Inv. – E que números são?
> Zé – São números inteiros.
> Inv. – E não conseguem dizer mais qualquer coisa?
> Luís – O quê o número do triângulo?
> Zé – [lê] Qual é a relação entre o n.º de pontos da base e o n.º do triângulo?
> Luís – É mais um que o número da figura.
> Zé – Não, não pode!
> Luís – 1-2; 2-3; 3-4; 4-5 … é sempre mais um que o número da figura.
> Zé – É sempre mais um que o número da figura. (escreve). Olha e agora isto aqui. Não sei fazer!?

Conseguiram interpretar, compreender e resolver correta e autonomamente a maioria das questões. No entanto, em três questões, tiveram que recorrer ao apoio da professora ou investigadora. Na primeira questão da alínea e) tiveram dificuldades em exprimir o que observaram, na alínea f) não compreenderam o enunciado e na questão da alínea g) não tiveram muito tempo e o Luís só se lembrava que tinha sido fácil de resolver e que por isso considerava que era suficiente para convencer os colegas.

O Zé ficou parcialmente alheado da tarefa e o maior empenho para resolver a tarefa dependia do Luís. O Luís além de desenhar, como se observa na figura seguinte, as divisões nos triângulos, em triângulos geometricamente iguais ao triângulo 1, registou alguns dados e estratégias de resolução que considerava serem importantes. O que o Zé protestava achando uma “perda de tempo” (31.01.2011), dizendo “Deixa estar! O meu dá. Não dá?” […9] “Nós já tínhamos feito isto tudo… eu gosto mais do meu que é mais pequenino…” (Zé, 31.01.2011).

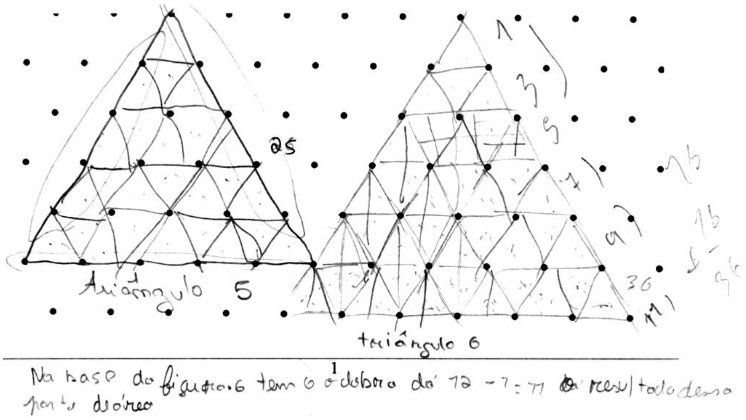


Figura 15 – Divisão dos triângulos em triângulos iguais à unidade de área

Preencheram, sem qualquer dificuldade a tabela,

Triângulo	1	2	3	4	5	6
Área do triângulo geral	1	4	9	16	25	36

Figura 16 – Preenchimento da tabela da alínea e)

O Zé queria dar por terminado a tarefa com a resposta da alínea e), já nem queria refletir sobre o seu trabalho nem pensar se existiam outras estratégias ou, até mesmo, ouvir o Luís.

> Luís – 4+4 dá 8 e menos 1 dá 7 e aqui dá 7. 3+3 dá 6, menos 1, 5. E está sempre a dar! […]
> Luís – Tem 6, por isso, o dobro de 6 é 12 e menos 1 é 11.
> Inv. – Aí está outra forma de pensar. Deves escrever… […]
> Zé – Nós já tínhamos feito isto tudo… eu gosto mais do meu que é mais pequenino… (31.01.2011)

As duas questões seguintes resolveram-nas rapidamente. Na última questão escreveram uma resposta, sem refletir porque o tempo tinha terminado. Nas últimas questões, o envolvimento e empenho do Zé não foi ponderado, ajustado e, aparentemente, com capacidade de reflexão.

A entrevista foi fundamental para que o par conseguisse expressar melhor e calmamente as suas ideias. Nalgumas das respostas apresentadas no trabalho escrito parecia que o par tinha bastantes dificuldades em expressar o seu pensamento, pelo que os argumentos apresentados eram pouco rigorosos. Aparentemente, nos obstáculos que o par teve, pouco recorreu à ajuda da professora ou da investigadora. No entanto, foi necessário que estas oferecessem o seu apoio para que o par terminasse a tarefa.

Por exemplo, na segunda questão da alínea c) o Zé teve que confirmar se o que tinham escrito estava certo:

> Zé – Prof. Joana. Nós na resposta pusemos que era sempre mais um que o n.º da figura.
> Inv. – Se vocês acham…
> Zé - … o número de pontos de cada figura…
> Inv. – Como vocês concluíram isso?
> Zé – Eu estava a pensar porque… mas ele estava a fazer uma que era 4, na fig. 3 era 3+1 que dá 4. Então era 4, 4 e 4, então era 4,4,4. Mas eu…
> Luís – Eu pensava que era só isso! (31.01.2011).

O Zé para responder à questão da alínea f) sabia que "metade da área do quadrado é a do triângulo", mas como na questão não lhes pedia para calcular ficou confuso e já não lhe apetecia pensar mais "Então pede a área da figura 8 … sei lá. Vamos pôr à sorte.". O Luís não queria pôr à sorte mas também não queria contrariar sempre o colega e questionou-o "Dizemos que nos despachamos?!". O Zé aproveitou para dizer, de imediato, bem alto, que terminaram a tarefa quando na verdade ainda lhes faltavam 3 questões.

Na questão da alínea h) o Zé achou complicado mas como já não tinham mais tempo resolveu colocar só que era fácil de encontrar o resultado. Na entrevista (02.02.2011) disseram:

> Luís – A professora disse que era para acabar era para acabar e eu pus uma resposta rápida.
> Zé – Uma resposta rápida que a resposta 8 não é muito pequena!
> Luís – Era para acabar! […]
> Luís – Porque estava a experimentar e tentei 4x4 e dava.

Apresentaram o trabalho escrito organizado e com alguns raciocínios e explicações corretos. As repostas incompletas ou com raciocínios menos claros foram clarificadas durante a entrevista (2.02.2011) porque a investigadora fez uma série de questões, que os levaram a refletir, e o Zé estava menos agitado. Como por exemplo, para verificar a relação entre o número de pontos da base e o perímetro (Anexo F - Resolução da tarefa 7).

> Zé – Múltiplos de 3. […]
> Luís – Porque é o números que tem cada triângulo. […]
> Luís – Porque fazemos sempre vezes 3.
> Inv. – E porquê 3?
> Luís – Porque é o número de lados.

A questão da alínea e) resolveram com base na observação e análise da tabela, por eles preenchida, conseguindo constatar que o resultado da área de cada um dos triângulos era sempre um número pertencente aos quadrados perfeitos. No entanto, não conseguiram transmitir com rigor como surgiam e que números eram aqueles.

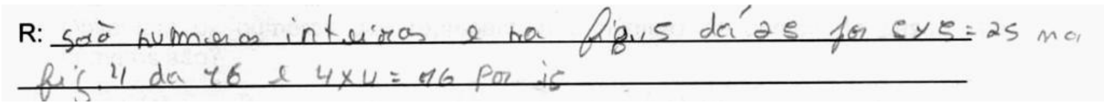

R: são numeros inteiros e na figus dá 25 por 5x5=25 na fig.4 da 16 e 4x4=16 por is

Figura 17 – Resposta à questão da alínea e)

Mas na questão seguinte o Luís disse “Da figura 8 é 8x8 porque estive a ver nas figuras de trás e experimentamos e o número da figura vezes o n.º da figura dava o valor da área!” escrevendo,

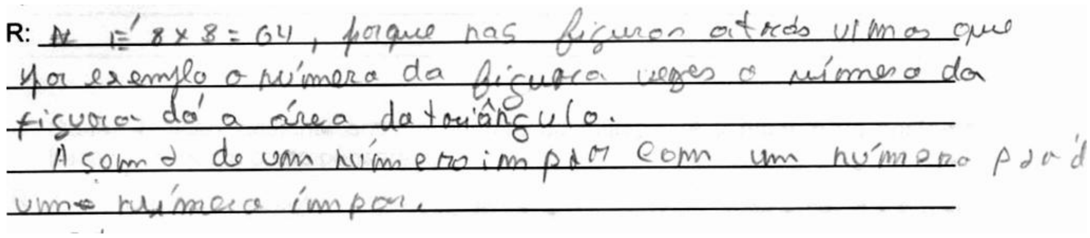

R: ~~A~~ é 8x8=64, porque nas figuras atrás vimos que por exemplo o número da figura vezes o número da figura dá a área do triângulo.
A soma de um número impar com um número par dá um número impar.

Figura 18 – Resposta à questão da alínea f)

O segundo parágrafo foi registado pelo par porque a professora solicitou a toda a turma que o fizesse. No primeiro parágrafo está registado a regularidade encontrada pelo par. No entanto, precipitou-se na resposta à alínea h) escrevendo “Sim, porque forma de fazer muito fácil!”. Esquecendo-se de verificar o que registaram, sendo necessário na entrevista fazê-los refletir (Anexo F – Resolução da tarefa 7).

Aplicaram corretamente os conhecimentos matemáticos necessários: triângulo, área, perímetro, múltiplos, sequências, números inteiros, entre outros, como se pode observar nos diálogos.

Os argumentos que surgiram na primeira questão da alínea e), no trabalho escrito do par, apresentavam algumas “fragilidades”, principalmente pela falta de rigor. No entanto, não lhes dificultou a generalização porque conseguiram responder às questões seguintes. Na primeira questão da alínea b), a ideia está apresentada mas de forma um pouco desorganizada, sendo necessário durante o diálogo em grande grupo esclarecer essas ideias ao grupo.

Exemplo de um argumento apresentado para a sequência dos números correspondente ao perímetro de cada triângulo equilátero: “… se multiplicarmos o número da figura vezes três lados do triângulo vai dar o perímetro da figura.”. Durante o trabalho escrito e a partir do enunciado da questão a), antes de lhes ser pedido para calcularem o perímetro, o Luís e o Zé começaram a observar como podiam contar o perímetro. No entanto, cada um tinha uma estratégia diferente de contar. O Zé, primeiro não concordava com a do Luís, depois quis convencê-lo que a dele era melhor mesmo antes de o ouvir e, por fim, ouviu-o mas disse-lhe “a minha dá. Não dá? Então deixa estar.” .

Zé – Então diz! O que esse estúpido desse cérebro meio estragado… […]
Zé – Não pode… olha 1,2,3,4.
Luís – Mas para já resultou…

Zé – Tu, já contas-te este aqui por isso não podes contar isto aqui nesta vez.
Luís – Pensava que era este tipo de palito… mas dá na mesma.
Zé – Não dá! […]
Zé – Acho que descobri! Olha, figura 3 mais 1 vai dar 4. Não dá?! 1,2,3, 4, não dá? (31.01.2011)

Quando surgiu a questão c),

Luís – Se cada ponto vale 1… o raciocínio que eu estava a dizer…
Zé – Não dá.
Luís – Eu estava a olhar para ali e estava a dar 3 e aqui tem 4 tem sempre mais um que o número da figura ... estava a ver 4 mais 1 cinco.
Zé – Olha perímetro do triângulo.
Luís – 3+6?
Zé – 9.
Luís – Não, estava a pensar 3x1.
Zé – Este aqui nunca dava… olha 3x1, 3x2, 3x3, 3x4, 3x5, 3x6.
Luís – A figura 3 tem 9… 3,6,9, 12. Já percebi. (31.01.2011)

Quando questionados durante a aula, depois de responderem à questão c), o Zé expôs logo as duas formas de contagem.

Zé – Eu estava a pensar porque… mas ele estava a fazer uma que era 4, na fig. 3 era 3+1 que dá 4 então era 4,4 e 4 então era 4,4,4. Mas eu…
Luís – Eu pensava que era só isso!
Zé – Depois eu disse 5+1 que era 6, 6… 6 depois era 6 menos 1 é 5, e depois 5 menos 1 quatro.
Luís – E depois estivemos a calcular. […]
Luís – Mas eu também tive uma! Por exemplo para a fig. 6… na fig. 1 tinha 1,1,1 e na fig. 2 era 2,2,2 e na fig. 3 era 3,3,3! (31.01.2011)

Justificando na entrevista (2.02.2011) que são "Múltiplos de 3." (Zé) "Porque é o número que tem cada triângulo. […] Porque é o número de lados." (Luís). Inicialmente, na entrevista, o Luís tinha as ideias um pouco confusas, "Era agrupar o número da figura. Por exemplo: agrupar o 4,4,4 o 3,3,3… Eu fiz assim 4,4,4, 4 ou 4x4, as outras era 1x1, 2x2, 3x3… e depois é que me lembrei mas isto só tem três lados! Agrupei o número da figura só em três coisas 4,4,4 ou 5,5,5, 2,2,2, 1,1,1 e estava a dar!".

Argumento utilizado para justificarem como calcular a área de um triângulo de qualquer ordem da sequência, "Da figura 8 é 8x8 porque estive a ver nas figuras de trás e experimentamos e o número da figura vezes o n.º da figura dava o valor da área!" (Luís).

Na entrevista conseguiram apresentar argumentos gerais para o perímetro e para a área (Anexo F – Resolução da tarefa 7). No trabalho escrito registaram um argumento geral para o perímetro e para a área de qualquer triângulo, mas para a área está escrito com falta de rigor (figura 17). Para a área dos triângulos 8 (figura 18) e 30 (figura 19) foram capazes de escrever argumentos.

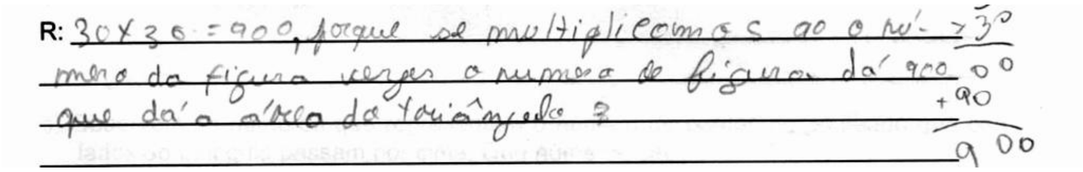

R: 30x30=900, porque se multiplicamos 90 o número da figura vezes o numero de figura dá 900 que dá a área do triângulo ?

Figura 19 – Resposta à alínea g)

Assim, verifica-se que conseguem identificar a sequência de números inteiros e positivos e quando se refere ao perímetro conseguiram apresentar argumentos gerais, e determinar o termo para qualquer ordem da sequência. Mas na generalização do cálculo da área, como ainda não tinham conhecimento académico dos quadrados perfeitos, conseguiram verificar que aqueles números eram especiais mas tiveram dificuldades em expressar que números eram aqueles. No trabalho escrito registaram que “São números inteiros” e deram exemplos. Na questão da alínea e) já escreveram de onde surgiam os números da área de cada triângulo “o número da figura vezes o número da figura dá a área do triângulo”. Durante a resolução da questão o par conversa e apesar de não compreender o enunciado da questão não solicitou a ajuda da professora, nem da investigadora, para esclarecer. Apesar de tudo, no final, mostraram-se em concordância, satisfeitos com a resposta e convencidos de que escreveram o esperado e corretamente. Quando questionados, no diálogo em grande grupo, o Luís e, particularmente, o Zé, explicaram, prontamente, como tinham pensado. No entanto, em algumas situações parece que não foi explorado o devido. Devia-lhes ter sido solicitado que explicassem melhor como chegaram a tais conclusões, de forma mais completa e rigorosa. O Zé queria muito explicar como chegaram ao valor da área de qualquer triângulo, querendo responder às questões anterior pela “última forma” que tinham descoberto. Apesar de não colaborar corretamente com o colega nas últimas questões, no diálogo em grande grupo, estava sempre disposto, com o dedo no ar, para responder.

O nível da argumentação colaborativa do par foi média porque apesar de algumas situações menos corretas, principalmente nas três últimas questões, souberam trabalhar em conjunto. Numa das situações, quando discordaram, em vez de tentar convencer o colega com argumentos que justificassem que a sua resposta era a melhor, optou por dizer que a do Luís também dava mas escreviam a dele porque a dele “dava”. Os conhecimentos matemáticos partilhados eram apresentados mais pelo Luís mas, normalmente, o Zé conseguia expressar-se melhor e com mais rigor. No entanto, nem sempre se conseguia fazer ouvir pelo colega porque cada um falava do seu raciocínio e, por vezes, em simultâneo. Eles próprios na entrevista global tiveram consciência que era difícil porque cada um tem a sua maneira de fazer e o Luís acrescentou “pensei que era mais fácil em grupo mas cada um pensa de maneira diferente”. Por outro lado estiveram envolvidos e trabalharam em conjunto, na maior parte da tarefa, e em quase todas as questões só registaram as respostas depois de estarem em comum acordo. Há que salvaguardar que quando os elementos que estão envolvidos num trabalho estão de acordo também há menos necessidade de argumentar. Neste caso, nas questões finais eles não conseguiam superar as dificuldades sozinhos porque o Zé parecia cansado e começou a ficar irrequieto, sendo difícil, para o Luís, terminar a tarefa, sendo impossível, nessa parte, utilizar a argumentação colaborativa para conseguir resolver as questões. A argumentação surgiu várias vezes como diálogo, como se pode verificar em anexo (Anexo F – Resolução da tarefa 7). Na questão f) da tarefa, foi notório que, um dos elementos do par, estava muito alheado ao trabalho por considerar que já tinha terminado começando a divagar, depois regressou ao trabalho para terminarem as duas últimas questões. Questões que não causaram qualquer tipo de discórdia. No entanto, não desenvolveu um trabalho para uma aprendizagem competitiva, nem entre eles, nem com os outros pares.

Exemplo da argumentação como diálogo, como se pode verificar anteriormente e na resolução da tarefa (Anexo F – Resolução da tarefa 7). Durante o trabalho escrito surgiram momentos de argumentação agressiva (31.01.2011) em que não se souberam ouvir e nada ou pouco refletiam, como já se pode verificar anteriormente pelas intervenções, principalmente do Zé “Não pode! Estás louco?! […] eu gosto mais do meu que é mais pequenino…” (31.01.2011).

As dificuldades que surgiram e que parecem ter limitado o nível geral do seu desempenho foram: a compreensão das questões; a forma como partilhavam entre eles o raciocínio; o saber apresentar o seu raciocínio de forma a justificar a sua não concordância; o tempo de concentração e envolvência na tarefa era diferente para os dois, existindo extrema necessidade da professora/investigadora para incentivá-los a terminar a tarefa. Apesar de não considerarem a professora como a única transmissora do conhecimento o Zé, nesta tarefa ainda teve a necessidade de perguntar à professora se “estava bem” como tinham pensado. Durante todo a tarefa o Zé ou o Luís quando discordavam, na primeira vez, diziam “não, não” e só quando viam que desse modo não resultava é que apresentavam argumentos que consideravam que era convincente para o seu colega (Anexo F – Resolução da tarefa 7). Parece que este par tem algumas dificuldades em manter o envolvimento durante 90 minutos na mesma tarefa, apesar de a resolverem, de certa forma, facilmente. A partir dos 50 minutos, aproximadamente, o Zé começava a dispersar e tentar fazer mais que uma coisa ao mesmo tempo. Primeiro o objetivo passa por despachar a tarefa até porque o que ele gosta mesmo é de cálculos e não de ter que justificar e dizer como pensou e ainda por cima convencer o colega de que como ele pensou é melhor. Segundo Andriessen (2006), considerou nas conclusões do seu estudo, muitos alunos sentem que a argumentação é um desperdício de tempo, eles, simplesmente, preferem que os professores lhes deem as respostas. O que parece ser o sentimento do Zé. Mostrando tal vontade quando quer dar por terminada a tarefa e esperar pelo diálogo em grande grupo, de onde irá obter "as respostas".

Os alunos mostraram que gostaram da tarefa e foi notório o aumento da sua capacidade em termos de visualização de regularidades, de diferentes formas de contagem e de rapidez de resolução. Parece que esta evolução foi obtida pelo desenvolvimento das outras tarefas. No entanto, para alguns alunos, como o Zé que não gosta de escrever nem de justificar como pensa continua a verificar-se um decréscimo acentuado no seu nível de concentração e envolvimento na tarefa desde o momento em que lhes é entregue a tarefa até ao diálogo em grande grupo. Para ele, talvez fosse mais produtivo, tarefas mais pequenas e a sua aplicação mais dispersa (não tornando este tipo de tarefas como rotina de sala de aula).

Por várias vezes, teve de se recorrer à estratégia de Forman e Ansell (2002), principalmente com o Luís, para que, através do "revoicing" seja possível colocá-lo a refletir e fomentar a necessidade de reformular e, se carecer, voltar a argumentar.

Neste par surgiram algumas vezes o que Andriessen (2006) considera que pouco tem a contribuir para a educação matemática que foi "ligações individuais de argumentação de forma agressiva e de oposição em que o objetivo não é trabalhar em conjunto, mas individualmente…" (p. 443). Eles parece que não têm as regras bem interiorizadas e acabam por ter um ambiente social (Hunter citando Mouchecheri e Enderson, p. 3-82) que ainda não permite que os dois elementos participem numa verdadeira troca de ideias e perspetivas.

Análise geral da turma.

A primeira reação dos pares à tarefa foi positiva mas alguns alunos já tinham saudades de ter "matemática", apesar da professora dizer, desde o início, que as tarefas que iam realizar pertenciam ao programa de matemática. Parecendo que não tinham a perceção que nesta disciplina também se justificava, verificava o que achavam que era a resolução correta, apresentava o seu raciocínio e se tinha que dizer sempre como pensava, apresentava argumentos e contra argumentos e que se refletia. Continuavam a dizer que gostavam das tarefas mas, os considerados "bons alunos" a "contas", principalmente, estavam a ficar cansados porque estavam a achar que neste campo não eram "tão bons". Nesta tarefa já quase todos os pares conseguiram responder à maioria das questões, de forma empenhada. Apesar da tarefa ser relativamente longa (11 questões) conseguiram manter-se envolvidos na tarefa e terminá-la em 45/50 minutos.

O desempenho geral da turma foi médio porque os alunos foram desenvolvendo trabalho ao longo da tarefa, as questões onde lhes era solicitado que generalizassem ou que identificassem os números que tinham obtido nas suas respostas, foram as menos bem sucedidas. Após o esclarecimento do significado de alguns enunciados a alguns pares conseguiram resolver as questões, tais como: a primeira questão da alínea b); a questão das alíneas c), d) e e). No entanto, alguns pares, resolveram algumas questões (e, f, g) por recorrência mas corretamente e, possivelmente, devido à sua insegurança, apagaram total ou parcialmente do que tinham registado para transcrever o que a professora escreveu no quadro.

A maioria dos raciocínios apresentados estão parcialmente corretos mas a explicação não está completa, por vezes, existe falta de rigor na apresentação da estratégia o que dificultou a generalização sem recorrência (e, f). Alguns dos motivos para que tal se tenha verificado parecem ser a incompreensão de alguns enunciados e a falta de autonomia.

Na exploração da tarefa em grande grupo, houve a participação de vários pares até à questão f). No entanto, para responder à questão g), onde era conveniente abstraírem-se da recorrência, sendo, por isso o grau de dificuldade maior, a argumentação coletiva sustentou-se com base nos dois pares de estudo. Para verificar a necessidade de encontrar uma forma que não a resolução por recorrência os alunos foram questionados qual seria a área do triângulo 100. Assim, a turma considerou que a melhor estratégia para resolver a questão g) era a do Diogo (que era igual à do par B). Participaram de forma organizada, mas as ideias apresentadas à turma nem sempre foram compreendidas pelos restantes (como por exemplo uma das ideias do Luís). Para aliviar esta situação a professora recorreu ao “revoicing” (Forman & Ansell, 2002) numa tentativa de lançar novamente a ideia. Em algumas questões existiu consenso coletivo inicial, desde o momento em que o primeiro par expos a sua resposta, (questões a e d), preenchimento das tabelas b) e e)) e noutras houve dificuldade na apresentação de argumentos matemáticos capazes de justificar a sua forma de resolução (questões a, e), os argumentos apresentados foram gerais e parece que permitiam convencer os colegas.

Apenas três pares não responderam à última questão, os restantes responderam a todas as questões mas algumas delas sem justificar, respondendo, por exemplo, “sim” ou “sim, porque achamos que temos o raciocínio certo”. Na questão da alínea g) apenas apresentaram o cálculo, a maioria parece que alterou depois do diálogo, porque ficaram convencidos que os colegas tinham razão e modificaram a sua resposta. O que parece acrescer ao grau de dificuldade da questão foi a necessidade de generalizarem para responderem rápida e corretamente à questão.

A competição entre pares de estudo não deixou de se verificar, mas de forma mais ténue. O querer terminar de resolver a tarefa em primeiro lugar, a razão apresentada pela qual acham que a forma como pensaram convence os colegas.

A argumentação coletiva foi efetuada com algum sucesso, considerando-se média segundo a grelha de classificação do estudo. Para que tal aconteça com sucesso, segundo Hunter (2007), entre outros aspetos, os alunos têm que ter a noção da importância de convencer o colega. Este aspeto melhorou significativamente ao longo das tarefas mas existem várias condicionantes que perturbam o seu bom desempenho. Como, por exemplo a pressão provocada pelo contexto social, pois há colegas que são considerados “mais capazes” e, apesar de não concordarem com as argumentações apresentadas acomodaram-se e não apresentaram o seu raciocínio; o fator tempo; a compreensão da tarefa e o grau de envolvimento dos pares; a rotina e o saberem como devem agir na resolução de tarefas a pares. Para esta turma o professor continua a ser considerado como uma autoridade apesar de já conseguirem colocar em causa o que a professora diz em algumas situações.

Assim, considera-se que o desempenho global dos alunos ao nível da argumentação coletiva foi médio, ao nível da argumentação utilizada foi médio. De modo geral, os pares continuaram a ter dificuldades em apresentar o seu raciocínio, mas principalmente, em generalizar e contra-argumentar.

III Parte – Análise comparativa dos resultados

Ao longo de todas as tarefas o desempenho geral do par A foi bom (Quadro 6). No entanto, o par nem sempre foi homogéneo na forma como encarou cada tarefa, como interpretou e compreendeu os enunciados das questões das tarefas, na sua persistência, como resolveu as questões e como apresentou as explicações e argumentos.

De modo geral, o Eduardo conseguia manter-se mais concentrado e era mais persistente que o Diogo. Nalgumas tarefas este último ficava de tal modo eufórico, perante o “desafio”, que dificultava o diálogo entre o par e, consequentemente, a argumentação colaborativa.

O que não foi tão bem conseguido pelo par foi o cumprimento da sequência “ouvir, compreender, refletir, verificar e contra-argumentar ou reforçar a ideia do colega. O facto de terem a preocupação de querer resolver bem, e de forma a que a professora considerasse correto, levou-os muitas vezes à rutura desta sequência. Por tal, o Eduardo "queixou-se", na entrevista geral, que eles precisavam de "ser mais organizados". Apesar de terem sempre a mesma categorização ao nível do desempenho considero que a tarefa 2 foi onde existiram mais lacunas e na tarefa 4 onde conseguiram trabalhar melhor. Na tarefa 2 para que explicassem como pensaram foi preciso uma série de questões orientadoras. Na tarefa 4 foram mais autónomos e conseguiram, oralmente, explicar como pensaram.

O desempenho do par também dependia de fatores externos, porque deixava-se influenciar facilmente por motivações extra sala de aula, como por exemplo, o aproximar da hora de almoço (começavam a sussurrar que tinham fome e a questionarem qual era a ementa na cantina), as atividades em que estavam envolvidos (ensaio para peça de teatro, treinos…), entre outros aspetos. Na tarefa 4 foi onde conseguiram trabalhar melhor ao nível da argumentação colaborativa, talvez, o facto de ter sido resolvida no 2.º bloco de 90' da manhã e não, como, normalmente, no último bloco de 90´da manhã tenha contribuído.

Ao nível da categorização dos argumentos, na tarefa 4, foi onde conseguiram argumentar com menos fragilidades e, em contra partida, na tarefa 2 e 3 foi onde os argumentos apresentados tiveram mais fragilidades e foram em menor quantidade. As dificuldades sentidas, algumas foram sendo ultrapassadas ao longo das tarefas. O tempo começou a ser mais bem gerido pelo par. No Quadro 6, que tinha tantas questões quanto a tarefa 2, o par conseguiu resolver dentro do tempo estipulado. A partir da tarefa 2 deixaram de utilizar a professora como argumento, mas continuaram a recorrer-se dela para confirmarem o raciocínio e as suas respostas. A dificuldade em ouvir-se e em refletir sobre o raciocínio do outro dependia, em parte, da agitação com que entravam para a sala de aula e da forma como encaravam a tarefa.

Quadro 6

O par A ao longo das tarefas

	Desempenho geral	**Argumentação colaborativa**	**Categorização argumentos**	**Dificuldades**
T_2	Médio: - Compreenderam parte da tarefa - Resolveram corretamente as questões, mas com apoio; - Utilizaram materiais manipuláveis; - Explicação correta mas incompleta ou completa porque a investigadora fez uma série de questões.	Média: - Trabalho em diálogo e pelo debate; - Partilha de conhecimentos; - Trabalho em conjunto; - Surgiu argumentação agressiva	- Convincentes; - Argumentos baseados na autoridade. Na entrevista: - Gerais e resistentes.	- Tempo limitado; - Passagem a escrito do raciocínio; - Compreensão das questões; - Professora como única transmissora do conhecimento.

T_3	Média: - Compreenderam parte da tarefa - Resolveram corretamente, mas algumas questões necessitaram de apoio; - Raciocínio e explicação parcialmente corretos.	Média: - Em diálogo e pelo debate; - Partilha de conhecimentos; - Trabalho em conjunto; - Não raciocinaram sobre o pensamento do colega. - Argumentação agressiva.	- Rigorosos e gerais, mas não foram resistentes nem convincentes	- Em ouvir-se; - Raciocinar sobre o pensamento do colega; - Limitação do tempo; - Concentração; - Diogo irrequieto; - Confusão entre conceitos.
T_4	Bom: - Compreenderam a maioria das questões; - Interpretaram e resolveram correta e autonomamente e outras com apoio; - Construíram um raciocínio e explicação corretos, por vezes, com o apoio; - Apresentaram com rigor a estratégia utilizada; - Explicação correta mas incompleta.	Boa: - Trabalharam quase sempre pelo debate; - Partilharam conhecimentos matemáticos; - Trabalharam em conjunto; - Argumentação decorreu como diálogo.	- Rigorosos, completos, gerais e, aparentemente, convincentes.	- Confusões entre conceitos; - Raros momentos em que não conseguiam ouvir-se, refletir e construir a sua contra argumentação. - Diferente nível de maturidade entre os elementos do par; - Transmitir o raciocínio por escrito; - Limite de tempo.
T_7	Bom: - Compreenderam a maioria das questões; - Interpretaram e resolveram correta e autonomamente a maioria das questões, outras com apoio; - Explicação correta mas incompleta; - Apresentaram argumentos mas alguns com "fragilidades".	Média: - Chamar a professora para desfazer as divergências; - Partilha de conhecimentos matemáticos; - Nem sempre se conseguiam fazer ouvir pelo colega; - Trabalharam em conjunto; - Argumentação como diálogo; - Argumentação agressiva.	- Rigor; - Argumento incompleto; - Argumentos completos, rigorosos e gerais.	- Compreensão das questões; - Partilhava do raciocínio; - Necessidade de confirmação junto da professora.

O desempenho do par B na tarefa 2 foi considerado médio e na tarefa 3 fraco (Quadro 7). Nestas tarefas conseguiram compreender autonomamente alguns aspetos das questões, tiveram alguns raciocínios e explicações corretos, mas precisaram de apoio para os completarem e para terminarem de as resolver. Nas tarefas 4 e 7 o desempenho foi categorizado como bom, apesar de continuarem a precisar de apoio e incentivo para refletirem, moderarem os diálogos entre o par, para que se conseguirem ouvir e tentarem compreender o raciocínio do colega, para serem persistentes e não desistirem das tarefas. Apresentaram os raciocínios e explicações corretas, mas incompletas e, por isso, tornou-se imprescindível o apoio com questões orientadoras, durante a entrevista.

A argumentação colaborativa foi evoluindo ao longo das tarefas, no entanto, na tarefa 7, o Zé teve dificuldades em ouvir o Luís, prejudicando, por isso, o desempenho do par neste aspeto. Na tarefa 2 não respeitaram as regras para permitirem que surgisse a argumentação colaborativa, na tarefa 3 conseguiram resolver a tarefa em conjunto, pelo diálogo e pelo debate, através da partilha de alguns conhecimentos matemáticos, mas não raciocinaram sobre o pensamento do colega optando, por vezes, em dizer o seu raciocínio sem sequer verificar se o que o colega estava a dizer se assemelhava ou não ao seu. Na tarefa 4 melhoraram todos os outros aspetos menos a reflexão, na tarefa 7 o par voltou a não conseguir ouvir-se primeiro e depois argumentar com base no raciocínio um do outro.

Na categorização dos argumentos a tarefa 2 foi a menos "produtiva" durante a sua resolução não conseguiram apresentar um argumento completo, nem rigoroso, nem convincente, nem geral e nem resistente. Na entrevista, já foram capazes de apresentar um argumento geral e convincente. Na tarefa 3 durante o trabalho escrito referiram argumentos pouco rigorosos e gerais. Na tarefa 4, os argumentos foram categorizados como completos, rigorosos e gerais, no entanto não foi possível testar a sua resistência e se verdadeiramente convenciam os colegas. Na tarefa 7 nem todos os argumentos, inicialmente, apresentados eram rigorosos.

As dificuldades deste par foram-se dissipando ao longo da aplicação das tarefas, mas, algumas continuaram a verifica-se, como, a transmissão do raciocínio ao seu par (mais por parte do Luís), a concentração e a falta de reflexão. Estes aspetos talvez sejam devido às divergências existentes ao nível da motivação, envolvência na tarefa, tempo de concentração, no tipo de raciocínio em que se consideram realmente bons alunos, a influência que têm com o meio, a necessidade de competitividade, entre outros.

Quadro 7

O par B ao longo das tarefas

	Desempenho geral	**Argumentação colaborativa**	**Categorização argumentos**	**Dificuldades**
T_2	Médio: - Compreenderam e interpretaram sozinhos alguns aspetos na maioria das questões, o restante foi com apoio; - Resolveram corretamente mas de forma insegura e outros raciocínios e explicações parcialmente corretos; - Utilizaram materiais manipuláveis; - Trabalho pouco organizado.	Fraca: - Necessidade de confirmarem; - Dificuldade na partilha de conhecimentos; - Não trabalharam em conjunto; - Surgiu argumentação agressiva	Na entrevista: - Geral; - convincente.	- Competição por parte do Zé; - Partilha do seu raciocínio; - Compreensão das questões; - Professora como única transmissora do conhecimento.

T_3	Fraco: - Compreenderam e interpretaram uma questão; - Com apoio resolveram corretamente, mas de forma insegura, tendo completado a tarefa apenas na entrevista; - Raciocínio e explicação parcialmente corretos e incompletos; - Falta de rigor na estratégia.	Média: - Em diálogo e pelo debate; - Partilha de conhecimento matemático; - Trabalho em conjunto; - Não raciocinaram sobre o pensamento do colega.	- Pouco rigorosos e gerais. - Não foram resistentes nem convincentes	- Em ouvir-se; - Falta de diálogo; - Raciocinar sobre o pensamento do colega; - Confusão entre conceitos; - Limitação do tempo.
T_4	Bom: - Compreenderam a maioria das questões; - Interpretaram e resolveram correta e autonomamente e outras com apoio; - Construíram um raciocínio e explicação corretos, por vezes, com o apoio; - Apresentaram com rigor e de forma completa a maioria das respostas; - Explicação correta mas incompleta.	Boa: - Trabalharam quase sempre pelo debate; - Partilharam conhecimentos matemáticos; - Trabalharam em conjunto mas faltou refletirem; - Argumentação decorreu como diálogo.	- Completos, rigorosos e gerais.	- Confusões entre conceitos; - Conseguir ouvirem-se, refletir e construir a sua contra argumentação. - Diferente nível de concentração; - Transmitir o raciocínio por escrito; - Limite de tempo.
T_7	Bom: - Compreenderam a maioria das questões; - Interpretaram e resolveram correta e autonomamente a maioria das questões, outras com apoio; - Explicação e raciocínio mas nem sempre autonomamente; - Apresentaram argumentos mas alguns com "fragilidades".	Média: - Partilha de conhecimentos matemáticos; - Nem sempre se conseguiam fazer ouvir pelo colega; - Trabalharam em conjunto para resolver as questões; - Argumentação como diálogo.	- Nem todos foram rigorosos; - Argumentos completos e gerais.	- Compreensão das questões; - A forma como partilhava o seu raciocínio; - Tempo de concentração; - Necessidade da professora para incentivá-los.

Comparando a prestação dos pares ao longo das tarefas (Quadro 8) pode dizer-se que de modo geral, o par A destacou-se relativamente ao par B nas tarefas 2 e 3, mas nas tarefas 4 e 7, o desempenho dos pares do estudo foram mais equilibrados. O desempenho geral, ao longo das tarefas, do par A foi mais constante do que o do par B. Parece que o par A teve melhor desempenho nas primeiras tarefas porque este era capaz de contestar o que a professora dizia, no entanto, em contrapartida o Eduardo utilizava muito a professora como argumento para convencer o colega. O modo como reagiam às tarefas foi sempre positivo e nunca mostraram desinteresse ou "cansaço" durante a sua resolução. Por vezes, a euforia do Diogo é que prejudicava a argumentação colaborativa do par. O par B tinha dificuldades em interpretar o enunciado, ou seja, não sabia o que lhes era perguntado, não conseguiam argumentar, e por isso solicitavam muitas vezes a professora para os ajudar quer ao nível da interpretação, quer da confirmação. Neste par já transpareceu alguma saturação, não entre tarefas mas sim dentro da mesma tarefa; por vezes, o Luís quase que terminava a tarefa sozinho. Nas primeiras tarefas que o par resolveu, a principal motivação do Zé era terminar primeiro que o outro par. O Zé talvez tivesse alguma dificuldade em compreender como o colega estava a pensar e preferia seguir o raciocínio dele que, normalmente, era concretizável porque assim "tinha a certeza".

Os argumentos para convencer o colega foram utilizados, de forma mais equilibrada, pelos dois elementos do par A do que o par B. No par B, o Luís tinha enorme dificuldade em fazer-se ouvir e ser compreendido pelo Zé.

Nenhum dos pares conseguiu completar uma tarefa completamente de modo autónomo, correto e completo. Foi notória, nos dois pares, a necessidade extrema de recorrer à professora para confirmar as suas respostas e que estas fossem "aprovadas" pela professora, assim como as dificuldades do Diogo, do Zé e, por vezes quando já estava saturado, o Eduardo em ouvir o companheiro. Nos dois pares, um dos elementos era mais agitado e com menor tempo de concentração do que o outro, o que talvez tenha acabado por prejudicar o desempenho dos pares.

Nas questões que solicitavam que escrevesse o modo como pensaram eram onde os pares tinham mais dificuldades. Parecia que não tinham muito treino ao nível da argumentação, explicação do modo como pensaram, que estavam habituados a dizer as diferentes formas de resolução, mas que cabia à professora a ponderação e "decisão" do que considerar "certo e errado"; assim, não tinham que ouvir os seus colegas, mas apenas dizer a sua forma de resolução.

Quadro 8

Análise comparativa – par A e par B – ao longo das tarefas

	Pares	Desempenho geral	Argumentação colaborativa	Categorização de argumentos	Dificuldades
T2	Par A	Médio: Resolveram corretamente as questões, mas com apoio; explicação correta mas, inicialmente incompleta	Média: Partilha de conhecimentos; trabalho em conjunto; argumentação agressiva.	Convincentes; argumentos baseados na autoridade. Na entrevista: Gerais e resistentes	Tempo; passagem a escrito do raciocínio; compreensão das questões; necessidade confirmação.
	Par B	Médio: Compreenderam alguns aspetos na maioria das questões; resolveram de forma insegura e outros raciocínios e explicações parcialmente corretos.	Fraca: Necessidade de confirmarem; não trabalharam em conjunto; argumentação agressiva	Na entrevista: Geral e convincente.	Competição; partilha do raciocínio; Compreensão das questões; necessidade confirmação.

T3	Par A	Médio: compreenderam parte da tarefa; resolveram corretamente, mas necessitaram de apoio; raciocínio e explicação parcialmente corretos	Média: partilha de conhecimentos; trabalho em conjunto; não raciocinaram sobre o pensamento do colega; argumentação agressiva.	Rigorosos e gerais, mas não foram resistentes nem convincentes	Em ouvir-se; raciocinar sobre o pensamento do colega; tempo; concentração; Diogo irrequieto; confusão entre conceitos.
	Par B	Fraco: compreenderam e interpretaram uma questão; com apoio resolveram mas de forma insegura e completaram apenas na entrevista; falta de rigor na estratégia	Média: partilha de conhecimento matemático; trabalho em conjunto; não raciocinaram sobre o pensamento do par	- Pouco rigorosos e gerais	Em ouvir-se; falta de diálogo; raciocinar sobre o pensamento do colega; confusão entre conceitos; tempo.
T4	Par A	Bom: resolveram algumas correta e autonomamente; raciocínio e explicação corretos, por vezes, com o apoio.	Boa: trabalharam quase sempre pelo debate; partilharam conhecimentos matemáticos; trabalharam em conjunto.	Rigorosos, completos, gerais e, aparentemente, convincentes.	Confusão entre conceitos; tempo; refletir e construir a sua contra argumentação; maturidade; transmitir o raciocínio por escrito
	Par B	Bom: compreenderam maioria das questões; resolveram algumas correta e autonomamente e outras com apoio; explicação correta mas incompleta	Boa: trabalharam quase sempre pelo debate; partilharam conhecimentos matemáticos; não refletiram	Completos, rigorosos e gerais	Confusões entre conceitos; conseguir ouvirem-se e refletir; concentração; tempo; transmitir o raciocínio por escrito.
T7	Par A	Bom: interpretaram e resolveram corretamente a maioria das questões; explicação correta mas incompleta; argumentos “fragilidades”	Média: professora para momentos de divergências; nem sempre se ouviam; trabalharam em conjunto; argumentação agressiva.	Rigor; argumento incompleto; argumentos completos, rigorosos e gerais.	Compreensão das questões; partilhava do raciocínio; necessidade de confirmação junto da professora.
	Par B	Bom: Interpretaram e resolveram correta a maioria das questões; explicação e raciocínio corretos, mas nem sempre autonomamente; argumentos com “fragilidades”.	Média: partilha de conhecimentos matemáticos; nem sempre se ouviam; Trabalharam em conjunto.	Nem todos foram rigorosos; argumentos completos e gerais	Compreensão das questões; a forma como partilhava o seu raciocínio; tempo de concentração; necessidade da professora para incentivá-los.

V – CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E SUGESTÕES PARA INVESTIGAÇÃO FUTURA

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, começando pela apresentação das respostas às questões inicialmente formuladas, seguem-se as principais limitações do estudo e algumas contribuições para estudos futuros e apresenta-se nota final.

Conclusões

O estudo foi orientado pelas seguintes questões:

1. Que conceções manifestam alunos do 5.º ano de escolaridade sobre o conhecimento matemático? Essas conceções evoluíram ao longo do estudo?; 2. Como se caracterizam os argumentos matemáticos de alunos do 5.º ano de escolaridade?; 3. Como se caracterizam as dificuldades manifestadas por alunos do 5.º ano de escolaridade? Porque é que os alunos do 5.º ano apresentam dificuldades quando argumentam matematicamente? Como é possível ultrapassar algumas das dificuldades?

Conceções.

Ao nível das conceções, relativamente à matemática e ao conhecimento matemático, pareceu que estas se alteraram. Apesar da intervenção ter ocorrido durante um período de tempo muito restrito Forman e Ansell (2002) referem que com a aplicação de "tarefas mais desafiadoras" tal seria possível. Antes da aplicação das tarefas, os dois casos estudados quando lhes falavam que iam ter aula de matemática pensavam nos cálculos e após a aplicação das tarefas, um dos pares deixou de pensar que ia fazer cálculos e o outro, apesar de manter a sua opinião quanto aos cálculos, passou a pensar também nos problemas difíceis. Antes da aplicação das tarefas, num dos pares, um dos alunos discordava que conseguia criar conhecimento matemático e depois passou a considerar que sim. Um deles não alterou a sua opinião, concordando que conseguia criar conhecimento matemático. No outro par que concordavam que conseguiam criar conhecimento matemático, reforçaram a sua opinião, passando a concordar totalmente. Após a aplicação das tarefas, relativamente ao trabalho a pares, um dos casos, registou que não considerava que ajudasse a perceber melhor os problemas. Confessaram na entrevista geral, que é mais fácil seguir o raciocínio individual e a forma que encontraram para resolver, do que estar a convencer o colega. Pareciam querer dizer que gastavam tempo e energia, tal como refere Andriessen (2006), uns talvez pela dificuldade em transmitirem oralmente o que pensam e outros pela dificuldade em estar o tempo todo que é proposto para a resolução da tarefa, concentrado, e outro ainda porque, como dizia o Eduardo, "devíamos ser mais organizados porque dizíamos as ideias em simultâneo".

As maiores alterações verificadas na turma entre cada um dos momento em que se passou o questionário, foram, (a) alunos que passaram a discordar que a matemática era essencialmente "fazer cálculos", (b) alunos que passaram a discordar que "o conhecimento matemático fosse fixo e imutável (não se altera)" e (c) alunos que passaram a discordar que só o professor era capaz de transmitir conhecimento matemático". No entanto, um elemento da cada par passou a discordar que o trabalho a pares possa ajudar a perceber melhor os problemas. Talvez porque tendo formas muito diferentes de resolver as tarefas e não estarem habituados a expor o seu raciocínio, a apresentar a forma como pensaram e a argumentar de modo a permitir convencer o seu par. Confirmou-se para um dos alunos (Zé) o referido por Segurado e Ponte (1998) de que as conceções influenciam de tal modo que podem mesmo determinar o modo como o aluno "decide abordar um problema, que técnicas usará ou evitará, quanto tempo e esforço dedicará ao problema, etc." (p. 8). Um dos alunos que revelou inicialmente autoestima elevada e considerou que a matemática "é fácil", e talvez por isso, nem chegasse a pensar nos problemas difíceis, depois da resolução das tarefas reconsiderou a sua resposta.

O par B foi o que teve mais dificuldades em trabalhar em pares, construindo uma resolução que resultava dos dois alunos, e, possivelmente, por tal, quando lhe falavam de matemática tenha começado a pensar, para além dos cálculos, nos problemas difíceis. Assim, deve-se ter imenso cuidado no tipo de tarefas propostas na sala de aula, quer para a "reformulação" das conceções dos alunos quer na perspetiva em que Garofalo apresentado por Segurado e Ponte (1998) refere "a importância das conceções reside no facto de elas influenciarem a forma como os alunos pensam e abordam e resolvem as tarefas matemáticas, como estudam e como participam nas aulas." (p. 5, 6).

As conceções iniciais sobre o que é a matemática que cada um dos alunos manifestou estavam incluídas nas que os autores, Fonseca (2004), referindo Schoenfeld (1985, 1988) e Segurado e Ponte (1998), indicaram: a matemática é só cálculo; apenas os cientistas (génios) podem ser capazes de descobrir e criar matemática; a matemática aceita-se e estuda-se passivamente, o aluno recebe as informações do professor e reprodu-las; o aluno é consumidor passivo da matemática acabada que outros apresentam; não tenho jeito para a matemática; por isso concordavam que a capacidade para aprender a matemática nasce com as pessoas; o conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera); só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático; mesmo quando estudo não entendo matemática.

Suthar e Tarmizi (2010) verificaram que existe uma forte probabilidade de que as conceções matemáticas existentes sejam diferentes entre os alunos, a depender dos seus resultados. Mostraram que os alunos com melhores resultados cada vez querem “mais matemática” contrariamente aos que apresentam classificações inferiores. Como um dos alunos dos casos que se considerava “bom aluno a matemática”, talvez por não se considerar “tão bom” ou não estava “tão à vontade” começou a ter vontade de voltar “à matemática” questionando a professora “quando voltamos a ter matemática?” como se as tarefas propostas não fossem matemática. Considero que a manifestação deste aluno pode revelar a diferença substancial entre as tarefas que estavam a ser desenvolvidas no âmbito do estudo e aquelas a que estava acostumado a resolver nas aulas de matemática. Este aspeto pode ter condicionado o modo como se envolveram nas tarefas.

Argumentos.

Na categorização dos argumentos os alunos dos dois casos conseguiram apresentar em três das quatro tarefas apresentadas argumentos completos, rigorosos e gerais. Pontualmente conseguiram apresentar argumentos, completos, rigorosos, gerais, convincentes e resistentes, como, por exemplo, na tarefa 2 para determinarem o número de quadrados de cada moldura era contar os quadrados “um a um”, ou na tarefa 7 para determinar o perímetro de cada triângulo pelos múltiplos de três. No entanto, os casos apenas o conseguiram realizar de forma autónoma pontualmente, e na maior parte das situações aconteceu apenas porque foram orientados, ou na aula pela professora ou investigadora ou na entrevista pela investigadora. Como grande parte das situações aconteceram na entrevista foi difícil testar a resistência dos argumentos e verificar se foram mesmo convincentes no contexto turma.

Os argumentos apresentados durante a resolução das tarefas pelo par A, sem qualquer apoio por parte da professora ou da investigadora foram poucos, não existindo uma tarefa em que os argumentos, após a discussão dentro do par, tenham sido todos apresentados sem fragilidades. Na maior parte das situações, falharam ao nível da generalização ou do rigor. A maioria dos argumentos completos, rigorosos e gerais, foram conseguidos na entrevista através de questões orientadoras. Como por exemplo, o argumento apresentado pelo Eduardo, durante a entrevista da tarefa 7, para convencer que a sequência do número de pontos da base de cada triângulo estava correta disse, “Sim. Positivos, não é abaixo de zero; inteiros, é que não tem casas decimais e consecutivos, quer dizer que são seguidos nessa sequência.” (2.02.2011). O par B teve mais dificuldades do que o par A em apresentar argumentos sem qualquer tipo de orientação. Na aula tiveram que recorrer ao apoio da professora ou investigadora quer para clarificar o que queriam transmitir, quer para ajudá-los a refletir e a pensar sobre o que o colega dizia, tentando assim que eles dissessem ou escrevessem argumentos completos, rigorosos, resistentes, gerais e convincentes. Como por exemplo o par B, tarefa 7, como resposta à questão da alínea c), para o perímetro de um triângulo equilátero, com o apoio da investigadora, durante a resolução da tarefa conseguiram apresentar um argumento completo. O Zé, na entrevista, disse que "Primeiro estava a pensar que era a minha mas depois o Luís veio com aquela que era 111, na fig.2 era 2,2,2, na fig.3 era 3,3,3 e se fosse figura 100 era 100, 100, 100 e dava. […] Múltiplos de 3. […]" ao que o Luís completou dizendo "Porque é o número de lados.".

O tipo de tarefas que lhes foi apresentado e a dinâmica de trabalho de sala de aula foi diferente do que os alunos estavam habituados, pelo que, inicialmente, os argumentos que apresentavam possuíam muitas fragilidades. Este aspeto pode dever-se ao facto de os alunos não terem conhecimento que para argumentarem matematicamente necessitavam de recorrer a justificações para apoiarem as suas "reivindicações, convencer os seus colegas e professor" (Gould, 2003, p. 166) e que o que era desejado era que chegassem "a um consenso através de argumentos matemáticos, conciliando diferentes abordagens." (Komatsu, 2009, p. 394). Assim, os pares de estudo necessitaram de apoio em todas as tarefas para que conseguissem explicar a forma como pensaram e apresentassem os seus argumentos matemáticos. Neste ponto o par A parecia possuir um pouco mais de facilidade do que o par B.

Alguns alunos pareciam que nem "viam" grande interesse em explicar sempre a forma como pensaram e que, por vezes, como aconteceu com o par B, na tarefa 7, em que preferiam esperar pelo diálogo em grande grupo do que tentar encontrar a resposta deles. Talvez estejamos perante uma situação prevista por Andriessen (2006), onde ele considerou que, atualmente, muitos alunos sentem que a argumentação é um desperdício de tempo, preferindo simplesmente que os professores lhes deem as respostas.

No contexto de sala de aula, na apresentação dos argumentos à turma houve raros momentos em que se conseguiram, como Hunter (2007) e Krummheuer (1995, 1998) defendem, a interação entre vários alunos pertencentes à turma, por argumentação coletiva, parecendo os alunos ter, mesmo que momentaneamente, a noção da importância de convencer os colegas e de terem as noções de "discutir" e de discordância. Pode-se contar com a contribuição de vários alunos e, a questão central ser aceite por todos, após a negociação dos argumentos ter sido efetuada com sucesso.

Dificuldades.

As principais dificuldades manifestadas pelos alunos foram: na compreensão das questões; na partilha do raciocínio; no facto de parecerem ter a professora como única transmissora do conhecimento; em ouvir-se e tentar compreender a forma como pensam; em raciocinar sobre o pensamento do colega; em refletir e construir a sua contra argumentação; na falta de diálogo entre o par; na confusão entre conceitos; na limitação do tempo; no facto de ter havido alunos a querer terminar a tarefa em primeiro lugar; no diferente nível de concentração entre os elementos de cada par; em transmitir o raciocínio por escrito; na necessidade do incentivo da professora para continuarem a resolução da tarefa.

Um dos pares teve maior dificuldade no diálogo, porque cada um dos alunos queria resolver a tarefa pelo seu próprio raciocínio e tinham grande dificuldade em construir a contra argumentação, com base no raciocínio que o colega apresentou.

O outro par teve grandes dificuldades na comunicação. Um dos elementos ao tentar transmitir o seu raciocínio não o fazia de forma a que o colega o entendesse. Este, por sua vez, como não compreendia, tentava que o colega o deixasse escrever como pensava e, na maior parte das vezes, não utilizava argumentos matemáticos. Assim, rapidamente se "fartava" da tarefa "desligando", mas mediante "a autoridade" ele era capaz de regressar à tarefa e contribuir um pouco mais. Como não pareciam compreender muito bem a necessidade de argumentar matematicamente para se convencer um ao outro, também não eram capazes de refletir sobre o que diziam e apresentar a sua contra argumentação. Apesar de Cobb e Bauersfeld (1995) salientarem que aquando da resolução de problemas em pequenos grupos, os alunos têm que ser participantes persistentes "para resolver problemas desafiadores, para explicar individualmente as suas soluções pessoais aos parceiros, ouvir e tentar compreender as explicações do companheiro na tentativa de chegar a um consenso sobre uma resposta, e, idealmente, um processo de resolução." (p. 27), verificou-se que este par não conseguiu cumpri-lo em qualquer uma das tarefa. Um dos alunos conseguiu ser persistente, explicar as suas ideias, ouvir e tentar compreender as ideias do outro, mas este nunca procedeu de igual modo. Assim tornava-se muito difícil o par, funcionando como tal, conseguir apresentar uma resolução, assim como os seus argumentos, sem qualquer intervenção por parte da professora ou da investigadora. Parece que se os alunos não forem "treinados" desde cedo para enfrentar "problemas desafiadores" (Cobb & Bauersfeld, 1995) em pares, é difícil que o consigam aplicar num curto intervalo de tempo. No entanto, o outro par, por vezes, conseguiu cumprir com o que Cobb e Bauersfeld (1995) salientaram, apesar dessa forma de agir não ser constante e com duração de uma tarefa completa. Um obstáculo à apresentação de argumentos, à argumentação colaborativa e à coletiva, parece ser por não se conseguir que fosse assumido, na sua plenitude, o papel de orquestradora da tarefa pela professora da turma, talvez porque continuava a ser vista pelos alunos como a autoridade e não como mais um elemento. Limitando assim, o bom desempenho dos pares, quer na resolução das tarefas (argumentação colaborativa) quer na apresentação dos argumentos em grande grupo (argumentação coletiva), porque os alunos acabaram por recorrer à argumentação "porque a professora disse" e de pedirem apoio à professora para confirmar as suas resoluções, em vez de utilizarem argumentos matemáticos para as apoiarem.

O tempo foi uma das dificuldades dos pares. Nas primeiras tarefas foi mais evidente do que nas seguintes, até porque a tarefa 7 foi resolvida em menos tempo do que a tarefa 2 (tendo o mesmo número de questões e do mesmo tipo). Ou seja, com treino os alunos são capazes de resolver cada vez melhor e mais rápido as tarefas. O horário da aula também pareceu influenciar o desempenho dos casos, pois o desempenho dos alunos revelou-se melhor ao primeiro e segundo bloco de 90 minutos da manhã (resolução da tarefa 4) do que no terceiro e quartos blocos da manhã. Aqui os diálogos extra tarefa eram relacionados com a refeição, contribuindo para a desconcentração dos alunos.

Os alunos talvez apresentem dificuldades na argumentação porque nos anos escolares anteriores não foi feito, um trabalho de desenvolvimento ao nível da argumentação. Nas Normas (NTCM-APM, 2007) é sugerido que a argumentação seja introduzida na sala de aula no trabalho individual, a pares, em pequenos grupos ou em grande grupo, desde cedo. Se este trabalho ainda não começou a ser feito, com estes alunos, ou foi sendo feito mas de forma pouco "vincada" é de esperar que tenham muitas dificuldades, como revelaram ter, nas tarefas aplicadas (principalmente nas iniciais e nas três primeiras do estudo). Assim, segundo Komatsu (2009), referindo Miyazaki, entende que será de esperar que com a introdução deste tipo de trabalho os alunos passarão a explicar, progressivamente, cada vez melhor e, assim, desenvolver a sua compreensão matemática. Sendo essa ideia igualmente referida em Andriessen (2006) onde escreve, no seu trabalho, que a argumentação tem a potencialidade de "ajudar os alunos a aprender a pensar criticamente" (p. 443), porque defende ser necessário que os alunos sejam convidados a tomar posições sobre um problema, indicar as suas razões e provas para apoiar as suas opiniões. Sendo essencial propor nas aulas uma sequência de tarefas envolvendo a argumentação e quanto mais prolongado for o tempo de implementação melhor, para que os alunos consigam progressivamente suportar-se nas suas estruturas de conhecimento e nos argumentos dos outros.

Penso que o facto de não estarem habituados à dinâmica proposta fez com que surgissem mais dificuldades ao nível da argumentação, pelo que talvez, se fossem ou, preferencialmente, se já tivessem a ser seguidas as sugestões propostas pelo Programa de matemática (2007) esses obstáculos seriam menores. Onde é sugerido que os alunos "devem iniciar pela justificação de passos e operações na resolução de tarefas e possibilitar-lhes que progridam para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem da Geometria. " (p. 8).

A exploração dos raciocínios em grande grupo utilizando a argumentação coletiva poderá ser muito produtiva. Na aplicação das tarefas do estudo se, posteriormente à resolução em pares, não se procedesse ao diálogo em grande grupo e à apresentação de argumentos, muitos dos raciocínios, formas de resolução e argumentos não surgiriam, pois nos pares um dos elementos pode não ter querido ouvir ou não ter querido registar esse raciocínio, ou não o soube transmitir, entre outras eventualidades. Segundo Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) o diálogo com toda a turma, em que o objetivo era a utilização das respostas dos alunos para a discussão em grande grupo, "pode potencialmente tornar o ensino com tarefas de alto nível mais concretizável para os professores" (p. 550). A professora, na maioria das vezes, foi a orientadora da tarefa, mas em algumas das situações não se certificou que estas "serão mantidas de alto nível e que as ideias matemáticas sejam aprendidas" (p. 550). Este obstáculo surgiu muitas vezes pelo limite de tempo da aula, fazendo com que a professora "apressasse" os alunos para a obtenção da "resposta certa" e não permitisse que todos os alunos que queriam participar expusessem de forma calma o seu raciocínio; deste modo não contribui para manter a "tarefa de alto nível". Para minimizar estes obstáculos é necessário um trabalho prévio do professor com a turma, estabelecendo regras bem claras. Pretende-se que a participação dos alunos seja ampliada e, o ideal seria, incluí-los a todos. Após o estabelecimento das regras, o professor deve, segundo Hunter (2007) apoiado em Manouchehri e Enderson, criar uma cultura de sala de aula em que o valor é colocado no questionamento e argumentação colaborativa requerendo a alteração da perceção e crenças dos alunos sobre o que é a matemática e como é que ela é usada, mas também sobre as suas atitudes e perceção da argumentação." (p. 82).

Segundo Bauersfeld (1995), Cobb (1995) e Komatsu (2009) para que a argumentação, a argumentação colaborativa e a coletiva fosse desenvolvida, os métodos clássicos de ensino teriam que ser abandonados, assim como, os argumentos baseados apenas nas ideias do professor. Argumentos baseados no professor "o professor disse" foram utilizados pelos casos, durante o trabalho escrito, para convencerem o seu par. Segundo Komatsu (2009), para que a argumentação predomine no trabalho produzido na sala de aula é necessário dar oportunidade ao aluno para que ele passe a ter mais protagonismo e ação, possibilitando-lhe ganhar, progressivamente, mais confiança e autonomia e conseguir desenvolver um trabalho mais abstrato na sala de aula.

Hunter (2007) refere que vários estudos, como por exemplo, Manouchehri, Mercer, Wood e McNeal, que "têm fornecido muitas evidências de que quando as oportunidades são propiciadas aos alunos para participar em formas ricas de Inquérito e argumentação, a qualidade das suas próprias explicações e justificações matemáticas são reforçadas. Isso ocorre porque a argumentação é a ferramenta poderosa que permite o raciocínio dos alunos no diálogo para refutar, criticar, elaborar e justificar conceitos e factos matemáticos e desenvolver e perceber as perspetivas opostas quando todos os alunos trabalham para a construção de um consenso coletivo." (p. 3-82).

Forman e Ansell (2002) sugerem que "Professores e alunos podem utilizar "revoicing" para modificar a forma como reivindicações argumentativas são propostas, justificadas e contestadas." (p. 259), que envolve ações como repetir, reformular, resumir, elaborar e/ou traduzir o que outra pessoa fala, facilitando assim, a compreensão sobre o que se está a querer transmitir ou, até mesmo, "oferece uma oportunidade adicional para o aluno ouvir e/ou refletir sobre um enunciado" (p. 258). A professora ao permitir ao aluno apresentar os seus argumentos, repetir, reformular a sua argumentação, refletir sobre os argumentos dos seus colegas e todas as restantes interações envolvidas nesta didática de sala de aula permitiu que os alunos expressassem progressivamente melhor as ideias. Um dos alunos tinha muitas dificuldades em transmitir o seu raciocínio, e no momento em que teve que transmitir oralmente e através da escrita, viu-se obrigado a explicar-se melhor porque, na maioria das situações, os seus colegas não o percebiam. No entanto, após a aplicação do estudo não passou a transmitir corretamente, mas verificou-se que tentava "escolher" os termos mais corretos para se exprimir e fazer-se compreender.

Segundo Hunter (2007) o professor deve "fornecer oportunidades para que os alunos desenvolvam as capacidades de apresentação e avaliação crítica de argumentos matemáticos ou de cálculo" para que aprendam a "construir argumentos matemáticos e a responder aos argumentos dos outros" (p. 3-81).

Numa tentativa de colmatar uma das lacunas dos professores, potenciado pela utilização de métodos clássicos de ensino, as Normas (2007) aconselham, a partir do 3.º ano de escolaridade, que o ensino "deverá ser ativo e intelectualmente estimulante" (p. 166). Deste modo, o aluno deixará de utilizar "argumentos baseados na autoridade (porque o professor diz ou o texto afirma) para argumentos baseados no raciocínio matemático." (p. 393).

Limitações do estudo

Neste estudo senti-me muito limitada pelo tempo. A incerteza ao nível do local de colocação, no ano letivo 2010/2011, condicionou a aplicação do estudo. Devido à colocação temporária (4 meses) e, principalmente, à extensão do programa de matemática do 5.º ano, não foi possível trabalhar com a turma durante mais tempo e entendo este aspeto como uma limitação. O trabalho seria muito mais rico se houvesse a possibilidade de fazer a recolha dos dados de forma mais espaçada e durante mais tempo, pois permitia que se pudesse acompanhar mais a turma e, talvez, verificar como o desenvolvimento da capacidade de argumentar influenciava nos outros temas matemáticos.

As primeiras tarefas do estudo aplicadas foram demasiado longas e, talvez, com enunciados um pouco complexos, para o nível de preparação dos alunos para as enfrentarem. Além de serem as primeiras tarefas a serem filmadas e gravadas e, tais alterações na rotina diária dos alunos acarretar, naturalmente, algumas perturbações na sua forma de agir/estar. No entanto, segundo a professora da turma, os alunos já tinham resolvido anteriormente uma tarefa semelhante à primeira e considerou que se as tarefas fossem lidas os enunciados não seriam obstáculo, com exceção na tarefa 3 onde se lê “escreve uma expressão numérica”, considerou que não havia problema, mas que tinha que ser explicado o que era.

Nas tarefas introdutórias a turma, pareceu comportar-se como sendo a primeira vez que se deparava com uma tarefa que envolvia padrões visuais. A professora da turma referiu que normalmente não aplicava tarefas envolvendo padrões, e que pensava que os alunos não vinham habituados a tal do primeiro ciclo, porque pouco tempo antes da aplicação das tarefas de estudo, tinha-lhes proposto uma tarefa de sequências e só um aluno, de um dos pares do estudo, conseguiu responder. Além de não conseguirem responder também lhe pareceu que não tinham compreendido o raciocínio do colega. Na aplicação da primeira tarefa de preparação os resultados não foram nada animadores e ponderou-se mesmo substituir as tarefas previstas para aplicar no estudo e fazer umas sem alusão direta aos padrões. No entanto, na aplicação da quarta tarefa de preparação, aconteceu que os alunos foram capazes de apresentar argumentos e de discuti-los em grande grupo (muito melhor do que em algumas das tarefas do estudo). A partir daí surgiu novamente a ideia de que os alunos, mesmo que com pouco treino, seriam capazes de começar a ver mais para além do que a forma/ desenho das imagens.

Talvez o facto de não ser a investigadora a orientadora das tarefas e do diálogo em grande grupo, aliado à falta de preparação dos alunos nesta dinâmica, tivesse limitado o desempenho dos alunos. Apesar de se dar à professora titular as tarefas para as analisar, também ela sentia alguma insegurança se os seus alunos seriam "capazes" de responder "o que a investigadora queria". Para a professora da turma orientar as tarefas como "o maestro orquestra a sua banda" tem que estar bem interiorizado o seu papel. Sendo muito difícil pedir a um professor para ceder a sua turma, o seu tempo e os seus tempos com a turma e ainda ter que alterar o seu método de estar perante a turma durante a resolução das tarefas. Apesar de a professora ter feito um enorme esforço para que conseguisse desempenhar o melhor possível o "seu papel" na investigação, nem sempre foi bem conseguido.

Penso que, principalmente, um dos pares não foi bem constituído, porque os diferentes níveis de potencialidade de concentração, de "ver" a matemática e de empenho durante a resolução da mesma limitou o seu desempenho. Ao nível da argumentação colaborativa tiveram grandes dificuldades, mesmo nas questões em que não estavam de acordo e viam-se obrigados a argumentar para optarem por uma resolução. Devia-se ter apresentado, inicialmente, uma tarefa para ser resolvida individualmente e depois, de analisada juntamente com a titular da turma, formar os casos.

Sugestões para Investigação Futura

Um dos aspetos que limitou o estudo foi a recolha de dados ter sido muito compacta no tempo, pelo que se sugere que, em futuros estudos nesta área, sejam propostas as tarefas de modo mais espaçado, ao longo do ano letivo e, se possível, até mesmo, no ano letivo seguinte envolvendo outros temas matemáticos para se poder analisar a evolução do desempenho dos alunos. Voltando a aplicar-se tarefas semelhante às propostas neste estudo, permitindo verificar se esses alunos evoluíram ao longo do ano letivo e qual o efeito surtido. Como por exemplo, se o tipo de argumentos que utilizavam eram os mesmos que utilizavam antes de aplicar o estudo, ou se conseguiam argumentar colaborativa e coletivamente utilizando conhecimentos matemáticos e, se se respeitavam as regras da argumentação coletiva e colaborativa.

Devido ao nível de desenvolvimento que os alunos apresentavam em relação à argumentação, seria, possivelmente, mais vantajoso realizar um estudo em que as primeiras tarefas fossem mais curtas, de modo a permitir manter os alunos concentrados durante todo o tempo da resolução da tarefa em pares e dar mais tempo para o diálogo em grande grupo e para evoluírem progressivamente. Devido à dificuldade sentida pelos alunos em interpretar alguns enunciados nas tarefas, possivelmente, alguns por falta de atenção e não leitura completa do enunciado e outros pela não compreensão do que “era para fazer”, sugiro que para alunos, não habituados a esta dinâmica se proponham tarefas com enunciados mais passíveis de serem interpretados autonomamente pelos alunos.

Nota Final

A finalizar este estudo alguns aspetos são de salientar:

Durante a resolução de uma tarefa, como as que foram propostas, o professor necessita de não apresentar o seu raciocínio aos alunos, mas para os ajudar a ultrapassar os obstáculos, deve apenas colocar questões e clarificar o seu pensamento e raciocínio. Esta dinâmica foi adotada várias vezes pela professora e pela investigadora para ajudar os alunos, permitindo-lhes resolver algumas questões. No entanto, quando tal sucede, maior é o risco que o professor corre de durante o esclarecimento deixar transmitir o seu processo de resolução, o seu raciocínio. Pontualmente, aconteceu que a professora influenciou respostas, ou as confirmou. Estas situações podem reforçar as conceções dos alunos quanto ao papel do professor na sala de aula contribuindo para permanecerem com a conceção de que a professora é “a única” que transmite o conhecimento matemático.

O ensino da argumentação colaborativa não é fácil sem a intervenção do professor devido à dificuldade dos alunos se envolverem na interação colaborativa e no uso do questionamento e da argumentação. Este ambiente nem sempre foi fácil de criar em sala de aula, muitas vezes pela dificuldade em gerir o tempo, outras vezes pela grande dificuldade que os alunos têm em ouvir-se verdadeiramente uns aos outros, o que dificulta a contra-argumentação, outras ainda por considerarem perda de tempo esta dinâmica. Os professores necessitam de mostrar o interesse em criar ambientes de sala de aula que pratiquem esta dinâmica.

Relativamente às dificuldades apresentadas, na minha opinião, a argumentação deve ser implementada ao longo do ano letivo, nos vários conteúdos, e não apenas num único conteúdo, porque assim os alunos conseguem evoluir e, progressivamente, melhorar a sua capacidade de argumentar matematicamente. O tempo é um grande obstáculo para a implementação desta dinâmica mas, como foi possível verificar neste estudo, os alunos conseguiram, relembro, num curto intervalo de tempo, evoluir melhorando também o seu tempo de resolução sem que tal implicasse uma diminuição de qualidade no desempenho, pelo menos não por estes fatores. Considero ter valido a pena a experiência desenvolvida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aberdein, A. (2008). *Humanities and Communication*. USA – Melbourne: Florida Institute of Technology – West University Boulevard.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

Academia das Ciências de Lisboa e da Fundação Calouste Gulbenkian. (2001). *Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea – Academia das Ciências de Lisboa.* Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa e Editorial Verbo.

Andriessen, J. (2006). *Arguing to learn.* In K. Sawyer. (Ed). The Cambridge handbook of the learning sciences. (pp. 443-459). Cambridge: Cambridge University Press.

Barbosa, L., Borralho, A., Cabrita, I., Fonseca, L. Pimentel, T., & Vale, I. (2008). *Padrões no Currículo de matemática: Presente e Futuro*. Em R. Luengo, B. Alfonso, M. Camaho e B. Nieto, (Eds.), Investgación en Educación matemática (pp. 477- 493). Badajoz: SEEM e SEIEM.

Bauersfeld, H. (1995). *"Language Games" in the Mathematics Classroom: Their Function and Their Effects.* (pp. 271 – 291). University of Bielefeld. United States of America: Broadway – New Jersay.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Coleção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Bravo, F. (2005). *Impacto da utilização de um ambiente de geometria Dinâmica no Ensino-Aprendizagem da Geometria por alunos do 4.º ano do 1.º ciclo do ensino Básico.* Ensino Básico. Tese de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Cobb, P. (1995). *Mathematical Learning and Small-group Interaction: Four Case Studies*. (pp. 25 – 128). Vanderbilt University. United States of America: Broadway – New Jersay.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. United States of America: Broadway. New Jersay.

Douek, N., & Pichat, M. (2003). *From Oral to Written Texts in Grade I and the Long Term Approach to Mathematical Argumentation.* IUFM de Créteil UFR de Psychologie. Paris: Université Paris. Italia: *CERME 3*: Third Conference of the. European Society for Research in Mathematics Education. Acedido em setembro, 2010, de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Douek_cerme3.pdf.

Duval, R. (1999). *Questioning Argumentation*. Newsletter on the teaching and learning of Mathematical Proof. ISSN 1292-8763. Acedido em janeiro, 2011, de http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html (published in the January/February 2000 Proof Newsletter).

English, L. (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young learners.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. (pp.127-169).

Ernest, P. (1988). *The Impact Of Beliefs On The Teaching Of Mathematics*. 6th International Congress Of Mathematical Education, Budapest. Acedido em março, 2011, de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm.

Fonseca, L. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: conceções e processos utilizados*. Tese de Mestrado. Universidade do Minho. Departamento de Educação.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: A demonstração em geometria.* Tese de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Forman, E., & Ansell, E. (2002). *Orchestrating the Multiple Voices and Inscriptions of a Mathematics Classroom*. Department of Instruction and Learning, University of Pittsburgh. Journal of the Learning Sciences. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2002). *To Produce Conjetures And To Prove Them Within A Dynamic Geometry Environment: A Case Study.* University of Genoa. (pp. 2-397 – 2- 404).

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2004). *Didática de la Medida de Magnitudes para Maestros.* (pp. 381 – 403). Projeto Edumat-Maestros.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004a). *Perspetiva Educativa de las Matemáticas.* (pp. 13 – 53). Projeto Edumat-Maestros.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004b). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 55 – 86). Projeto Edumat-Maestros.

Golafshani, N. (2002). *Teachers' Conceptions of Mathematics and their Instructional Practices*. Ontario Institute for Studies in Education / University of Toronto. Philosophy of Mathematics Education Journal 15. Editor: Paul Ernest.

Gomes, A., & Ralha, E. (2005). *O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático.* Universidade do Minho. Associação de Professores de matemática Citação: "Quadrante". ISSN 0872-3915. XIV: 1 (2005) 109-131.

Gould, P. (2003). *Developing Mathematical Reasoning Through Argumentation*. (pp. 163-168). NSW Department of Education and Training. Australia. Seoul: PME.

Guimarães, H. (1988). *Ensinar matemática: conceções e práticas.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências. Lisboa.

Hunter, R. (2007). *Can You Convince Me: Learning To Use Mathematical Argumentation.* (pp. 3-81 – 3-87). Seoul: PME.

Komatsu, K. (2009). *Pupils Explaining process with manipulative objects*. (pp. 3-393 – 3-400) Grace: PME.

Krummheuer, G. (1995). *The Ethnography of Argumentation.* (pp. 229 – 269). Padagogische Hochschule Karlsruhe. United States of America: Broadway – New Jersay.

Krummheur, G. (1998). *Formats of Argumentation in the Mathematics Classroom.* (pp. 223 – 233). Freie University, Berlin. United Council of Teachers of Mathematics. United States.

Mercer, N. (2000). *Words and Minds: How We Use Language to Think Together.* London: Routledge.

Mina, M. (2003). *Beliefs About What Explaining Why Means For A Student In A Mathematics Classroom: A Case Study.* Córdoba, Argentina.

Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico. Lisboa: ME – DGIDC.*

Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2010). *Metas de Aprendizagem. Lisboa: ME – DGIDC.*

Ministério da Educação – GAVE. (2009). *Relatório da prova de aferição de matemática de 2009 do Gabinete de Avaliação Educacional*. Acedido em dezembro, 2010, de www.gave.min-edu.pt np3content newsId=268&fileName=RelNac PA09 MAT 2C.

Moreira, M. (2004). *Trabalho Colaborativo e Reflexão para o Ensino da Multiplicação e da Divisão*. Dissertação de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Nascimento, E. (2008). *O Desenvolvimento Do Pensamento Geométrico Em Ambiente Interativo Utilizando O Origami*. Dissertação De Mestrado. Universidade Federal Do Pará. Belém- Pará.

NCTM-APM. (2007). *Princípios e Normas para a matemática Escolar.* Lisboa: *APM.*

Neto, T. (2009). *O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas*. Tese de Doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Presmeg, N. (2003). *Beliefs About The Nature Of Mathematics In The Bridging Of Everyday And School Mathematical Practices.* Volume 31 (Chapter 17). Springer Nertherlands: Mathematics Education Library.

Roth, W., & Thom, J. (2008). *Bodily experience and mathematical conceptions: from classical views to a phenomenological reconceptualization.* Springer Science. Business Media B.V. p. 187.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D. A. Grouwes (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). New York: Mac Millan.

Segurado, I., & *Ponte*, J. (1998). *Conceções sobre a matemática e trabalho investigativo*. *Quadrante*, 7 (2), 5-40.

Smith, M., Hunghes, E., Engle, R., & Stein, M. (2009). *Orchestrating Discussions. Mathematics teachers in the middle school.* vol.14 n.º 9. National Council of Teachers of Mathematics.

Stake, R. (2009). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. Fundação Calouste Gulbenkian.

Suthar, V., & Tarmizi, R. (2010). *Effects of Students' Beliefs on Mathematics and Achievement of University Students: Regression Analysis Approach*. Journal of Social Sciences, 6(2), 146-152.

Tarmizi, R., & Tarmizi, M. (2009). *Analysis of mathematical beliefs of Malaysian secondary school Students.* Institute of Liberal Studies. University Tenega Malaysia. Malaysia.

Thompson, A. (1992). *Teachers` beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Nova Iorque: Macmillan.

Umland, K., & Hersh, R. (2006). *Mathematical discourse: the link from premathematical to fully mathematical thinking*. Philosophy of Mathematics Education Journal No. 19 (December 2006). Ernest, P. (2006).

Vale, I. (1993). *Conceções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: um estudo de dois casos.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências. Lisboa.

Vale, I. (2004). *Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação matemática – O Estudo de caso.* Revista da Escola Superior de Educação. Escola Superior de Viana do Castelo. (pp. 171 – 202).

Vale, I., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática propostas curriculares para o ensino Básico.* Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projeto Padrões.

Yeo, J., Lee, Y., Tan, A., Tan S., & Lun, S. (2009). *Analyzing CSCL-mediated Science Argumentation: How Different Methods Matter*. Acedido em dezembro, 2010, de http://ltee.org/uploads/cscl2009/paper222.pdf.

YIN, R. (2005). *Estudo de Caso. Planejamento e Métodos.* (3.ª Ed). Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo A

Questionário

A Matemática e o Conhecimento Matemático

1) Em cada uma das afirmações seguintes é apresentada uma escala de 1 a 4. Cada um destes valores numéricos tem o seguinte significado:

1- Discordo totalmente;

2- Discordo;

3- Concordo;

4- Concordo totalmente.

Lê com atenção as afirmações que se seguem e seleciona a opção que corresponde à tua opinião rodeando o valor numérico.

1. Todos os alunos conseguem aprender Matemática.

   1 2 3 4

2. Não tenho jeito para a Matemática.

   1 2 3 4

3. Se me empenhar, consigo aprender Matemática.

   1 2 3 4

4. A Matemática é muito difícil.

   1 2 3 4

5. Nunca fui bom aluno(a) a Matemática.

   1 2 3 4

6. Mesmo quando estudo não entendo a Matemática.

   1 2 3 4

7. A capacidade para aprender a Matemática nasce com as pessoas.

   1 2 3 4

8. Na Matemática não se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais.

   1 2 3 4

9. Quando te dizem que vais ter a aula de Matemática lembras-te que vais fazer cálculos.

1 **2** **3** **4**

10. Quando te falam em Matemática lembras-te de problemas difíceis.

1 **2** **3** **4**

11. O teu professor gosta de dar aulas de Matemática.

1 **2** **3** **4**

12. O conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera).

1 **2** **3** **4**

13. O trabalho a pares ajuda-me a perceber melhor os problemas.

1 **2** **3** **4**

14. Só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático.

1 **2** **3** **4**

15. Os alunos conseguem criar conhecimento matemático.

1 **2** **3** **4**

2. Se não concordaste com algum dos enunciados das afirmações, regista a tua sugestão.

____

____

____

____

____

____

Adaptado de Godino, Batanero & Font (2004a)

Anexo B

Tarefas de Preparação

As tarefas de preparação decorreram entre 15 de novembro a 15 de dezembro.

<u>1.ª – Observa os Malmequeres (15.11.2010)</u>

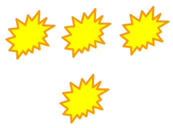


Fig.1

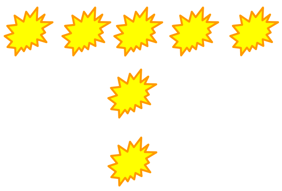


Fig.2

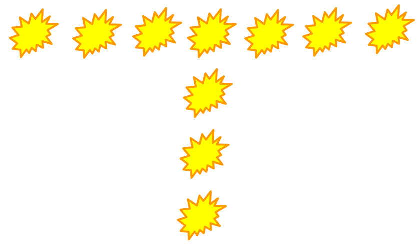
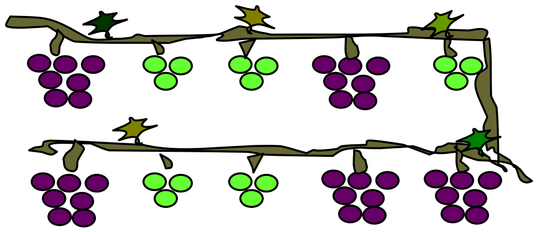


Fig.3

1. Quantos malmequeres terá a quarta figura?
2. De quantas formas diferentes consegues ver a sequência?
3. Quantos malmequeres terá a centésima figura? Explica como pensaste (o que tiveste que fazer para obter a figura seguinte; de uma figura para a figura seguinte o que modificou)
4. Determina o número de malmequeres necessários para construir uma figura de qualquer ordem?

<u>2.ª - UVAS (17.11.2011)</u>



Quantos cachos de uvas tem a vinha?
Contar cada bago de uvas leva muito tempo…

Descobre um processo rápido para dizeres quantos bagos tem esta vinha. Regista esse processo e volta a verificar se funciona.

<u>3.ª – Observa os desenhos (22.11.2011)</u>

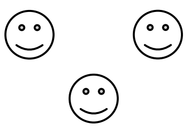


Fig.1

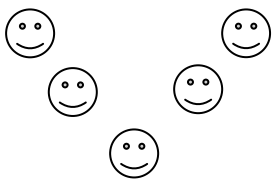


Fig.2

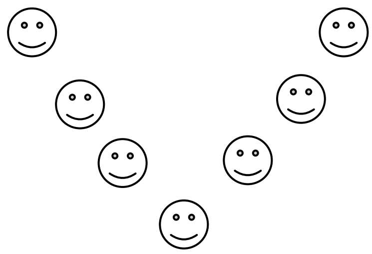


Fig.3

1. Desenha as três figuras seguintes, isto é, a 4.ª, 5.ª e a 6.ª.
2. De quantas formas diferentes consegues ver a sequência?
3. Quantos smiles terá a 10ª figura? Explica como pensaste (o que tiveste que fazer para obter a figura seguinte; de uma figura para a figura seguinte o que modificou)
4. Qual será o número de smiles para uma figura qualquer?

4. ª Observa os desenhos (13.12.2010)

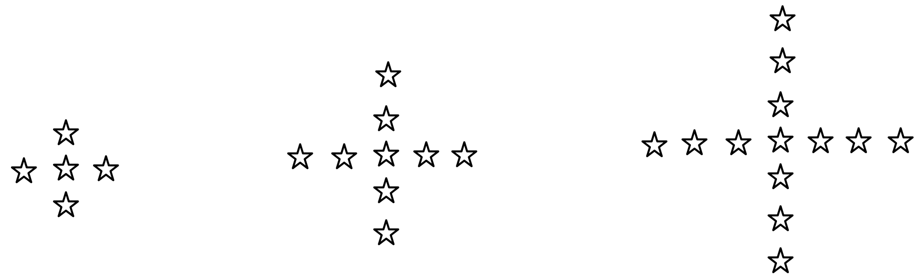


Fig.1 **Fig.2** **Fig.3**

1. Desenha as três figuras seguintes, isto é, a 4.ª, 5.ª e a 6.ª.
2. De que modo consegues ver a construção da figura?
3. Consegues ver de outras formas diferentes a figura? De que formas?
4. Organiza os dados na seguinte tabela

N.º da Figura	**1**	**2**	**3**	**4**		
N.º total de estrelas	***5***	***9***	***13***			

3. Quantas estrelas terá a 10.ª figura? Explica como pensaste (o que tiveste que fazer para obter a figura seguinte; de uma figura para a figura seguinte o que modificou).
4. Qual será o número de estrelas para uma figura número 100?

5.ª – Observa os desenhos (15.12.2010)

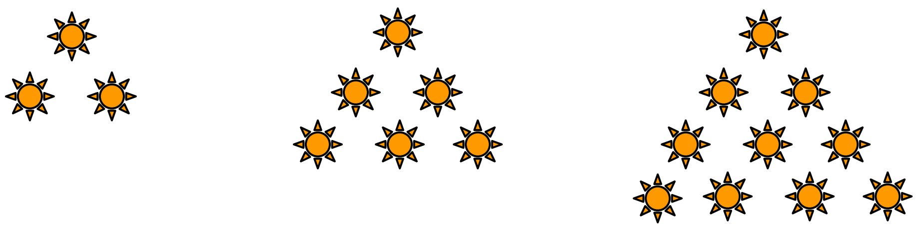


Fig.1 **Fig.2** **Fig.3**

1. Desenha as duas figuras seguintes, isto é, a 4.ª e a 5.ª.
5. Como consegues ver a construção da figura?
6. Consegues ver a figura de outras formas diferentes? De que formas?
7. Organiza os dados na seguinte tabela

N.º da Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	
N.º total de flores	***3***	***6***	***10***		

3. Quantas flores terá a 10.ª figura? Explica como pensaste (o que tiveste que fazer para obter a figura seguinte; de uma figura para a figura seguinte o que modificou).
4. Qual será o número de flores na figura número 100?

Nota: Para resolver as três primeiras tarefas foram dadas uma folha por cada aluno sendo que a maioria dos pares acabaram por resolver de modo individual.
Após uma breve reflexão dos resultados obtidos nas tarefas, foi ponderado se não seria melhor facultar apenas um enunciado por grupo para que os alunos sentissem a necessidade de conversar com o seu par e exporem o seu raciocínio. Na 4.ª tarefa já foram distribuídos um enunciado por cada par.

Anexo C

As 8 Tarefas aplicadas

ESCOLA XXXX

5.º ANO TURMA: MATEMÁTICA Data: __/___/ 2011

NOMES: ____ N.º ___
_____________________________________ N.º ___

TAREFA 1

Utilizando cinco quadrados construam todas as figuras que considerem ser possível; os quad têm de ter sempre um lado comum.

1. ANALISA AS DIFERENTES FIGURAS QUE OBTIVESTE RESPONDENDO ÀS SEGUINTES QUESTÕES

a) Quantas figuras construíram?

R: ____

b) Têm a certeza que não conseguem construir mais nenhuma figura?

R: ____

c) Escrevam o vosso raciocínio de modo a mostrar que **pensam** ter construído o número máximo de figuras diferentes.

R: ____

____

____

____

d) Considerando cada quadrado como uma unidade de área, qual a área de cada figura que construíram?

R:____

____

____

e) As figuras que construíram têm ou não a mesma área? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

____

____

f) Considerando cada lado do quadrado como uma unidade de comprimento, qual o perímetro de cada figura?

R: ____

____

____

g) Considerando que o número de quadrados utilizados em cada figura não varia, verifiquem se o perímetro varia. O que concluíram?

R: ____

____

____

h) Existe alguma relação entre a disposição dos quadrados e o perímetro? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

____

ESCOLA XXX

5.º ANO TURMA: MATEMÁTICA Data: __/___/ 2011

NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___

TAREFA 2

1. Construam três retângulos ***A, B*** e ***C***, utilizando 14 palhinhas para cada um e, no final, desenhem-nos.
2. Tomando como unidade de medida de comprimento uma palhinha e como unidade de área o quadrado cujo lado tem o comprimento de uma palhinha, completem a seguinte tabela:

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro
A				
B				
C				

3. O que podem dizer acerca do perímetro dos retângulos? Expliquem como pensaram.

   R: ____

   ____

   ____

4. O que podem dizer acerca da área dos retângulos? Expliquem como pensaram.

   R: ____

   ____

   ____

5. Considerando dois retângulos com o mesmo perímetro, qual terá menor área?

   R: ____

6. Verifiquem se o que escreveram na alínea anterior é válido para outros casos. Considerem, por exemplo, os casos com 20 e 30 palhinhas.

   R: ____

   ____

   ____

7. Construam, com palhinhas, os retângulos cuja medida de área é 36.

8. Tomando como unidade de área o quadrado cujo lado tem o comprimento de uma palhinha, completem o quadro:

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro

9. Comparem a área dos retângulos e observem as medidas do comprimento e da largura correspondentes. O que observaram acerca da área dos retângulos?

   R: ____

   ____

   ____

10. Comparem a medidas do perímetro dos vários retângulos. O que concluem?

    R: ____

    ____

    ____

11. Escolham dois retângulos com a mesma área. Qual desses retângulos tem menor perímetro?

    R: ____

    ____

    ____

12. Verifiquem se o que escreveram na alínea anterior é válido para outros casos. Considerem, por exemplo, os casos com 20 quadrados de palhinhas, 30, 40…

    R: ____

    ____

    ____

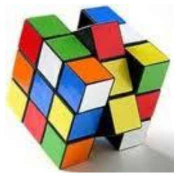
ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___

TAREFA 3



O Joaquim faz molduras formadas por azulejos quadrados para pinturas a óleo, como mostram as figuras.

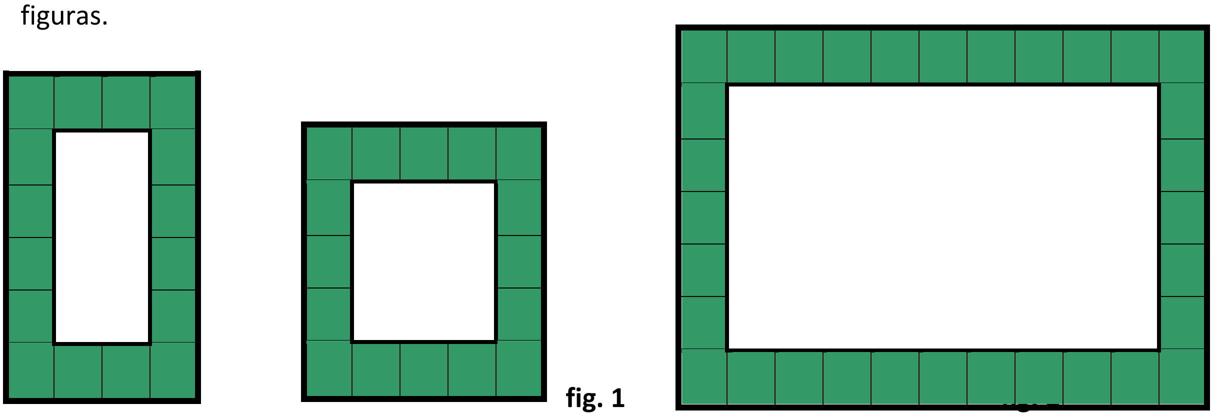
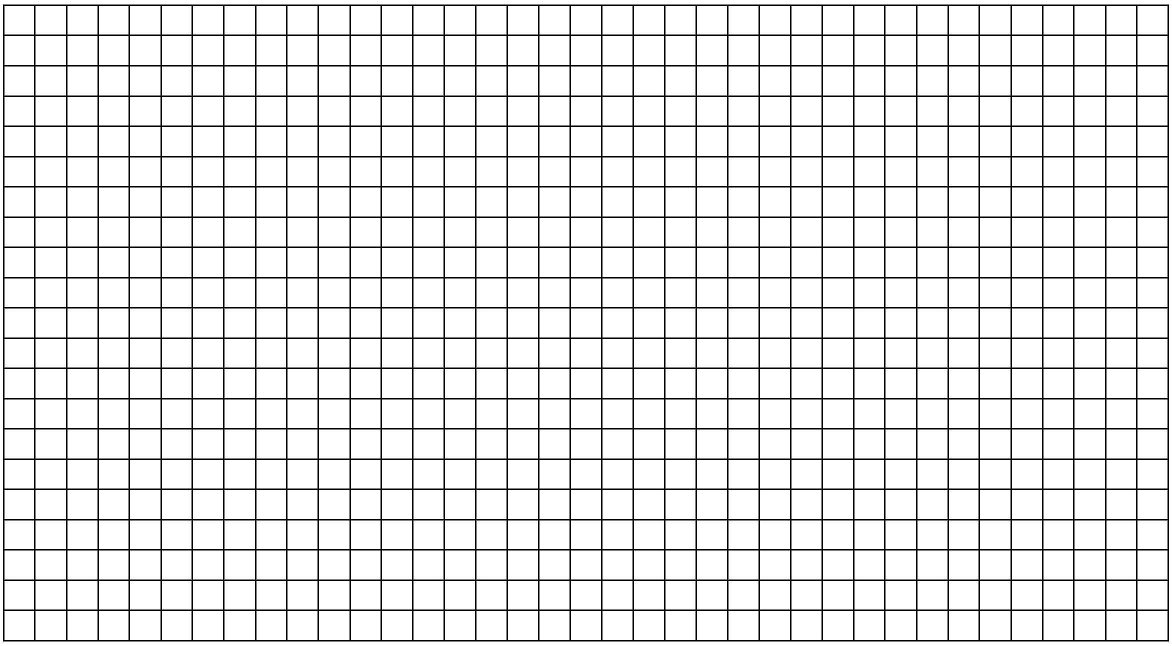


fig. 1

1. Quantos azulejos são necessários para fazer cada uma das molduras representadas? Expliquem como pensaram?
2. Desenhem molduras retangulares de várias dimensões.



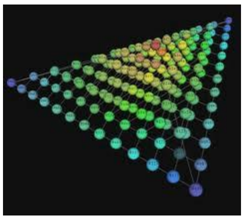
3. Para cada uma das molduras escrevam uma expressão numérica que traduza o número de azulejos das molduras.
4. Expliquem por palavras vossas, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de uma pintura a óleo com 100X200.

ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___



TAREFA 4

1. Considerem a seguinte sequência de figuras constituída por quadrados (□) em que cada quadrado é considerado uma unidade de área.

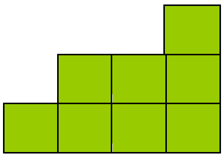


fig. 1

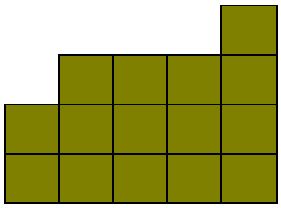


fig. 2

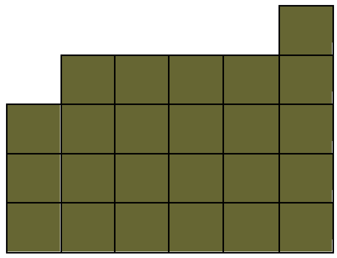


fig. 3

a) Desenhem as duas figuras seguintes.

b) Completem a seguinte tabela.

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Área **tomando como unidade o □**	*8*				

c) Qual a área da figura 7? Como sabem?

R: ____

____

____

2) Qual a área da figura 15? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

____

3) Achamque o modo como pensaram convencerá os vossos colegas? Por que dizem isso?

R: ____

____

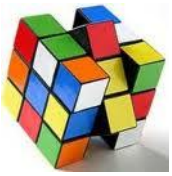
____

ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___



TAREFA 5

1. Observem e analisem as figuras que se seguem, formadas por quadrados.

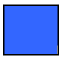


Fig. 1

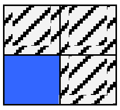


Fig. 2

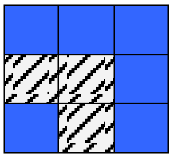


Fig. 3

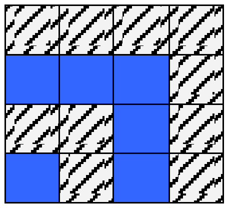


Fig. 4

2. Desenhem as duas figuras seguintes.

3. Completem a seguinte tabela.

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
N.º de quadrados	***1***					

4. Nas figuras podem ver quadrados escuros e quadrados claros com riscas. Completem a seguinte tabela.

Figura	**1**	**2**				
N.º quadrados escuros						
N.º quadrados claros						
Total de quadrados	***1***	***1+3***				

5. Observem os números que representam os quadrados escuros e os números que representam os quadrados claros das figuras. Que números são?

   R: ____

   ____

   ____

6. Qual será o número de quadrados da figura 8? Como sabem?

   R: ____

   ____

   ____

7. Tomando por unidade o quadrado da figura 1 qual é a área de cada uma das figuras seguintes? Completem a tabela.

Figura	**1**	**2**				
Área	***1***					

8. Observem os números que representam a área das figuras. Que números são?

   R: ____

   ____

   ____

9. Encontram alguma relação entre o número da figura e a sua área?

   R: ____

   ____

   ____

10. Qual a área da figura 8? Como sabem?

    R: ____

    ____

    ____

11. Qual a área da figura 20? Expliquem como pensaram.

    R: ____

    ____

    ____

12. Acham que o modo como pensaram será que convence os vossos colegas? Por que dizem isso?

    R: ____

    ____

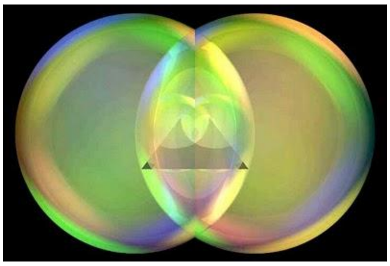
    ____

ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

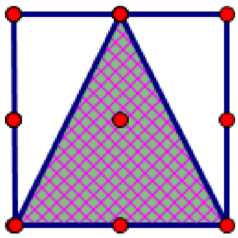
NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___



TAREFA 6

1. Um painel de sinalização tem a forma de um quadrado. Dentro do quadrado está desenhado um triângulo, como mostra a figura.



1.1 Depois de observarem a figura, que relação vos parece existir entre o espaço ocupado pelos triângulos claros e o triângulo colorido? Se necessário, construam um esboço da imagem, recortem e confirmem o que pensaram.

R: ____

____

1.2. Como pensaram? Expliquem a vossa resposta.

R: ____

____

____

1.3. O comprimento da linha que delimita o painel de sinalização é 200 cm.
Calcula a área da parte colorida do painel. Apresentem todos os cálculos efetuados e expliquem a vossa resposta.

R: ____

____

2. Confirmem com cálculos, esquemas, desenhos… a relação existente entre o espaço ocupado pelo triângulo colorido no painel de sinalização e o painel de sinalização.

R: ____

____

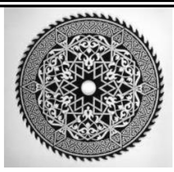
____

ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

NOMES: ____ N.º ___

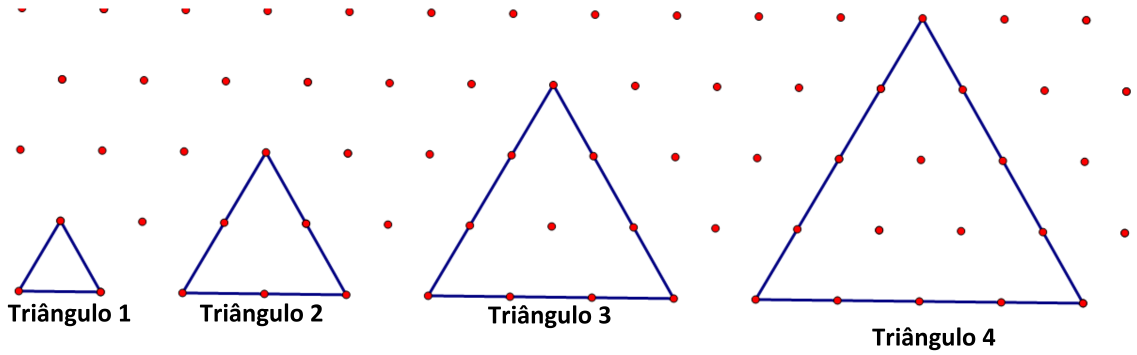
____ N.º ___



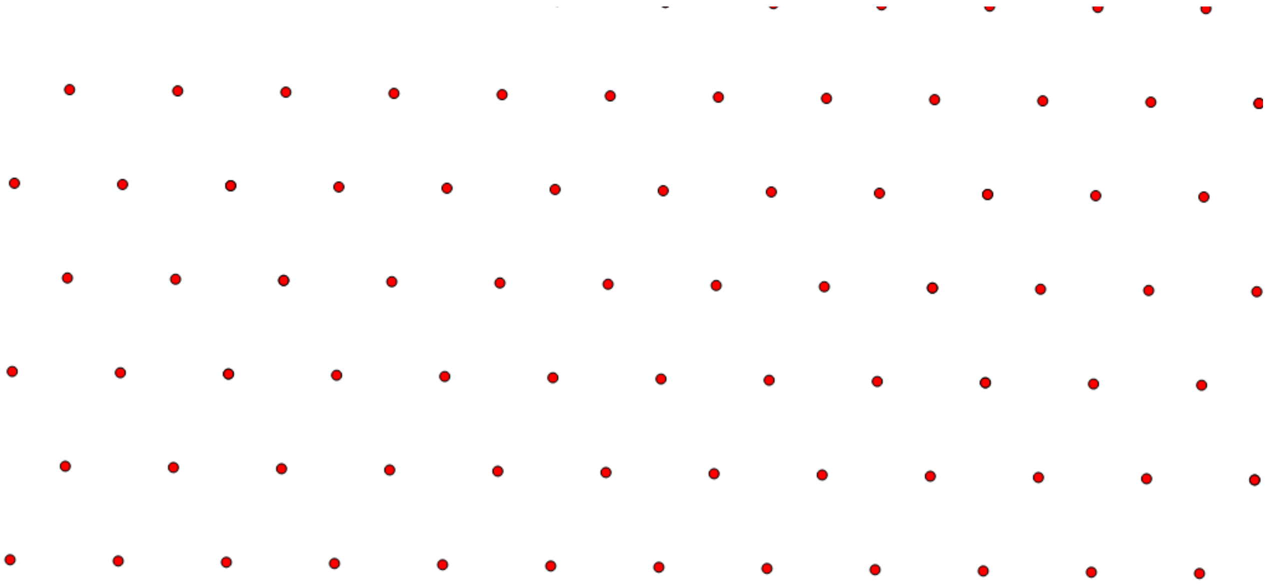
TAREFA 7

1. Abaixo estão representados triângulos equiláteros.

Observem a figura.



a) Desenhem os dois triângulos seguintes.



b) Considerando como unidade de medida de comprimento a ***base*** do ***triângulo 1***, completem a seguinte tabela.

Triângulo	1	2	3	4	5	6
N.º de pontos na base	2	3				
Perímetro dos triângulos	3	6				

Observem os números que representam o número de pontos da base. Que números são?

R: ____

____

____

Qual a relação existente entre o número do triângulo e o número de pontos da base? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

c) Observem os números que representam o perímetro. Que números são?

R: ____

____

____

d) Identificaram alguma relação entre o número do triângulo e o número de pontos do ponteado que "pertencem" a cada lado do triângulo? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

____

e) Considerando como unidade a área do *triângulo equilátero1,* completa a seguinte tabela.

Triângulo	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Área do triângulo geral	*1*					

Observem os números que representam a área. Que números são?

R: ____

____

____

f) Qual a área do triângulo 8? Como descobriram?

R: ____

____

____

g) Qual a área do triângulo 30? Expliquem como pensaram.

R: ____

____

h) Acham que o modo como pensaram convence os vossos colegas? Por que dizem isso?

R: ____

____

ESCOLA XXXX

5.º ANO **TURMA:** **MATEMÁTICA** **Data: __/___/ 2011**

NOMES: ____ N.º ___

____ N.º ___

TAREFA 8





Seixos

1. Imaginem que estão na praia e decidem recolher 20 pequenos seixos...

Chegam a casa e colocam os seixos a uma distância de 10dm uns dos outros para delimitarem um canteiro retangular do vosso jardim.

a. Façam um esboço do vosso canteiro.

b. Quanto dinheiro precisam para conseguir relvar o canteiro, sabendo que cada metro quadrado custa 5 euros.

c. Se mantiverem o perímetro do canteiro, quais deveriam ser as suas dimensões para que o custo de relvar seja menor? E para que o custo seja maior?

Anexo D

Guião de Observação por tarefa

Data:
Tarefa:

Descrição da sessão

Instruções e questões da investigadora/professora:

Reações dos alunos à tarefa:

Comentários dos alunos:

Resoluções/Estratégias utilizadas:

Dificuldades sentidas:

Observação a salientar dos pares para o estudo de caso:

Citações a salientar decorrentes da sessão:

Reflexão após a sessão

ANEXO E – PAR A
Resolução da tarefa 2

Na questão 1 os alunos começaram por contar 14 palhinhas e construir retângulos utilizando-as na sua totalidade. Demonstrando assim que interpretaram, compreenderam a questão. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte da professora ou da investigadora. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com as 14 palhinhas como sendo a medida do perímetro do retângulo. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

Fig. 1 – Resposta à questão 1

Utilizaram os conceitos de retângulo, perímetro, comprimento e largura, como se pode depreender da fala do Diogo "Dois de lado depois separa. Um, dois, três, quatro, cinco."

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das relações entre o comprimento e a largura, o que lhes permitiu manter a estrutura da construção com as 14 palhinhas e, nos três retângulos construídos, os dois comprimentos eram iguais, assim como as duas larguras. Segundo o par referiu durante a entrevista, após a construção do primeiro retângulo de forma casual,

> Diogo – Tiramos uma em cada comprimento e colocamos uma em cada lado da largura.
> Inv. – E porque fizeram desses modo?
> Edu. – Experimentamos e vimos se dava certo. E dava.
> Inv. – E "quantos comprimentos" tem o retângulo?
> Edu. – Tem dois!
> Inv. – E o retângulo tem os lados todos iguais?
> Edu. – Tem os lados iguais dois a dois.

Na estratégia apresentada, não houve grande organização. Iniciaram por um caso gerado por experimentação e a partir desse é que alteravam organizadamente. Como se pode verificar na entrevista:

> Edu. – Porque foi o que nos veio à cabeça e que dava para construir com as 14 palhinhas.
> Inv. – E depois? Então como tiram duas palhinhas do comprimento podem colocar essas duas palhinhas na...
> Edu. – largura
> Inv. – Então, vocês construíram o primeiro retângulo e depois construíram os outros a partir desse?
> Diogo – humhum. (18.01.2011)

Após construírem o primeiro retângulo com as 14 palhinhas passaram a utilizar uma estratégia. Um elemento do par desenhava e o outro elemento confirmava com as palhinhas se o retângulo estava bem construído, porque o Diogo achava "engraçado mexer nas palhinhas". Nesta questão eles desenharam os três retângulos, como solicitado, mas considerando que tinham desenhado o número máximo possível de retângulos.

> Inv. – Experimentem fazer sempre isso até esgotar todas as alternativas. [resolvem e param em 4x3].
> Inv. – Já fizeram todas?
> Diogo – Sim.
> Inv. – Porquê?
> Edu. – Porque a partir daí temos retângulos com área iguais. (entrevista, 18.01.2011).

Um dos obstáculos à generalização foi o considerarem que todos os retângulos já estavam construídos e que os restantes "não contavam" porque eram congruentes.

Nas questões 2 e 8 interpretaram e compreenderam corretamente após esclarecerem entre si os conceitos de comprimento, largura, área e perímetro. A utilização dos conceitos anteriormente referidos e das propriedades matemáticas da multiplicação e adição permitiu-lhe preencher correta e autonomamente as tabelas.

No entanto, parece que não leram completamente o enunciado porque na questão 2, nunca referiram a unidade de área e passaram imediatamente a aplicar a fórmula da área do retângulo,

> Diogo – 6x1 dá 6.
> Edu. – 5x2 dá 12. Medida do perímetro…
> Diogo – O perímetro é …
> Edu. – Está mal… é sempre 14! (17.01.2011).

Evidenciando-se tal facto na questão 8 porque tiveram inicialmente algumas dúvidas que parecem ter surgido devido à unidade de área do retângulo. Como se pode verificar durante a resolução da tarefa:

> Inv. – Então se vocês quiserem colocar uma palhinha de lado, quanto é que vão ter aqui?
> Diogo – Dois!
> Inv. – Só dois!?
> Edu. – Não, oh!
> Inv. – Diogo, este será uma unidade de área (desenhei com as palhinhas). … quantos precisavam para ter 36 unidades de área?
> Diogo – Ah, já percebi. (resolvem….) Olha, quinze, dezasseis…
> Edu. – Tem que ser 18 e 1, faz e vê se dá!
> Diogo – 18 x1… (17.01.2011).

Como se pode verificar não consideraram a unidade de área como "o quadrado cujo lado tem o comprimento de uma palhinha", partindo desde o primeiro momento que leram a questão para o cálculo da área utilizando a fórmula "comprimento vezes largura". Parece ter sido porque um dos alunos não tinha qualquer dúvida em como calcular a área do retângulo.

Ao começarem a preencher a tabela da questão 2, o Diogo disse para o colega “Aposto contigo que tem menos comprimento e mais largura tem mais área” (Diogo) como o colega não lhe respondeu e continuava a tentar preencher a tabela, ele começou, também, a calcular a área.

Na questão 3, analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados iniciais com os resultados que foram obtendo nas alíneas anteriores. Observaram de imediato a tabela e concluíram: “O perímetro é… sempre 14.” (Eduardo). No entanto, a resposta escrita, apresentaram-na com falta de rigor porque não aplicaram os termos corretos e de forma completa, lendo-se: “são todos iguais porque todos os números de palhinhas” (ver trabalho escrito tarefa 2, questão 3). Ao referirem-se à igualdade da medida do perímetro dos diferentes retângulos não souberam expressar-se. No entanto, foi possível registar do seu diálogo, enquanto resolviam a tarefa que, “É sempre igual porque todos têm sempre o mesmo número de palhinhas.” (Diogo). Ou seja, apesar de no trabalho escrito apresentarem um argumento incompleto, o seu raciocínio foi correto.

Na questão 4 leram e interpretaram conjuntamente a questão, dialogando sobre o que se pretendia que respondessem,

> Diogo – Temos que dizer que…
> Edu. – [interrompe] para obter área é comprimento vezes largura.
> Diogo – Não se tu reparares… podemos dizer acerca da área que… (17.01.2011)

Mostrando assim que conseguiram compreender. A resolução apresentada (ver fig. 1.2) está correta e efetuou-se autonomamente considerando todos os resultados que foram obtendo. O Eduardo considerava que o que podia dizer acerca da área era como a obtinha, “comprimento vezes largura”. O seu colega não concordava com ele e alertou-o para o enunciado “não, se tu reparares…” o que levou o Eduardo a observar e a comparar áreas dos diferentes retângulos. O Diogo ao remeter o seu colega, novamente, para o enunciado convenceu-o de que o que disse não respondia à questão. Assim, o par respondeu à questão e formulou uma conjetura baseada nos dados e nas regularidades detetadas nas questões anteriores da tarefa.

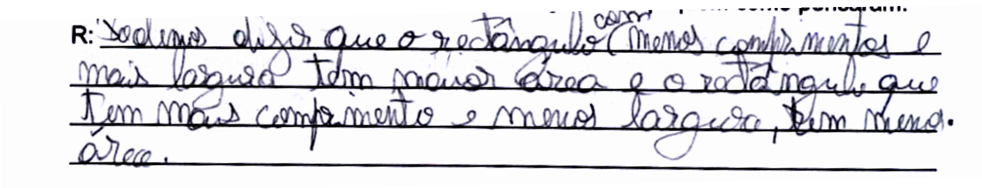

R: Podemos dizer que o rectângulo com menos comprimentos e mais largura tem maior área e o rectângulo que tem mais comprimento e menos largura, tem menor área.

fig. 2 – Resposta à questão 4

A estratégia utilizada na primeira questão dificultou a generalização porque, como já foi referido, apenas consideraram que podiam desenhar aqueles três retângulos. Na entrevista foi-lhes pedido que desenhassem todos os retângulos que era possível construir com 14 palhinhas e pararam no 4x3. Fazendo o seguinte comentário, "A partir daí temos retângulos com áreas iguais." (Eduardo).

O argumento apresentado para justificar a estratégia é válido, mas o facto de terem limitado a construção, devido à congruência de retângulos, teve implicações na explicação porque construíram-na com base nos seus retângulos.

Apresentaram, no trabalho escrito, um raciocínio correto mediante o trabalho desenvolvido anteriormente, mas não permitiu a generalização. No seu trabalho entenderam, de comum acordo, que deviam registar que para obter o retângulo com maior área "tem que ter menos comprimento e mais largura" (Diogo) e o que tem "mais comprimento e menos largura é o que tem menos área" (Eduardo). Os argumentos apresentados foram particulares e permitiram convencer os colegas e por isso par considerou os seus argumentos convincentes. O Eduardo achou que já tinha explicado tudo na aula, apenas por insistência disse, na entrevista:

Edu. – …quanto mais largura tiver acho que mais área vai ter porque a largura, no fundo, aumento muito mais o espaço do retângulo. Que é comprimento… como vou explicar… um exemplo: nós temos um retângulo com uma palhinha de largura, logo temos sete de comprimento…a área, se nós fizermos, vai dar sete, se for dois de largura e seis de comprimento já vai dar 12. Quanto mais acrescentarmos à largura mais vai dar… [rodei-lhe a folha 90º onde tinha o retângulo desenhado].
Inv. – Qual é o comprimento?
Edu. – [indicou] É uma palhinha.
Inv. – Qual é a medida da área?
Diogo – 6.
Inv. – Mas pelo o que leio aqui quanto menor for o comprimento e maior for a largura, maior vai ser a área!? Isto verifica-se?
Diogo – Ai, faltava-nos dizer que é a largura na horizontal e não na vertical.
Edu. – Tínhamos que dizer que era nos retângulos que tinham a largura na horizontal. […]
Inv. – Então se experimentassem até ao comprimento mínimo quais seriam as dimensões do retângulo?
Edu. – 1 palhinha no comprimento e 6 na largura!
Inv. – Será que esse retângulo é o que tem maior área?
Edu. – Sim, é! Não. Vai ser o que tem menos.
Inv. – Porquê? A partir de quando é que a área começa a diminuir?
Diogo – Quando o comprimento é menor!
Edu. – Mas…
Inv. – Vocês só experimentaram até ao 4x3.
Diogo e Edu. – Mas também dava aqui 3 e aqui o 4 ou aqui tem 4 e aqui 3. Tem de área 3x4 =12 e 4x3 =12.
Inv. – E a seguir?
Diogo – 5x2=10.
Inv. – E então?
Edu. – Já começa a diminuir...
Inv. – Então, em que momento é que a área foi maior?
Edu. – Foi o 4x3.
Diogo – **É quando os números estão mais próximos.**
Inv. – Então quando temos o produto entre dois números mais próximos a área vai ser?
Edu. – Maior.
Inv. – Acham que o que escreveram estava certo?

Edu. – Temos é que explicar melhor! Quanto mais… a partir do momento em que…
Diogo [continua] – **Os números começam a aproximar-se mais a área vai ser maior. Quando estão mais afastados a área vai ser menor.** (entrevista, 18.01.2011)

Após um conjunto de questões orientadoras o par conseguiu generalizar, apresentando argumentos que os convenceram primeiro a eles e que, futuramente, poderão convencer outros colegas (verificando-se na argumentação coletiva da tarefa 8, aplicada no dia 02.02.2011). Como se pode analisar no diálogo, conseguiram chegar mais facilmente à minimização da área, assim como à sua aplicação em casos particulares, do que à maximização, sendo possível dizer que a estratégia utilizada nas questões 1 e 4 dificultou a generalização, levando a apresentarem um raciocínio parcialmente correto, com uma explicação incompleta e particular. Os argumentos apresentados foram particulares mas permitiram convencer os colegas.

Na questão 5 leram, interpretaram e compreenderam corretamente. Consideraram os retângulos construídos e desses escolheram dois concluindo que, "Consideramos os retângulos que escolhemos (A e C). O C é o que tem menos área porque tem mais comprimento e menos largura.".

Na questão 6 pretendia-se que verificassem se o que escreveram se podia ampliar e generalizar. No trabalho escrito, o Eduardo não respeitou as regras do trabalho colaborativo não conseguindo ouvir o seu colega e não refletindo sobre o seu pedido, apenas disse:

Edu. – [lê a questão] Verifiquem se o que escreveram (…) se verifica para 20 ou 30 palhinhas… Sim.
Diogo – Não, tem calma…
Edu. – Sim, a professora disse que dava para todos…
Diogo – Tu não me deixas ver a pergunta!

Tendo registado apenas "Sim, dá porque", revelando que não foram capazes de registar nem de explicar o seu raciocínio e não verificaram a sua resolução. No entanto foi possível apurar na entrevista que interpretaram e compreenderam parcialmente a questão e que o Eduardo estava a ficar irritado com o colega por este estar a mexer nas palhinhas, fazendo-se ouvir durante a resolução do trabalho escrito, "Oh Diogo, está quieto!" (Eduardo).

Foi possível esclarecer, também, que o par não apresentou o seu raciocínio pela falta de tempo, "Pois… íamos fazer e depois acabou o tempo!" (Diogo).

Ao ser-lhes solicitado que respondessem qual a área maior e menor possível utilizando 20 palhinhas, o Eduardo respondeu imediatamente que para a menor área "é 1, 9". Para obter a área máxima, o Eduardo continuou seguindo a mesma estratégia do trabalho escrito, a experimentar aumentando uma palhinha na largura e diminuindo uma no comprimento.

Inv. – E da área máxima?
Diogo – Com vinte?!
Edu – Três por Sete.
Inv. – Será?

Diogo – 2, 8, deixa cá ver…
Edu. – Não pois 4x6 é 26.
Inv. – 4x 6 dá quanto?
Diogo – Dá 24.
Inv. – E não dá mais nenhuma figura?
Edu. – Acho que não! Hum… deixa ver…
Diogo – 5x5.
Inv. – E 5 vezes cinco dá quanto?
Edu./ Diogo – Dá 25!
Inv. – Qual é a maior área?
Edu. – Mas temos aqui uma dificuldade!
Diogo – Não, que o quadrado também é um retângulo!
Edu. – Os números coincidem!
Inv. – E há mais próximos que eles próprios?
Diogo – Então na primeira…
Inv. – Mas aqui só vos pedia com 14! Ali já vos pedia com 20. E com 30 qual é a menor área?
Diogo – Menor área… para 30…
Edu. – Metade de 30 é 15, então é 14,1.
Diogo – 14, 1? Sim, a menor é 14, 1.
Inv. – E qual seria a maior área?
Edu. e Diogo – Maior…10,10.
Inv. – 10, 10 e depois só ficava 10 para cada um dos outros dois lados… será que não há nada mais próximo?
Diogo – 7,6.
Edu. – 42.
Inv. – Confirmem se estão a utilizar as 30 palhinhas! Vamos a confirmar…
Edu. – 14.
Eduardo – 12.
Inv. – Então 12+14 dá vinte e …
Edu. – 6… 8, 7.
Diogo – 8 e 8 16 e 7 e 7 14 dá 30.
Inv. – 8 x7 é…
Diogo – 54.
Edu. – 56.
Inv. – Chegaram ou não, na aula, à resposta correta?
Edu./Diogo – Não! Faltou explicar melhor…

Na questão 7 interpretaram e compreenderam corretamente a tarefa considerando todos os dados e relacionando-os com os resultados que iam obtendo.

Diogo – Os retângulos 5 e 8.
Diogo – Os 5 e8 n dá!
Edu. – não?! [conta]
Diogo – 5 x8 é…
Edu. – 40.
Diogo – 32.
Edu. – Não é nada!
OEdu e o Diogo – [Dizem a tabuada] É 40.
Edu. – 6x6…
Diogo – 6x6 é 36!
Edu. – 6 vezes 6…mas nós precisámos de 42. É 7x6.
Diogo – 42?!
Edu. – Ai não 36. Então dá!
Diogo – Mas isso é um quadrado.
Edu. – E é um retângulo, a professora disse que podia!

Diogo – Pois podia.
Edu. – Está calado. Anda lá, oupa.

No entanto a partir de determinada altura começaram a confundir os conceitos de área e perímetro.

Diogo – 36 a dividir por 2!
Edu – Faz a conta
Diogo – Dá 18
Edu – Dá o quê!?
Diogo – 18 + 18… está bem dá, dá…
Diogo – Podíamos fazer de outra forma…
Edu – 16 e 2
Diogo – Oh, estás maluco!
Edu – 16x2
Diogo – Mas temos q fazer de outra maneira fica 20, 16… hum…10 e 8
Edu – Está calado carvalho
Diogo – Podemos fazer 8 e 8 16. Eduardo confirma comigo… professora 6x6 dá?
Inv. – Dá 36?
Edu – Dá?!
Inv. – Então…
Edu – Tem que ser a partir da tabuada do 4… com o cinco não dá mesmo. O 6…6x6 36,o 7… não dá!

Demonstrando que necessitavam de alguém que os fizesse refletir sobre o trabalho. Posteriormente à reflexão já conseguiram resolver correta e autonomamente a questão.

Apresentando no final, no trabalho escrito, cinco retângulos não congruentes.

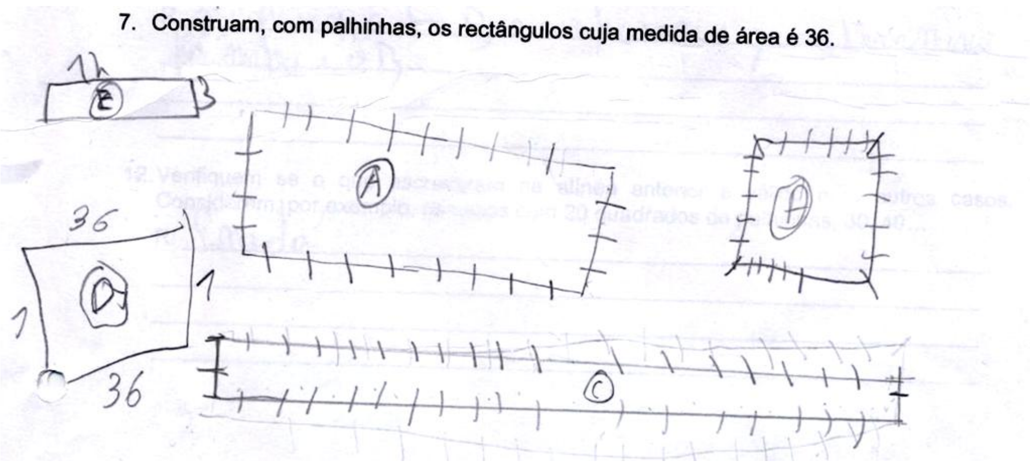


fig. 3 – Resposta à questão 7

A primeira estratégia de resolução foi procurar aleatoriamente números inteiros positivos que multiplicados entre si dessem 36, na segunda passaram para as tabuadas da multiplicação para ver se encontravam algum produto de números naturais que desse 36, mostrando, inicialmente, uma aparente falta de organização. “Tem que ser a partir da tabuada do 4 … com o 5 não dá mesmo … o 6 …6x6 36… o sete não dá!” (Eduardo).

Necessitaram de uma ajuda para esclarecer alguns conceitos que lhes estavam a dificultar a resolução da tarefa.

Inv. – Diogo vamos lá ver, este será uma unidade de área [desenhei com as palhinhas…] … quantos precisavam para ter 36?
Diogo – Ah, já percebi! [resolvem….] Olha, quinze, dezasseis…
Edu – Tem que ser 18 e 1, faz e vê se dá!
Diogo – 18 x1…
Edu – Mas nós queremos é… 36 de área não é? [Desenham e contam]
Diogo – Conta até 18 e faz vezes 2.
Edu – Não, … sim…
Diogo – Este dá!
Edu – Agora temos que contar o perímetro…
Diogo – … 40 …

Na questão 9 interpretaram e compreenderam a questão, no entanto apenas consideraram alguns dados. O par apenas resolve com base na medida da área e não considera “as medidas do comprimento e da largura correspondentes”. Resolvendo correta e autonomamente parte da questão. O Eduardo apreçou-se a registar “observamos que a área dos retângulos são sempre as mesmas”. Apesar do Diogo não concordar com a resposta registada, manifestando o seu descontentamento ao dizer “só dizes isso para despachar”. Mostra-se aqui que os argumentos do Eduardo não convenceram o colega e que lhe foram impostos. Parece que devido ao contexto envolvente e ao escasso tempo que restava para terminar a tarefa, o registo não foi alterado.

Edu. – Comparem a área dos retângulos e observem as medidas… [leem]
[lê novamente] Não percebi! Lê tu Carvalho a ver se percebes…
Prof. – Vamos terminar.
Edu – Ainda nos falta a última página… Observamos que a área dos retângulos é sempre a mesma!
Diogo – Só dizes isso para despachar.
Edu – Calma.
Diogo – Concluímos que o perímetro …
Prof. – 3 minutos para acabar…
Diogo – Rápido … rápido…

Na questão 10 interpretaram e compreenderam a questão considerando todos os dados obtidos nas alíneas anteriores porque deram uma resposta baseada na observação dos dados da tabela da questão 8. Apresentaram raciocínio correto para os retângulos que construíram na questão 7. Apresentaram uma explicação incompleta não comparando a medida da largura e do comprimento entre os retângulos que “Têm a mesma área e não têm o mesmo perímetro”. Concluíram de uma forma particular porque foi o que os seus retângulos lhes permitiram concluir. Os argumentos apresentados foram particulares e permitiram convencer o colega. Neste momento foram capazes de apresentar uma explicação para o maior perímetro considerando um qualquer grupo de retângulos que tenha igual área. No entanto, para o perímetro menor não ficou claro se seriam capazes de generalizar, pelo facto de terem recorrido novamente a um caso particular.

Inv. – E quando é que é menor a medida do perímetro?

Edu – É este que é 24! (entrevista, 18.01.2011)

Na questão 11 leram, interpretaram, compreenderam, considerarem todos os seus resultados e resolveram com base nos seus resultados. Podendo-se ler no seu trabalho escrito: Escolhemos o A e B e comparamos que o que tem menos perímetro é o B.

Pelo facto de interpretarem o enunciado como se tratando de um caso particular não passaram à generalização, nem chegaram a formular uma conjetura, como fizeram anteriormente na questão 5.

Na questão 12 do trabalho escrito apenas registaram "sim, dá" não apresentando mais qualquer tipo de trabalho. Na entrevista transpareceu que interpretaram e compreenderam a questão considerando todos os dados obtidos nas alíneas anteriores porque quando questionados sobre o que escreveram, refletiram e argumentaram o seguinte:

Inv. – E quando é **maior** a medida da perímetro?
Edu – **É quando os números estão mais afastados.**
Inv. – E quando é que é menor a medida do perímetro?
Edu – **É este, que é 24**!

Os argumentos apresentados foram particulares e permitiram convencer o colega. Neste momento foram capazes de apresentar uma explicação para o maior perímetro (**É quando os números estão mais afastados)** considerando um qualquer grupo de retângulos que tenha igual área. No entanto, para o perímetro menor não ficou claro se seriam capazes de generalizar, pelo facto de terem recorrido novamente a um caso particular **(É este que é 24**!). Quando questionados pelo investigador com o objetivo de os levar a refletir continuaram a não generalizar apresentando a medida de menor perímetro considerando os seus retângulos.

Durante a tarefa o **nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi médio**. Houve momentos em que resolveram a questão simplesmente por acumulação de factos.

Edu – E não dá! Os retângulos 5 e 8.
Diogo – Os 5 e 8 não dá!
Edu – Não?
Diogo – 5 x8 é…
Edu – 40.
Diogo – 32.
Edu e Diogo – [Dizem a tabuada] É 40!

Surgiram raros momentos de argumentação agressiva,

Edu – Sim.
Diogo – Não, tem calma…
Edu – Sim, a professora disse q dava para todos…
Diogo – Tu não me deixas ver a pergunta!
Edu – Não estamos a brincar… O que é que tu estás a fazer?
Diogo – Eu sei o que estou a fazer… […]

Edu – Oh Diogo, está quieto! Então 4x 6 não dá 36!
Diogo – Vou experimentar…

Estiveram sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão e, por vezes, souberam ouvir, raciocinar e refletir.

Edu. – São todos iguais porque todos têm o mesmo número de palhinhas…
Diogo – Vamos para a seguinte pagina… Temos que dizer que…
Edu. (interrompe) – Para obter área é comprimento vezes largura.
Diogo – Não se tu reparares … podemos dizer acerca da área que.
Edu. – Para obtermos o retângulo com maior área, tem que ter…
Diogo – Sim, tem menos comprimento e mais largura vai ter mais área.
Edu. – Sim é o que tem menos lar…não mais comprimento e menos largura é o que tem menor área…
Diogo – Vamos escrever isso.
Edu. – Podemos dizer que….

No momento em que o tempo começou a escassear o par deixou de se apoiar em argumentos para resolver as restantes questões.

Prof. – Vamos terminar.
Edu – Ainda nos falta a última página! Observamos que a área dos retângulos é sempre a mesma!
Diogo – Só dizes isso para despachar
Edu – Calma.
Diogo – Concluímos que o perímetro …
Prof. – 3 min. para acabar…
Diogo – rápido … rápido… Concluímos que o perímetro … não … os retângulos que
Edu – Desenhados.
Diogo – Não que…
Edu – Desenhados…
Diogo – Não, deixa ver como é que está… concluímos que os retângulos que têm a mesma área não têm…
Edu – O mesmo perímetro!

Ao longo desta tarefa este par teve dificuldades nos conceitos comprimento, largura, área e perímetro devido a confusões. No entanto, grande parte das confusões foram esclarecidas dentro do grupo sem ser necessário solicitarem a intervenção da professora ou da investigadora. Logo no início da resolução da tarefa o Eduardo desabafou: “Isso é comprimento ou largura? Isto é difícil fogo…”.

A falta de tempo para resolverem a tarefa condicionou bastante o par não lhes dando o tempo suficiente para exporem as ideias um ao outro.

O Eduardo utilizou algumas vezes a professora como argumento para “calar” o colega. À medida que o tempo de resolução da tarefa ia passando a grande dificuldade tornou-se em conseguir ouvir o seu parceiro e em argumentar de modo a tentar convencê-lo.

Na questão 7 voltaram a existir dúvidas e confusões entre a medida de área e de perímetro “metade de 36 é 18” (Eduardo) ficando “17, 17, 1, 1” (Eduardo e Diogo), quando o que era pedido era para construir retângulos com 36 unidades de área. Até que concluíram “mas não dá!”.

Verificaram-se algumas dificuldades ao nível da generalização durante o trabalho a pares porque, na questão 6, quando se estende para 20 palhinhas o Eduardo escreve inicialmente “sim dá” argumentando junto do colega “sim, a professora disse que dava para todos”. Assim nem teve que verificar o seu trabalho.

Parece que estas dificuldades podem ser ultrapassadas com a aplicação de tarefas que estimulem os alunos neste tipo de trabalho. As autoras Forman e Ansell (2002) referem que existe a necessidade do aluno mudar as suas crenças no modo como atua nas atividades matemáticas mas para tal o professor tem que proporcionar-lhe tarefas mais consistentes e com uma orientação construtivista de aprendizagem.

Algumas das dificuldades que parecem ter surgido durante a resolução das tarefas parece ter sido pela falta de capacidade de argumentarem colaborativamente. Para colmatar esta grande dificuldade, segundo Andriessen (2006), na aprendizagem da argumentação colaborativa, como foi referido na revisão de literatura, as atividades são baseadas noutras atividades e “Para aprender argumentando é necessário incorporar nas atividades uma condução colaborativa impulsionada por um desejo de compreensão e de partilha com os outros.” (p. 443). Sendo sugerido tarefas consistentes e problemas com graus de abertura diversificados que permitam os alunos apresentem diferentes raciocínios e argumentos.

Resolução da tarefa 3

Na questão 1 os alunos contaram o número de quadrados necessários para fazer cada uma das molduras representadas. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte do professor ou do investigador. Consideraram os dados do enunciado e da figura, como se pode verificar no seu trabalho escrito,

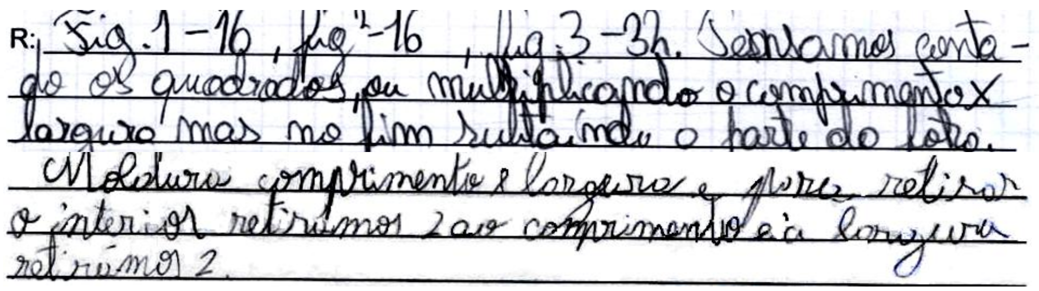

R: Fig. 1 – 16, fig. 2 – 16, fig. 3 – 32. Somamos contando os quadrados, ou multiplicando o comprimento x largura mas no fim subtraindo a parte do lado. Moldura comprimento e largura e para retirar o interior retirámos 2 ao comprimento e à largura retirámos 2.

Fig. 4 – Resposta à questão 1

A primeira estratégia apresentada foi a contagem do número de quadrados existente em cada moldura. A segunda forma de contagem que lhe surgiu, depois de observarem melhor as molduras, foi contar o número de quadrados que cada moldura tinha no comprimento e na largura e multiplicarem (cxl), depois retiravam dois ao comprimento e outros dois à largura para calcularem a área que a "foto" ocupava. Por fim, subtraíam o segundo produto ao primeiro para obter a área da moldura.

Tendo registado no seu trabalho escrito,

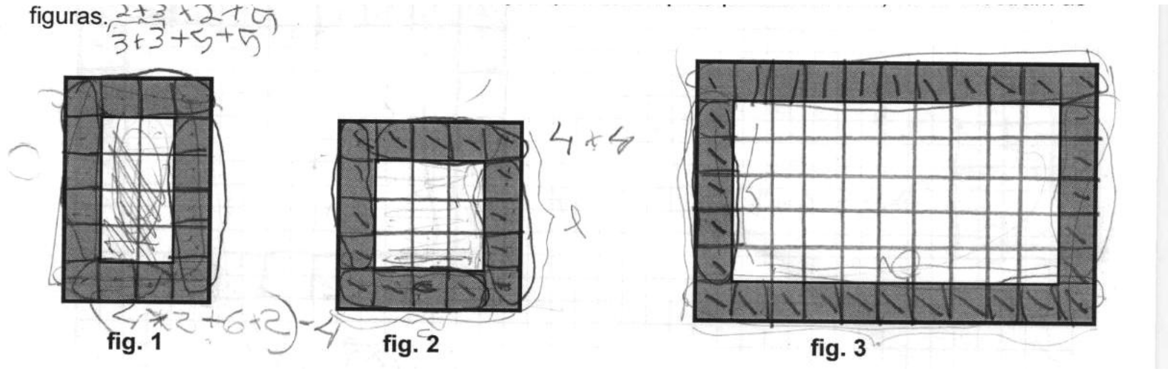


Fig. 5 – Resposta à questão 1

Na questão 2 desenharam três diferentes molduras sem qualquer dificuldade nem dúvida.

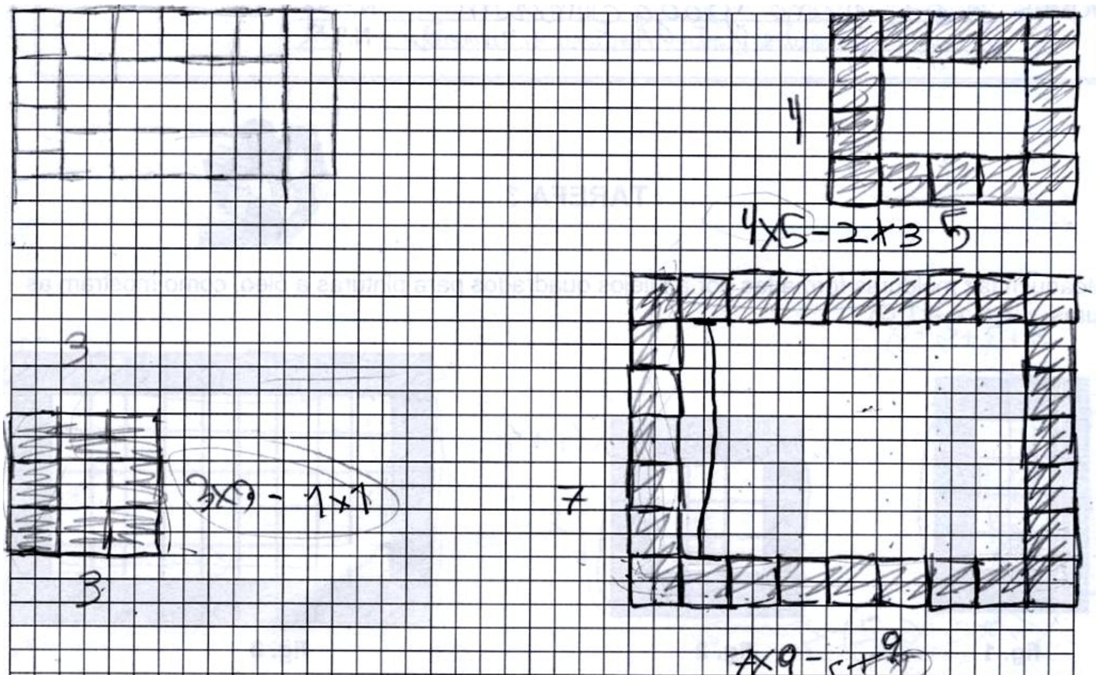


Fig. 6 – Resposta à questão 2

Na questão 3 era solicitado que escrevessem uma expressão numérica que traduzisse o número de azulejos que gastava cada moldura. O par pareceu não ter dificuldades em compreender o que era uma expressão numérica apesar de ser a primeira vez que ouviam tal designação. A professora optou por ler o enunciado da questão e explicar, para toda a turma, o que era pretendido fazendo referência a expressões escritas na tarefa anterior. Analisando o trabalho escrito parece que interpretaram e compreenderam corretamente o que lhes era solicitado e, inicialmente, relacionaram a resposta que estavam a desenvolver com a anterior. Apesar de lerem o enunciado e de terem conhecimento que cada unidade de azulejo está representada por "um quadrado", equivocaram-se ao escreverem a última expressão numérica referente à última figura só escrevendo "7x9". Na entrevista tiveram hipótese de completar a expressão e de dialogar sobre como deveria ser:

Edu – Ajuda a fazer este mas é!
Edu – Aqui tiramos cinco… um, dois…
Diogo – Já sei quantos estão dentro 5x7. Quanto é? 5x7 é 35. (24.01.2011).

Como se pode observar na figura seguinte, eles escreveram

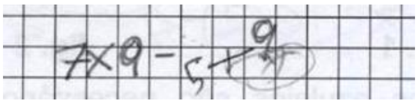


Fig. 7 – Resposta à questão 3

pretendendo escrever "7x9-5x7", o que representa o número de azulejos para a moldura nesta situação.

Nas três molduras colocaram expressões numéricas com base no cálculo da área, como referiu o Eduardo "Fizemos cxl mas dava isto tudo! Depois tiramos a parte da foto!" (24.01.2011).

Quando questionados sobre o que tinham que tirar e como sabiam quanto era, disseram:

Diogo – Vai ter sempre menos dois!
Edu. – Vai ser sempre o número menos dois!
Diogo – Icha, pois é!
Inv. – Então o interior que vocês vão tirar é o quê?
Edu. e Diogo – Comprimento e largura.
Inv. – Então o interior… que vocês vão tirar é?!
Edu. – O comprimento…
Inv. – Ao comprimento tiraram quanto?
Diogo e Edu. – Dois. […]
Edu. – Comprimento tirar 2.
Diogo – E à largura diminuímos dois. […]
Inv. – E depois de retirar os dois ao comprimento e à largura? […]
Edu. – Fizemos vezes…
Inv. – Façam neste. [contam 1…12.]
Edu. – Tiramos 2 ficam 10.
Edu e Diogo – 1…7, tiramos 2 fica cinco!
Edu. – 7x5 é 35. Então espera!
Inv.– Existiram **outros** processos de contagem? Acham que podiam contar de outra forma?
Edu. – Sim. Pela contagem. [referindo-se à contagem unidade a unidade]
Inv. – De outra forma mais organizada? [O Eduardo repete a forma que resolveram anteriormente]
Inv. – Outra forma?
Edu. – O comprimento da moldura mais a largura…
Diogo – A área… [O Eduardo confunde-se e volta ao cálculo da área]
Inv. – Outra…
Edu. – Não estou a ver…
Inv. – Então vou lembrar-te de uma que surgiu na aula. Que é: comprimento mais comprimento…
Diogo – Já sei… Já sei…

Inv. – Comprimento mais comprimento mais a largura menos este e este… (interrompe o Diogo).
Diogo – Não foi assim! A outra foi assim (e exemplifica) 4 e deixar um de fora…
Edu. – Ah! Elas também fizeram essa na aula! [Experimentaram resolver pela nova forma]
Inv. – E não podiam fazer cálculos de outra forma?
Diogo – 2 vezes o 3 mais 2 vezes o 5.
Inv. – Querem ver outra forma de se ver?
Diogo e Edu. – Sim. Sim. Mais uma!
Inv. – Por exemplo, calcular o perímetro.
Edu. – Mas assim está-se a contar repetido!
Inv. – Então como se vai repetir… tem-se que…
Edu. – Retirar 4.
Diogo – Oi.
Inv. – Há muitas formas de contar! Agora devem seguir a forma mais fácil…
Edu. – É a nossa…
Inv. – Na expressão numérica só fizeram 7x9… o que é que vos faltava?
Edu. – Menos!
Diogo – Ele é que fez isso sem a minha autorização!
Inv. – Então completa! Menos o quê?
Diogo – Menos 4.
Inv. – Assim não estão a seguir a vossa regra!
Diogo – Então é menos o que está dentro!
Edu. – Ah pois!
Diogo – Vamos passar primeiro para este que é mais fácil.
Edu. – Ajuda a fazer este mas é! Aqui tiramos cinco… um, dois…
Diogo – Já sei quantos estão dentro 5x7. Quanto é? 5x7 é… 35. **Que sou bom na tabuada!**
Edu. – Ai! […]
Diogo – Ele fez sem a minha autorização!
Edu. – Fiz, fiz…nem estavas a olhar para isto… […]
Inv. – O vosso processo de pensamento já nem o aplicaram aqui! Como calculavam uma moldura de 100 por 200?
Diogo – Iiihhh, era para tirar dois e só tiramos um…
Edu. – Pois e nós metemos 199!
Diogo – Pois mas tu concordaste!
Inv. – Quantos é que tiraram?
Edu e Diogo – um.
Inv. – E quanto precisavam de tirar?
Diogo – Dois e ficava 198. E tu concordaste, por isso não comeces a resmungar!
Edu. – É melhor fazer isto de novo.
Diogo – 198 mais 198… dá 596.

Logo, a falta de rigor com que apresentaram a expressão numérica de uma das molduras parece ser por distração.

Na questão 4, o trabalho escrito apresentado e que foi questionado na entrevista, após o terem resolvido e dialogado sobre ele durante a aula, revelava alguma confusão. Pois parte estava resolvida pela estratégia com que o par iniciou a resolução da tarefa, mas a expressão numérica da questão 4, que foi verificada durante a entrevista, representava outra estratégia. Quando foram confrontados na entrevista com o facto de terem de utilizado duas estratégias diferentes durante a resolução o par não identificou o aspeto referido, apenas verificou que a expressão estava escrita com falta de rigor. Depois do par retificar a expressão, a investigadora questionouos se tinham resolvido a tarefa em conjunto, responderam que sim, mas que às vezes quando cada um tinha uma estratégia e davam as duas se não chegassem a acordo por qual optar resolviam parte pelo raciocínio de um e a outra parte pelo raciocínio do outro. Como se pode verificar pela resposta apresentada.

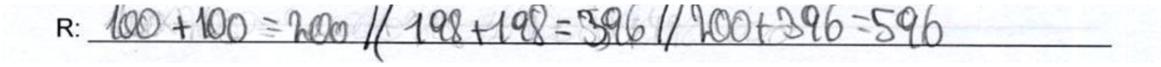

R: 100+100=200 // 198+198=396 // 200+396=596

Fig. 8 – Resposta à questão 4

A forma de resolução pela qual retificaram o seu trabalho foi a que a maioria da turma referiu no diálogo em grande grupo.

Inv. – E quanto precisavam de tirar?
Diogo – Dois e ficava 198. E tu concordaste, por isso não comeces a resmungar!
Edu. – É melhor fazer isto de novo.
Diogo – 198 mais 198… dá 596.
Edu. – O quê? É 198 mais 198. 100 mais 100 dá 200. Se este for para…
Diogo e Edu. – [fazem cálculos mentalmente] 200 mais 200 menos 4 dá 396. Mais 200 dá 596.
Diogo – Foi o que já tinha dito! (24.01.2011)

De modo geral, os elementos deste par não sentiram grande necessidade de argumentar e contra-argumentar porque existiu concordância na resposta, como se pode verificar pelo diálogo,

Edu. – É mais fácil contar os quadrados!
Diogo – Os quadrados assim.
Edu. – Mas assim é mais fácil se contares assim…
Diogo – Bem, vamos lá.
Edu. – 16… 25.
Diogo – 25?!
Edu. – Sim!
Diogo – 1,2,3,4,5,6,7,8… Oi. [contam]
Diogo – Pensamos contando o número de quadradinhos. 25 não é?
Edu. – Aqui 32. (19.01.2011)

Inv. – Sem contar unidade por unidade.
Diogo – Já sei! Aqui tem dois, dois…
Edu. – Estás a contar! (24.01.2011).

Não sentiu necessidade de solicitar o apoio da professora ou da investigadora nem foram notórias dificuldades em interpretar os enunciados das questões.

No trabalho escrito explicaram duas formas de contagem e resolveram a última questão com uma terceira forma. Na gravação áudio foi evidente que a impaciência e o estado irrequieto do Diogo estavam a perturbar o Eduardo.

Edu. – Está calado pá! Está calado!!!
Diogo – Ó eu quero trabalhar… desenhe retângulos de várias dimensões.
Essa está bem! [Faz sons com a boca “oaoaoaaaa”]
Edu. – Ó Carvalho está calado.

O envolvimento na tarefa foi constante e de certa forma foi melhorando ligeiramente ao longo do tempo pelo facto do Diogo se ter acalmado. No entanto, na última questão verificou-se um pouco de desconcentração. Na entrevista, o par retificou o seu raciocínio. Apesar do Diogo (pelo cálculo das áreas) e o Eduardo (somar duas vezes o comprimento com duas vezes a diferença da largura por 2) considerarem que a sua estratégia de resolução era o melhor, quando foi para retificar a expressão apresentada o Diogo foi imediatamente pelo processo de resolução apresentado pelo seu par e pelo que a maioria dos colegas apresentaram na exploração da tarefa em grande grupo. Talvez se tenha verificado tal comportamento por parte do Diogo porque ele é orgulhoso, parece ter pensado que a estratégia dele era a mais difícil e a que menos alunos chegaram a pensar nela (apenas mais uma aluna e que não dos pares de estudo e porque foi a professora que a orientou) e por isso, para ele, fizesse daquela a melhor forma de resolver a questão. No entanto, quando vai para retificar uma expressão referente a uma moldura de grandes dimensões, instintivamente, nem hesitou sobre qual a estratégia a optar.

No que concerne à argumentação colaborativa na aula foi pouco evidente e, até mesmo, pontualmente, agressiva como já apresentado.

Verificando-se desenvolvimento de trabalho através do debate, alguma partilha de conhecimento matemático, o envolvimento do par para resolver o mesmo assunto, o trabalho para uma aprendizagem não competitiva, alguns momentos em que a argumentação surgiu como diálogo, souberam ouvir-se, raciocinar e, pontualmente, refletir, como se pode verificar em algumas das partes do diálogo (24.01.2011) já apresentado.

Durante o trabalho escrito (19.01.2011) o diálogo que se ouviu entre os dois elementos foi de um trabalho pouco pacífico devido à agitação do Diogo. Parecia que o Eduardo teve necessidade de ser o líder do par, porque o Diogo tinha momentos em que estava bastante agitado. Tendo achado que devia dar as ordens do que fazer, enquanto o Diogo manifestava ele ignorava e coordenou o tempo que o seu colega pode registar as respostas, e porque este insistiu muito e ameaçou que ia dizer à professora.

Os argumentos apresentados são gerais. Quando se referiram ao cálculo da área visível da pintura a óleo, o Diogo disse que “é sempre menos dois” ou, como o Eduardo disse, de uma forma mais rigorosa, “vai ser sempre o número menos dois”. Para calcular o número de azulejos necessários “Fizemos cxl mas isto dava tudo! Depois tiramos a parte da foto.”.

O Diogo e o Eduardo fizeram equivaler a unidade de comprimento ao comprimento do lado e assim calcularam a área total de azulejos utilizados. Sendo assim, o resultado obtido correspondia ao número de azulejos existentes na moldura.

Esta estratégia não foi, inicialmente, apresentada por eles à turma, mas eles concordaram com os colegas que apresentaram. Esta estratégia convenceu porque a maioria optou por ela durante a resolução do trabalho escrito. No entanto, como esta estratégia surgiu, pelo Eduardo, o

Diogo não ficou completamente convencido que esta era a forma mais fácil para determinar o resultado do problema. Na entrevista geral voltou a referir que pela área seria mais fácil “para medidas mais pequenas”.

Quando lhes foi solicitado que verificassem a questão 4 eles optaram, na mesma, por continuar a responder pelo método iniciado na aula “100+100 dá 200… 198+198”, sem recorrer ao modo como tinham inicialmente pensado.

Resolução da tarefa 4

Na questão 1.a) os alunos começaram por contar o número de quadradinhos da base na fig.1, depois na fig. 2 e, por último, na fig. 3 e verificar se existiam regularidades entre eles. A forma inicial de cada elemento do par visualizar as figuras foi diferente, no entanto, tinham que encontrar qual seria a melhor forma para a contagem. O Eduardo começou por “ver o retângulo completo” 5 por 2, quando se referia à fig. 2; e, 6 por 3, quando se referia à fig. 3. Enquanto que o Diogo estava a visualizar o retângulo “ao centro da figura” e a relacioná-lo com o número da figura, dizendo: “aumenta duas em baixo e aqui aumenta um”. Demonstrando assim que interpretaram, compreenderam a questão e tentarem encontrar regularidades que lhes permitisse desenhar as duas figuras seguintes. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte da professora ou da investigadora. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com base na sequência das figuras apresentadas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

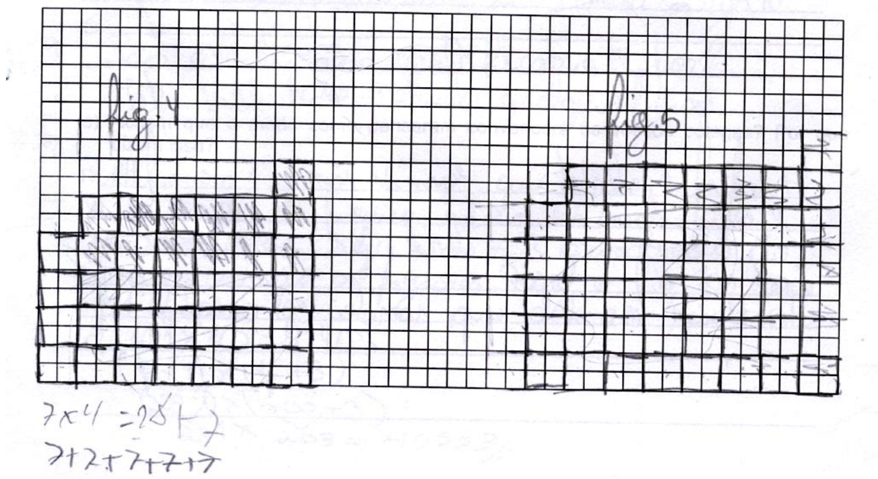


Fig. 9 – Resposta à questão 1 a)

Utilizando os conceitos de sequência, retângulo, quadrado, comprimento, largura, fila, coluna e área como se pode depreender do diálogo entre os dois alunos,

Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras.[…]
Edu – Uff esta figura?!
Edu – [Para calcular a área conta] 1,2,3…
Diogo – Sabes uma maneira melhor?
Edu – 1,2,3…10 mais cinco… 18 mais 6…
Diogo – Aqui tão seis 6x3 18 mais 6…dá 24.
Edu – Não.
Diogo – 12 mais 6 dá 18.
Edu e Diogo – 18 mais 6 … 18,19,20,21,22,23 e 24. (19.01.2011)

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das sequências e que as tarefas iniciais lhes tinham dado algum treino na visualização das regularidades. O que lhes permitiu manter obter diferentes formas de contagem e, consequentemente desenhar as figuras seguintes da sequência sem grandes dificuldades. A confusão entre a designação de fila e coluna estava a dificultar o diálogo entre o par.

Edu – E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter!
Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …
Diogo – Já reparaste a 3 tem três colunas com o mesmo número (refere-se a filas) mas depois vai ter menos… Pinta aí os quadradinhos que é melhor…
Edu – Deixa estar… a terceira vai mudar três porque é a terceira 1,2,3,4,5,6…
Prof. – Deixa lá isso Diogo, estás a perder tempo, anda lá!
Diogo – Agora tem que ser nove… tem calma… a três é…mais três seis…
Edu – Mais três nove.
Diogo – E depois cinco filas de nove… faz com cinco filas. Agora tivemos duas formas de fazer…

Na entrevista (24.01.2011) o Diogo volta a confundir-se:

Diogo – … Eu lembro-me! Para a fig. 100 tinha 101 filas…
Edu – Filas ou colunas?!
Diogo – Filas!
Edu – Tu és teimoso…

Na estratégia apresentada, houve organização. Iniciaram por um caso gerado pela sequência encontrada por recorrência à figura anterior e a partir desse construíram a outra figura seguinte. Como se pode verificar durante a resolução da tarefa (19.01.2011):

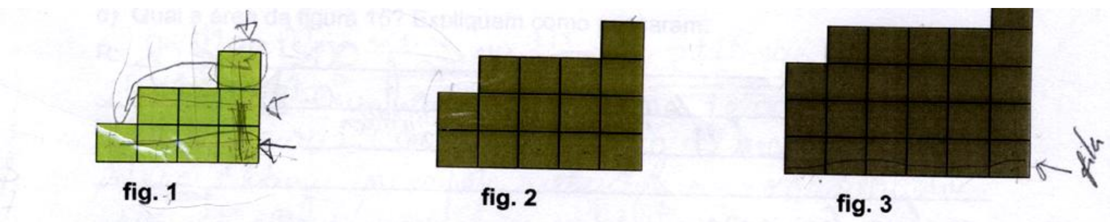


Fig. 10 – Resposta à questão 1 a)

Edu. – Figura 1 tem aqui um, figura 2 tem aqui estes 2, figura 3 tem 3 a 4 também vai ter 4.
Diogo – Pois é… Bem pensado…
Edu – Calma, estás a fazer uma aqui a mais…
Diogo – Não, está igual! Tem aqui 4 e depois… É que nós tínhamos encontrado de outra forma! Eu disse que em vez daqui aumentava-se dois, um, dois, um…

Um dos obstáculos à generalização foi a continuação da construção da sequência por recorrência. Como o Eduardo sugeriu “E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter! Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …”.

Na questão 1.b) interpretaram e compreenderam corretamente a tabela permitindo-lhes preenchê-la correta e autonomamente. Apesar do Eduardo dizer ao Diogo para contar os quadradinhos de modo a poderem preencher a tabela, o Diogo sugeriu que calculassem a área e depois somassem os restantes quadradinhos. Dizendo: “Sabes uma maneira melhor?... Aqui estão seis, 6x3 18 mais 6… dá 24”. Posteriormente, quando tinham a área das três figuras calculadas, o Diogo ainda sugeriu que chegassem ao valor da área pela soma dos números ímpares “podemos calcular uma cena. De 8 para 15 vão 7… de 15 para 24 são 9. Agora vão ser 15” (19.01.2011).

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Área tomando como unidade o □	8	15	24	35	48

Fig. 11 – Resposta à questão 1.b)

Na questão 1.c), analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados iniciais com os resultados que foram obtendo das alíneas anteriores.

O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente mas necessitaram apoio por parte da professora ou da investigadora para os ajudar a detetar qual era o erro cometido.

> Inv. – Confirmem se o n.º de quadrados na base ao comprimento esta correto! Como fizeram?
> Diogo – Nós fizemos assim, reparamos que aqui tinha 4 e aqui já tinha 5 e na fig. 1 tinha aqui uma completa e aqui tinha duas. Depois demos que aumentava um…1,2,3,4,5,5. Então nós partíamos do 1.º para o terceiro e chegamos à conclusão de quantos tínhamos em baixo…
> Eduardo – Nós aqui contamos mal…
> Diogo – Porque aqui era três. (19.01.2011).

Observaram de imediato a tabela e concluíram:

c) Qual a área da figura 7? Como sabem?

R: A área é de 80. Sabemos porque fizemos: 8 +7 15 +9 24 +11 → 35 +13 48 +15 63 +17 80.

Fig. 12 – Resposta à questão 1.c)

No entanto, na resposta escrita, para explicar como sabiam qual era o valor da área da figura 7 escreveram a sequência do valor da área das diferentes figuras mas não conseguiram apresentar uma explicação. Ou seja, no trabalho escrito não souberam apresentar argumentos capazes de explicar o seu raciocínio.

Edu - Para a próxima vai ser mais 15. 48 mais 15… […] 3 e 7 dá 10 tens daqui 2… 80. Agora para justificar vai ser bonito! […]
Edu – Agora temos que por aqui a explicar… [conversam baixinho]
Diogo – Pões aqui a conta… (19.01.2011)

Na questão 1.d) leram e interpretaram conjuntamente a questão e chegaram à solução por recorrência, tal como na questão anterior.

Apesar do Eduardo ter referido uma forma de contagem que lhes permitia calcular a área das figuras “a figura 2 tem duas completas, a 4 tem quatro….depois era mais uma incompleta e depois punha-se aquela que faltava em cima…”. No entanto, parece que teve receio de errar e preferiu completar o trabalho recorrendo sempre à figura anterior.

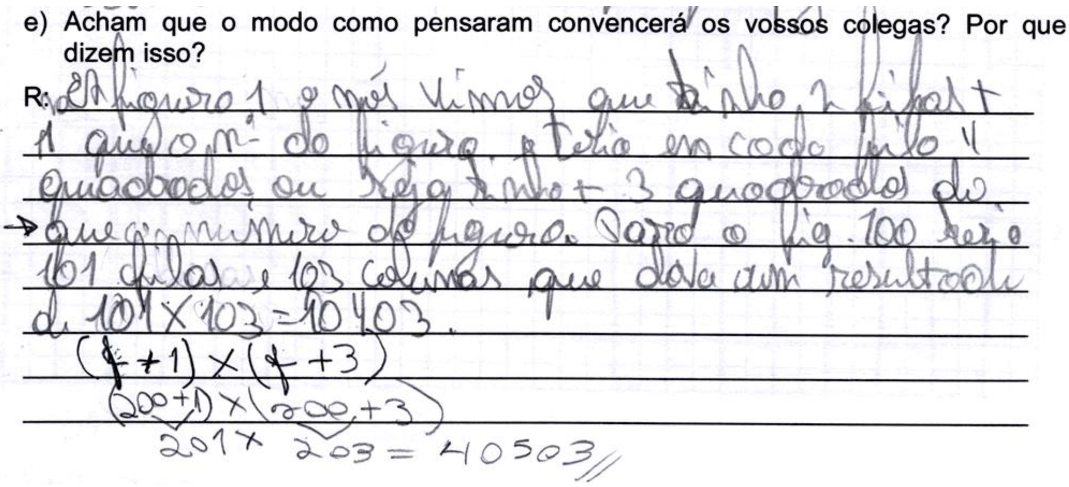
O diálogo em grande grupo permitiu que o par falasse sobre as outras formas de contagem a que tinham chegado. O Eduardo explicou a sua forma de chegar à solução mas foi o Diogo que a foi desenhar e escrever no quadro e enganou-se, pelo que o Luís sugeriu outra forma. Antes de questionar a turma se consideravam que havia diferentes meios para chegar à solução ou se ponderavam existir algum mais simples, a professora, devido ao escasso tempo para o termino da aula, solicitou a toda a turma para transcrever do quadro a resposta do Luís. O Diogo não ficou satisfeito, fez-se ouvir e conseguiu expor à turma uma forma mais rápida, segundo ele, para chegar ao valor da área de qualquer figura. Pelo facto da professora ter solicitado que toda a gente passasse o raciocínio do Luís, o Diogo e o Eduardo apagaram a sua resposta e atenderam ao pedido da professora. No entanto, após o Diogo expôr o seu raciocínio à turma, pedi que se ele e o Eduardo estivessem de acordo e considerassem que era esse o raciocínio que lhes permitia obter o valor da área de qualquer figura com menos possibilidade de errarem e de modo mais rápido, o registassem na alínea seguinte (e).

Inv. – Acham que conseguiam convencer os vossos colegas?
Diogo – Naquela altura tocou e claro, eles, disseram todos que sim!
Inv. – Pois, mas se não tocasse acham que eles iam dizer todos que sim!?
Diogo – Sim. Porque a minha resposta estava bem.
Edu – A do Luís também estava! Mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…
Diogo – A minha era mais fácil!
Edu – Se fosse outra figura, por ex. 200 era 201 e 203. (24.01.2011)

Mostrando assim que conseguiram compreender a questão. A resolução apresentada (ver fig. 1.2) está correta e efetuou-se autonomamente considerando todos os resultados que foram obtendo. O seu colega concordou com ele e registaram. Assim o par respondeu à questão por recorrência e baseados nos dados e nas regularidades detetadas mas, posteriormente, através da observação das figuras assim como das regularidades, conseguiram obter uma forma de generalizar e, com apoio da investigadora, escrever uma expressão algébrica (24.01.2011).

Eduardo – N.º da figura mais …

Diogo – A fila tem mais 3 que o número da figura.
Inv. – Sabes qual é o n.º da figura?
Eduardo – É 100.
Inv. – De uma qualquer!
Eduardo – 3.
Inv. – Uma qualquer, não tem que ser necessariamente um nº. Algo que te permita substituir por um n.º qualquer. Como vocês na fórmula da área também não colocam! Escrevem o “c” para representar o valor do comprimento e depois substituem-no pelo comprimento que o retângulo tiver…
Eduardo – Pode ser o f para a fórmula!
Inv. – Pronto o f de fórmula… o f ficaria a representar o n.º da figura! Ao n.º da figura o que vocês somaram?
Diogo – 1 para as colunas e 3. […]
Inv. – Agora peguem na fórmula e substituam para uma qualquer figura que queiram…
Eduardo – 200!
Diogo / Eduardo – 201x203= 200x203+ 1x203= (40600+203=40803).
Diogo – 40503.


e) Acham que o modo como pensaram convencerá os vossos colegas? Por que dizem isso?

R: A figura 1 e nós vimos que tinha 2 filas + 1 que o nº da figura e teria em cada fila 4 quadrados ou seja tinha + 3 quadrados do que o número da figura. Para a fig. 100 seria 101 filas e 103 colunas que dava um resultado de 101 X 103 = 10403.

$(f+1) \times (f+3)$

$(200+1) \times (200+3)$

$201 \times 203 = 40503$

fig. 13 – Resposta à questão 1.e)

Na entrevista foi-lhes pedido que voltassem a explicar o processo pelo qual chegaram à solução.

Edu – Foi a tua. A mais fácil! A tua era… duas… três na …vertical.
Diogo – Duas filas…
Edu – A figura 100 disseste que dava 103… Assim uma coisa!
Diogo – Já não me estou a lembrar…
Inv. – Olhando para as figuras, já consegues?
Diogo – A figura 1 tinha mais um que o número da figura… escreve tu! (dizendo para o Eduardo).
Inv. – Ajudo a identificar o que é uma coluna e uma fila…
Diogo – Então eu vi que a figura 1 tinha duas filas, ou seja, mais uma que o n.º da figura. E teria em cada fila quatro quadradinhos, ou seja, mais três quadrados que o nº da figura.
Inv. – Agora dá o exemplo para a fig. 100.
Diogo – Tem 101 e aqui 103 que dava 10430! Eu lembro-me! Para a figura 100 tinha 101 filas…
Edu – Filas ou colunas?!

O argumento apresentado para justificar a estratégia é geral, válido, rigoroso, completo e segundo o Diogo só foi convincente porque “naquela altura tocou e claro que eles disseram todos que sim!”. Segundo eles (24.01.2011),

Diogo – Sim. Porque a minha resposta estava bem.
Edu – A do Luís também estava mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…

Diogo – A minha era mais fácil.

No trabalho escrito, apresentaram um raciocínio correto mediante o trabalho desenvolvido anteriormente e que consideravam que deviam registar que

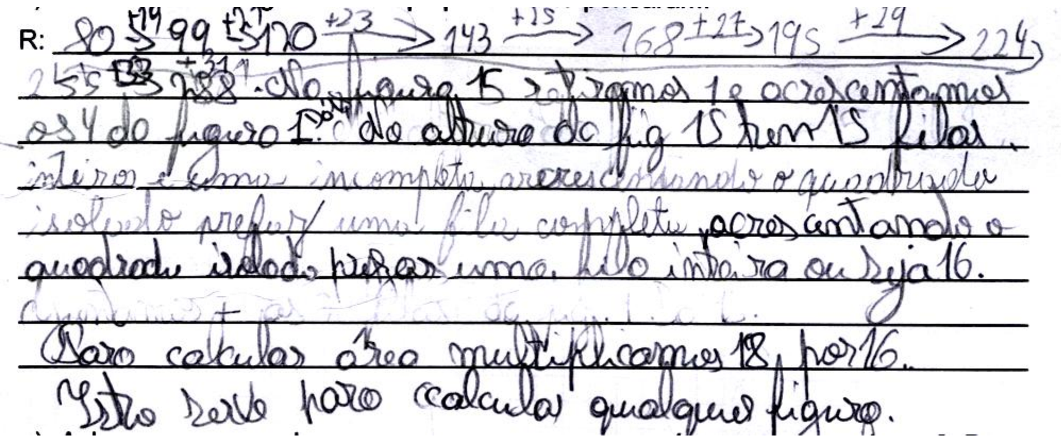

R: 80 +19 99 +21 120 +23 143 +25 168 +27 195 +29 224 253 +31 288. Na figura 15 retiramos 1 e acrescentamos os 4 da figura 1. Da altura da fig 15 tem 15 filas inteiras e uma incompleta acrescentando o quadrado isolado fica uma fila completa acrescentando o quadrado isolado fica uma fila inteira ou seja 16. Para calcular área multiplicamos 18 por 16. Isto serve para calcular qualquer figura.

Fig. 14 – Resposta à questão 1.d)

Os argumentos apresentados pelo Diogo aparentemente foram convincentes porque conseguiu transmitir à turma o seu raciocínio de uma fora mais clara e simples que o Luís. A forma de visualização do Eduardo não foi transmitida com sucesso à turma, talvez pela dificuldade em expressar o seu raciocínio e este ser compreendido pelos colegas. Acrescendo ainda de um fator importante, quem foi completar a explicação ao quadro foi o Diogo e não o Eduardo.

Edu – A 2 figura tem duas completas, a 4 tem quatro….depois era mais uma incompleta e depois punha-se aquela que faltava em cima…
Diogo – Tem que ter 35.
Alex – A nossa tem 36!
Diogo – Acho que é melhor fazer as continhas…
Prof. – Alexandra só tem 30 ali? [Dizem, 35, 36…]
Zé – Ó professora aquilo está mal…
Diogo – Já sei, já sei! Porque o n.º de quadrados da base está igual ao da figura 3. (19.01.2011)

Nesta tarefa de um modo geral o par conseguiu trabalhar de um modo colaborativo e a maioria das vezes verificavam se o que escreviam era compatível que o que tinham pensado.

Diogo – Vê na 4, vê na 4…
Edu – Está bem…
Diogo – 4 mais Sete.
Edu – 4 mais sete, não! 4x7 é 28 mais 7 dá …
Diogo – 28 mais 7 dá 35… dá Sete.

Em grande parte das respostas foram capazes de confirmar se o seu raciocínio estava correto aplicando a "regra" que tinham descoberta a figuras já construídas. Como se pôde ouvir,

Edu – 24 mais 11 são 35…agora confirmamos... [Contam os dois o número de quadrados da figura]
Diogo – Já temos outra maneira de contar… 9 , 11, 13… (19.01.2011).

Apenas, pontualmente, o faziam pela solicitação da professora ou da investigadora.

Inv. – Confirma com o número de quadrados que tinham dito?
Edu – Dá…

Diogo – Agora para aqui…
Inv. – Confirme, na figura 5.
Diogo – 1,2,3…9 –
Edu -1,2,3,4,5,6,7,8,9 [conta a fila menor mais o quadradinho isolado]. 1,2,3,4,5 … 5x9=45, 6x9=54!
Diogo – Pois dá! Agora vamos à figura 7.

O Diogo e o Eduardo, por vezes, estavam-se a referir a formas de contagens diferentes, devido à forma de visualização da figura, sem se aperceberem disso. No entanto, conseguiram superar esse obstáculo, e resolver as questões, sem utilizar uma argumentação agressiva,

Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
Edu – 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras.
Edu – 4 e aqui já tem…
Diogo – Não! Aumenta em baixo duas!
Edu – E aqui tem 5, 2 e 6,3.
Diogo – Já sei como deve ser… aumentou um em baixo e aqui aumenta dois…
Edu – E ali também…
Diogo – Não, tem calma! Ai, deixa ver 4, 5, 6,7…hum hum.
Edu – Aqui aumentou um e ali aumentou dois.

Tendo o Eduardo registado apenas depois do par concordar e, até mesmo durante o desenho das figuras,

Edu – Então temos que desenhar 5! É, não é?
Diogo – É nada cinco, Eduardo? ….
Edu – Outra vez sete? Figura 1 tem aqui um, figura 2 tem aqui estes 2, figura 3 tem 3, a 4 também vai ter 4.
Diogo – Pois é… Bem pensado…

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi Bom. Mas surgiram raros momentos de argumentação agressiva, em que de certa forma queria ignorar o que o par lhe estava a dizer,

Edu – Filas ou colunas?!
Diogo – Filas!
Edu – Tu és teimoso…
Diogo – A professora está a entender-me! (24.01.2011)

Estiveram sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão e, por vezes, souberam ouvir-se, raciocinar e refletir.

Edu – E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter!
Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …
Diogo – Já reparaste a 3 tem três colunas com o mesmo número (refere-se a filas) mas depois vai ter menos… Pinta aí os quadradinhos que é melhor…
Edu – Deixa estar… a terceira vai mudar três porque é a terceira 1,2,3,4,5,6…
Prof. – Deixa lá isso Diogo, estás a perder tempo, anda lá!
Diogo – Agora tem que ser nove… tem calma… a três é…mais três seis…
Edu – Mais três nove.
Diogo – E depois cinco filas de nove… faz com cinco filas. Agora tivemos duas formas de fazer… […]
Diogo – Faz uma assim que é mais fácil e depois fazes uma com menos e está…

Edu – E depois temos que fazer a outra, na chaminé! […]
Edu – 1,2,3…10 mais cinco… 18 mais 6…
Diogo – Aqui tão seis 6x3 18 mais 6…dá 24.
Edu – Não.
Diogo – 12 mais 6 dá 18.
Edu e Diogo – 18 mais 6 … 18,19,20,21,22,23 e 24.

Ao longo desta tarefa este par teve algumas dificuldades devido a confusões nos conceitos de coluna e fila. No entanto, durante a resolução da tarefa não pareceu que tal representasse um grande obstáculo para a resolução da tarefa. Logo, no início da resolução da tarefa, o Eduardo começou a analisa-la enquanto que o Diogo ainda não estava concentrado no trabalho.

Edu – 1,2,3… Aqui aumenta 1.
Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
Edu - 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? (19.01.2011).

Parece verificar-se que o Diogo e o Eduardo apresentam níveis de maturidade, envolvimento e reação à tarefa muito diferentes. O Diogo é um aluno empenhado, por vezes, fala antes de refletir bem e não tem receio de expor de forma instantânea o seu pensamento.

O Eduardo prefere refletir antes de expor o seu raciocínio, mais ponderado, revela ter mais maturidade que o Diogo, como se pode ouvir em algumas situações na entrevista geral

Edu. – Porque eu pensava que sendo duas ideias que ia funcionar melhor mas com este às vezes não dá para perceber!
Inv. – É?
Edu. – Também depende…
Diogo – Porquê? Sou assim tão mau?
Edu. – Algumas coisas és!
Diogo – Oh, não sou tão mau!
Inv. – Então era porque o Diogo não tinha calma o suficiente.
Edu. – Ia logo para a resposta… não me deixava responder!
Diogo – Era direto!
Inv. – Para trabalhares bem com o Diogo, ele tinha que ter um pouco mais de calma. Era?
Diogo – Vou ficar calado.
Inv. – Não é ficar calado que se resolve… Era um pouco mais calmo para o ouvires.
Edu. – Não, é assim ele… é assim… nós devíamos ser mais organizados porque dizíamos as ideias em simultâneo… e era um bocadinho isso.
Inv. – Era por causa disso, fazia-te um pouco de confusão.
Edu. – Acho que não era só isso… nesse dia não estava tudo bem.

Verificaram-se algumas dificuldades colocar o seu raciocínio por escrito, principalmente ao nível da generalização. O diálogo em grande grupo revelou-se importante para que os alunos tivessem mais confiança e ganhassem coragem para expor as suas formas de pensar.

Uma dificuldade deste par, que parece limitar o seu desempenho, é o não saber ouvir-se e ter calma o suficiente para ouvir o colega, pensar sobre o que ele disse e construir o seu argumento com base no raciocínio do colega.

Resolução da tarefa 4

Na questão 1.a) os alunos começaram por contar o número de quadradinhos da base na fig.1, depois na fig. 2 e, por último, na fig. 3 e verificar se existiam regularidades entre eles. A forma inicial de cada elemento do par visualizar as figuras foi diferente, no entanto, tinham que encontrar qual seria a melhor forma para a contagem. O Eduardo começou por "ver o retângulo completo" 5 por 2, quando se referia à fig. 2, e, 6 por 3, quando se referia à fig. 3. Enquanto que o Diogo estava a visualizar o retângulo "ao centro da figura" e a relacioná-lo com o número da figura, dizendo: "aumenta duas em baixo e aqui aumenta um". Demonstrando assim que interpretaram e compreenderam a questão, e tentarem encontrar regularidades que lhes permitisse desenhar as duas figuras seguintes. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte da professora ou da investigadora. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com base na sequência das figuras apresentadas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

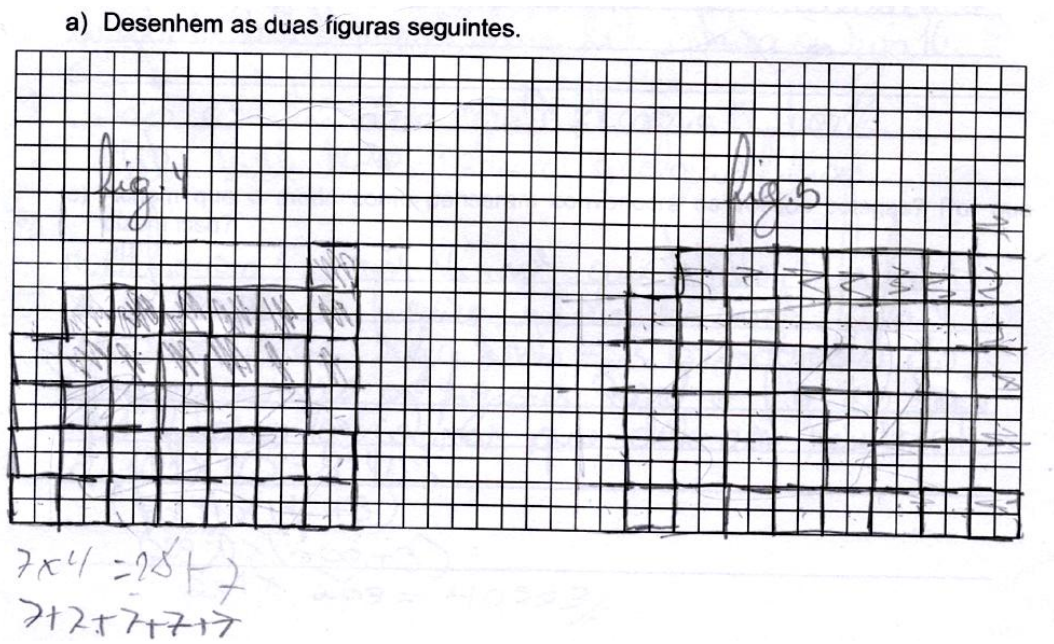


Fig. 15 – Resposta à questão 1 a)

Utilizaram os conceitos de sequência, retângulo, quadrado, comprimento, largura, fila, coluna e área. Como se pode verificar no diálogo entre os dois alunos,

> Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras. […]
> Edu – uff esta figura?!
> Edu – [Para calcular a área conta] 1,2,3…
> Diogo – Sabes uma maneira melhor?

Edu – 1,2,3…10 mais cinco… 18 mais 6…
Diogo – Aqui tão seis 6x3 18 mais 6…dá 24.
Edu – Não.
Diogo – 12 mais 6 dá 18.
Edu e Diogo – 18 mais 6 … 18,19,20,21,22,23 e 24. (19.01.2011)

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das sequências e que as tarefas iniciais lhes tinham dado algum treino, principalmente na visualização das regularidades. O que lhes permitiu obter diferentes formas de contagem e, consequentemente, desenhar as figuras seguintes da sequência sem grandes dificuldades. A confusão entre a designação de fila e coluna estava a dificultar o diálogo entre o par.

Edu – E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter!
Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …
Diogo – Já reparaste a 3 tem três colunas com o mesmo número (refere-se a filas) mas depois vai ter menos… Pinta aí os quadradinhos que é melhor…
Edu – Deixa estar… a terceira vai mudar três porque é a terceira 1,2,3,4,5,6…
Prof. – Deixa lá isso Diogo, estás a perder tempo, anda lá!
Diogo – Agora tem que ser nove… tem calma… a três é…mais três seis…
Edu – Mais três nove.
Diogo – E depois cinco filas de nove… faz com cinco filas. Agora tivemos duas formas de fazer…

Na entrevista (24.01.2011) o Diogo volta a confundir-se:

Diogo – … Eu lembro-me! Para a fig. 100 tinha 101 filas…
Edu – Filas ou colunas?!
Diogo – Filas!
Edu – Tu és teimoso…

Na estratégia apresentada, houve organização. Iniciaram a construção com base nas regularidades encontradas na sequência, recorrendo à figura anterior conseguiam construir a figura seguinte. Como se pode verificar durante a resolução da tarefa (19.01.2011):

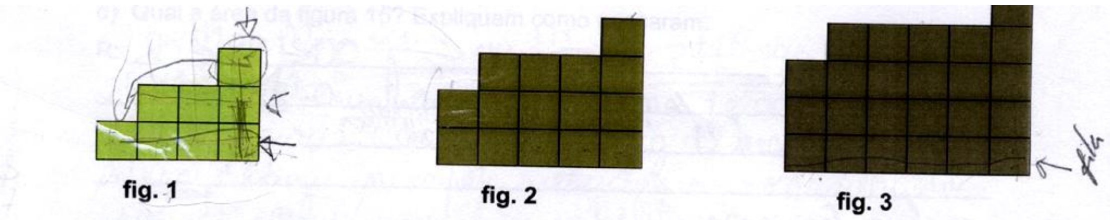


Fig. 16 – Resposta à questão 1 a)

Edu. – Figura 1 tem aqui um, figura 2 tem aqui estes 2, figura 3 tem 3 a 4 também vai ter 4.
Diogo – Pois é… Bem pensado…
Edu – Calma, estás a fazer uma aqui a mais…
Diogo – Não, está igual! Tem aqui 4 e depois… É que nós tínhamos encontrado de outra forma! Eu disse que em vez daqui aumentava-se dois, um, dois, um…

Um dos obstáculos à generalização foi a continuação da construção da sequência por recorrência. Como o Eduardo sugeriu “E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter! Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …”.

Na questão 1.b) interpretaram e compreenderam corretamente a tabela permitindo-lhes preenchê-la correta e autonomamente. Apesar do Eduardo dizer ao Diogo para contar os quadradinhos de modo a poderem preencher a tabela, o Diogo sugeriu que calculassem a área e depois somassem os restantes quadradinhos. Dizendo: “Sabes uma maneira melhor?... Aqui estão seis, 6x3 18 mais 6… dá 24”. Posteriormente, quando tinham a área das três figuras calculadas, o Diogo ainda sugeriu que chegassem ao valor da área pela soma dos números ímpares “podemos calcular uma cena. De 8 para 15 vão 7… de 15 para 24 são 9. Agora vão ser 15” (19.01.2011).

b) Completem a seguinte tabela.

Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Área tomando como unidade o □	8	15	24	35	48

Fig. 17 – Resposta à questão 1.b)

Na questão 1.c), analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados iniciais com os resultados que foram obtendo das alíneas anteriores.

O trabalho apresentado mostra que resolveram corretamente a questão mas necessitaram de apoio por parte da professora ou da investigadora para detetar o erro cometido.

Inv. – Confirmem se o n.º de quadrados na base ao comprimento esta correto! Como fizeram?
Diogo – Nós fizemos assim, reparamos que aqui tinha 4 e aqui já tinha 5 e na figura 1 tinha aqui uma completa e aqui tinha duas. Depois demos que aumentava um…1,2,3,4,5,5. Então nós partíamos do 1.º para o terceiro e chegamos à conclusão de quantos tínhamos em baixo…
Edu. – Nós aqui contamos mal…
Diogo – Porque aqui era três. (19.01.2011).

Observaram de imediato a tabela e concluíram:

c) Qual a área da figura 7? Como sabem?

R: A área é de 80. Sabemos porque fizemos: 8 +7 15 +9 24 +11 → 35 +13 48 +15 63 +17 80.

Fig. 18 – Resposta à questão 1.c)

No entanto, na resposta escrita, para explicar como sabiam qual era o valor da área da figura 7 escreveram a sequência do valor da área das diferentes figuras, mas não conseguiram apresentar uma explicação. Ou seja, no trabalho escrito não souberam apresentar argumentos capazes de explicar o seu raciocínio.

Edu – Para a próxima vai ser mais 15. 48 mais 15… […] 3 e 7 dá 10 tens daqui 2… 80. Agora para justificar vai ser bonito! […]
Edu – Agora temos que por aqui a explicar… [conversam baixinho]
Diogo – Pões aqui a conta… (19.01.2011)

Na questão 1.d) leram e interpretaram conjuntamente a questão e chegaram à solução por recorrência, tal como na questão anterior.

Apesar do Eduardo ter referido uma forma de contagem que lhes permitia calcular a área das figuras “a figura 2 tem duas completas, a 4 tem quatro….depois era mais uma incompleta e depois punha-se aquela que faltava em cima…”. No entanto, parece que teve receio de errar e preferiu completar o trabalho recorrendo sempre à figura anterior.

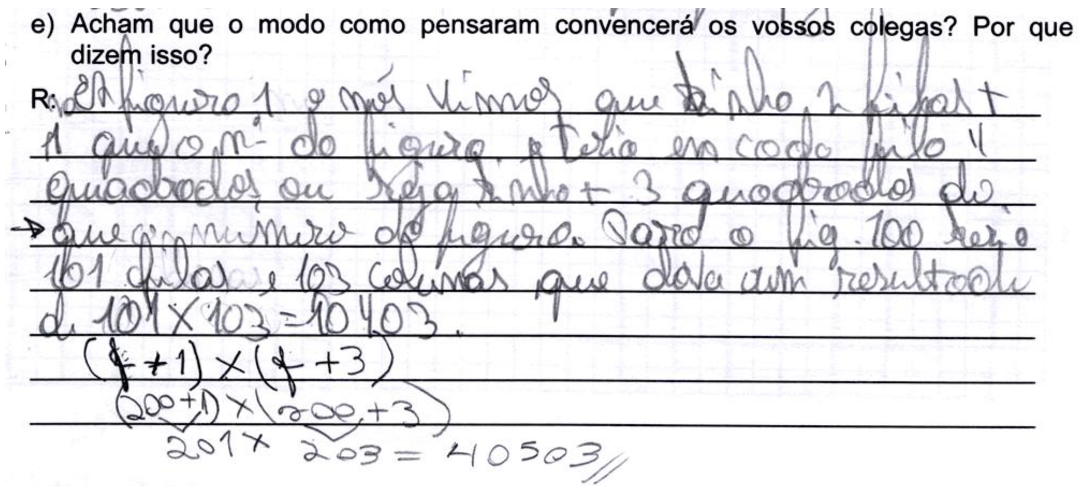
O diálogo em grande grupo permitiu que o par falasse sobre as outras formas de contagem a que tinham chegado mas que não tinham sido registadas. O Eduardo explicou à turma a forma como tinha chegado à solução inicialmente e que não tinha sido a opção do par. No entanto, a professora não sabendo de quem tinha surgido a forma de resolução, aceitou o pedido do Diogo e deixou-o desenhar e escrever no quadro a estratégia do Eduardo. Como se enganou, Luís aproveitou para sugerir “uma melhor” forma de resolução. Antes de questionar a turma sobre outros possíveis meios para chegar à solução e qual a melhor forma, a professora, devido ao escasso tempo para o termino da aula, solicitou a toda a turma para transcrever do quadro a resposta do Luís. O Diogo não ficou satisfeito com a resolução, fez-se ouvir e conseguiu expor à turma uma forma mais rápida, segundo ele, para chegar ao valor da área de qualquer figura. Pelo facto da professora ter solicitado que toda a gente passasse o raciocínio do Luís, o Diogo e o Eduardo apagaram a sua resposta e atenderam ao pedido da professora. No entanto, após o Diogo expôr o seu raciocínio à turma, pedi que se ele e o Eduardo estivessem de acordo e considerassem que era esse o raciocínio que lhes permitia obter o valor da área de qualquer figura com menos possibilidade de errarem e de modo mais rápido, que o registassem na alínea seguinte (e).

Inv. – Acham que conseguiam convencer os vossos colegas?
Diogo – Naquela altura tocou e claro, eles, disseram todos que sim!
Inv. – Pois, mas se não tocasse acham que eles iam dizer todos que sim!?
Diogo – Sim. Porque a minha resposta estava bem.
Edu – A do Luís também estava! Mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…
Diogo – A minha era mais fácil!
Edu – Se fosse outra figura, por ex. 200 era 201 e 203. (24.01.2011)

Mostrando assim que conseguiram compreender a questão. A resolução apresentada (ver fig. 1.2) está correta e resolveram autonomamente considerando todos os resultados que foram obtendo. Assim o par respondeu à questão por recorrência e baseados nos dados e nas regularidades detetadas. Através da observação das figuras, assim como das regularidades, conseguiram obter uma forma de generalizar, e posteriormente, com apoio da investigadora, escreveram uma expressão algébrica (24.01.2011).

Edu – N.º da figura mais …

Diogo – A fila tem mais 3 que o número da figura.
Inv. – Sabes qual é o n.º da figura?
Eduardo – É 100.
Inv. – De uma qualquer!
Edu – 3.
Inv. – Uma qualquer, não tem que ser necessariamente um nº. Algo que te permita substituir por um n.º qualquer. Como vocês na fórmula da área também não colocam! Escrevem o "c" para representar o valor do comprimento e depois substituem-no pelo comprimento que o retângulo tiver…
Edu – Pode ser o f para a fórmula!
Inv. – Pronto o f de fórmula… o f ficaria a representar o n.º da figura! Ao n.º da figura o que vocês somaram?
Diogo – 1 para as colunas e 3. […]
Inv. – Agora peguem na fórmula e substituam para uma qualquer figura que queiram…
Edu – 200!
Diogo / Edu – 201x203= 200x203+ 1x203= (40600+203=40803).
Diogo – 40503.


e) Acham que o modo como pensaram convencerá os vossos colegas? Por que dizem isso?

R: A figura 1 nós vimos que tinha 2 filas + 1 que o nº da figura e teria em cada fila 4 quadrados ou seja tinha + 3 quadrados do que o número da figura. Para a fig. 100 seria 101 filas e 103 colunas que dava um resultado de 101 X 103 = 10403.

$(f+1) \times (f+3)$

$(200+1) \times (200+3)$

$201 \times 203 = 40503$

fig. 19 – Resposta à questão 1.e)

Na entrevista foi-lhes pedido que voltassem a explicar o processo pelo qual chegaram à solução.

Edu. – A figura 100 disseste que dava 103… Assim uma coisa!
Diogo – Já não me estou a lembrar…
Inv. – Olhando para as figuras, já consegues?
Diogo – A figura 1 tinha mais um que o número da figura… escreve tu! [dizendo para o Eduardo]. […]
Diogo – Então eu vi que a figura 1 tinha duas filas, ou seja, mais uma que o n.º da figura. E teria em cada fila quatro quadradinhos, ou seja, mais três quadrados que o nº da figura.
Inv. – Agora dá o exemplo para a fig. 100.
Diogo – Tem 101 e aqui 103 que dava 10430! Eu lembro-me! Para a figura 100 tinha 101 filas…
Edu – Filas ou colunas?! […] N.º da figura mais …
Diogo – A fila tem mais 3 que o número da figura.
Inv. – Sabes qual é o n.º da figura?
Edu – É 100.
Inv. – De uma qualquer!
Edu – 3.
Inv. – Uma qualquer, não tem que ser necessariamente um nº. Algo que te permita substituir por um n.º qualquer. Vocês na fórmula da área do retângulo também não colocam?! Escrevem o

"c" para representar o valor do comprimento e depois substituem-no pelo comprimento que o retângulo tiver…

Edu – Pode ser o f para a fórmula!

Inv. – Pronto, o f de fórmula… o f ficaria a representar o n.º da figura! Ao n.º da figura o que é que vocês somaram?

Diogo – 1 para as colunas e 3. […]

Inv. – Agora peguem na fórmula e substituam para qualquer figura que queiram…

Edu – 200.

Diogo / Edu – 201x203= 200x203+ 1x203= (40600+203=40803)

Diogo – 40503. (24.01.2011)

E registaram,

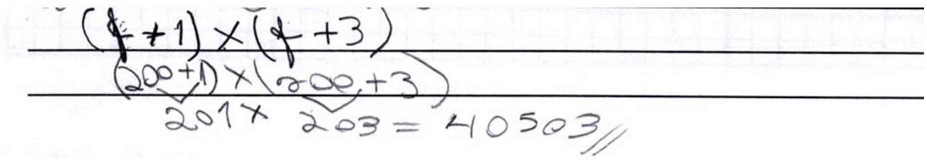


fig. 20 – Resposta à questão 1.e)

O argumento apresentado para justificar a estratégia é geral, válido, rigoroso, completo e, segundo o Diogo, só foi convincente porque "naquela altura tocou e claro que eles disseram todos que sim!". Segundo eles (24.01.2011),

Diogo – Sim. Porque a minha resposta estava bem.

Edu – A do Luís também estava mas tinha que se tirar um… e a do Diogo…

Diogo – A minha era mais fácil.

No trabalho escrito, apresentaram um raciocínio correto mediante o trabalho desenvolvido anteriormente e que consideravam que deviam registar que

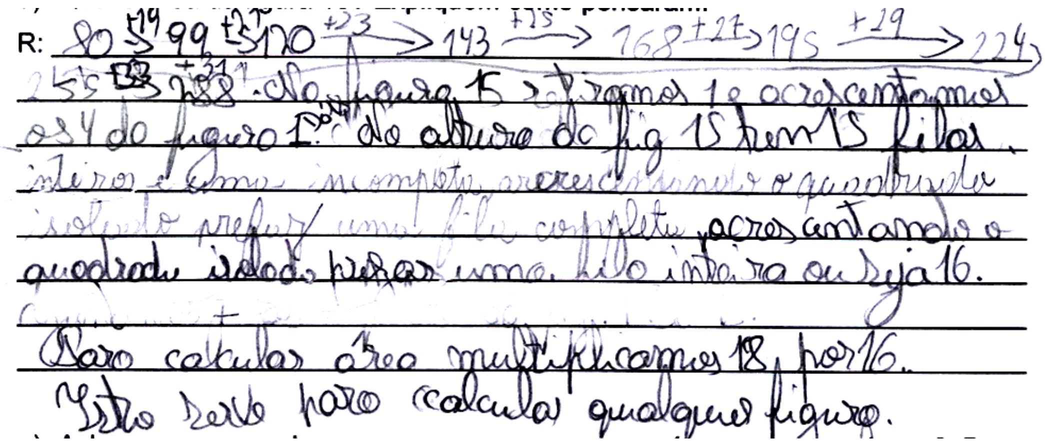


Fig. 21 – Resposta à questão 1.d)

Os argumentos apresentados pelo Diogo aparentemente foram convincentes porque conseguiu transmitir à turma o seu raciocínio de uma fora mais clara e simples que o Luís. A forma de visualização do Eduardo não foi transmitida com sucesso à turma, talvez pela dificuldade em expressar o seu raciocínio oralmente e este ser compreendido pelos colegas. Acrescendo ainda de um fator importante, quem foi completar a explicação ao quadro foi o Diogo e não o Eduardo.

Edu – A 2 figura tem duas completas, a 4 tem quatro….depois era mais uma incompleta e depois punha-se aquela que faltava em cima…
Diogo – Tem que ter 35.
Alex – A nossa tem 36!
Diogo – Acho que é melhor fazer as continhas…
Prof. – Alexandra só tem 30 ali?
(Dizem, 35, 36…)
Zé – Ó professora aquilo está mal…
Diogo – Já sei, já sei! Porque o n.º de quadrados da base está igual ao da figura 3. (19.01.2011)

Nesta tarefa de um modo geral o par conseguiu trabalhar de um modo colaborativo e a maioria das vezes verificavam se o que escreviam era compatível que o que tinham pensado.

Diogo – Vê na 4, vê na 4…
Edu – Está bem…
Diogo – 4 mais Sete.
Edu – 4 mais sete, não! 4x7 é 28 mais 7 dá …
Diogo – 28 mais 7 dá 35… dá Sete.

Em grande parte das respostas foram capazes de confirmar se o seu raciocínio estava correto aplicando a "regra" que tinham descoberta a figuras já construídas. Como se pôde ouvir,

Edu – 24 mais 11 são 35…agora confirmamos... [Contam os dois o número de quadrados da figura]
Diogo – Já temos outra maneira de contar… 9 , 11, 13… (19.01.2011).

Apenas, pontualmente, o faziam pela solicitação da professora ou da investigadora.

Inv. – Confirma com o número de quadrados que tinham dito?
Edu – Dá…
Diogo – Agora para aqui…
Inv. – Confirme, na figura 5.
Diogo – 1,2,3…9 –
Edu -1,2,3,4,5,6,7,8,9 (conta a fila menor mais o quadradinho isolado). 1,2,3,4,5 … 5x9=45, 6x9=54!
Diogo – Pois dá! Agora vamos à figura 7.

O Diogo e o Eduardo, por vezes, estavam-se a referir a formas de contagens diferentes, devido à forma de visualização da figura, sem se aperceberem disso. No entanto, conseguiram superar esse obstáculo, e resolver as questões, sem utilizar uma argumentação agressiva,

Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
Edu – 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? Põe aqui a folha… Temos que ver a sequência das figuras.
Edu – 4 e aqui já tem…
Diogo – Não! Aumenta em baixo duas!
Edu – E aqui tem 5, 2 e 6,3.
Diogo – Já sei como deve ser… aumentou um em baixo e aqui aumenta dois…
Edu – E ali também…
Diogo – Não, tem calma! Ai, deixa ver 4, 5, 6,7…hum hum.
Edu – Aqui aumentou um e ali aumentou dois.

Tendo o Eduardo registado apenas depois do par concordar e, até mesmo durante o desenho das figuras,

Edu – Então temos que desenhar 5! É, não é?
Diogo – É nada cinco, Eduardo? ….

Edu – Outra vez sete? Figura 1 tem aqui um, figura 2 tem aqui estes 2, figura 3 tem 3, a 4 também vai ter 4.
Diogo – Pois é… Bem pensado…

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi Bom. Mas surgiram raros momentos de argumentação agressiva, em que de certa forma queria ignorar o que o par lhe estava a dizer,

Edu – Filas ou colunas?!
Diogo – Filas!
Edu – Tu és teimoso…
Diogo – A professora está a entender-me! (24.01.2011)

Estiveram sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão e, por vezes, souberam ouvir-se, raciocinar e refletir.

Edu – E depois vemos se a figura 3 tem assim completas a 4 também vai ter! Esta vai ter 5, estás a ver? Vai ter 7 …
Diogo – Já reparaste a 3 tem três colunas com o mesmo número (refere-se a filas) mas depois vai ter menos… Pinta aí os quadradinhos que é melhor…
Edu – Deixa estar… a terceira vai mudar três porque é a terceira 1,2,3,4,5,6…
Prof. – Deixa lá isso Diogo, estás a perder tempo, anda lá!
Diogo – Agora tem que ser nove… tem calma… a três é…mais três seis…
Edu – Mais três nove.
Diogo – E depois cinco filas de nove… faz com cinco filas. Agora tivemos duas formas de fazer… […]
Diogo – Faz uma assim que é mais fácil e depois fazes uma com menos e está…
Edu – E depois temos que fazer a outra, na chaminé! […]
Edu – 1,2,3…10 mais cinco… 18 mais 6…
Diogo – Aqui tão seis 6x3 18 mais 6…dá 24.
Edu – Não.
Diogo – 12 mais 6 dá 18.
Edu e Diogo – 18 mais 6 … 18,19,20,21,22,23 e 24.

Ao longo desta tarefa este par teve algumas dificuldades devido a confusões nos conceitos de coluna e fila. No entanto, durante a resolução da tarefa não pareceu que tal representasse um grande obstáculo para a resolução da tarefa. Logo, no início da resolução da tarefa, o Eduardo começou a analisa-la enquanto que o Diogo ainda não estava concentrado no trabalho.

Edu – 1,2,3… Aqui aumenta 1.
Diogo – Tem calma, Eduardo! Olha aqui.
Edu - 1,2,3,4,5… Aqui aumenta um…
Diogo – Tem calma, tem calma… Posso ver? (19.01.2011).

Parece verificar-se que o Diogo e o Eduardo apresentam níveis de maturidade, envolvimento e reação à tarefa muito diferentes. O Diogo é um aluno empenhado, por vezes, fala antes de refletir bem e não tem receio de expor de forma instantânea o seu pensamento.

O Eduardo prefere refletir antes de expor o seu raciocínio, considerando-o por isso mais ponderado. Revela ter mais maturidade que o Diogo, como se pode ouvir em algumas situações na entrevista geral.

Edu. – Porque eu pensava que sendo duas ideias que ia funcionar melhor mas com este às vezes não dá para perceber!
Inv. – É?
Edu. – Também depende…
Diogo – Porquê? Sou assim tão mau?
Edu. – Algumas coisas és!
Diogo – Oh, não sou tão mau!
Inv. – Então era porque o Diogo não tinha calma o suficiente.
Edu. – Ia logo para a resposta… não me deixava responder!
Diogo – Era direto!
Inv. – Para trabalhares bem com o Diogo, ele tinha que ter um pouco mais de calma. Era?
Diogo – Vou ficar calado.
Inv. – Não é ficar calado que se resolve… Era um pouco mais calmo para o ouvires.
Edu. – Não, é assim ele… é assim… nós devíamos ser mais organizados porque dizíamos as ideias em simultâneo… e era um bocadinho isso.
Inv. – Era por causa disso, fazia-te um pouco de confusão.
Edu. – Acho que não era só isso… nesse dia não estava tudo bem.

Verificaram-se algumas dificuldades em colocar o seu raciocínio por escrito, principalmente ao nível da generalização. O diálogo em grande grupo revelou-se importante para que os alunos tivessem mais confiança e ganhassem coragem para expor as suas formas de pensar. Uma dificuldade deste par, que parece limitar o seu desempenho, é o não saber ouvir-se e ter calma o suficiente para ouvir o colega, pensar sobre o que ele disse e construir o seu argumento com base no raciocínio do colega.

Resolução da tarefa 7

Na questão 1.a) os alunos começaram por contar o número de pontos da base do triângulo 1, do triângulo 2, do triângulo 3 e, por último, do triângulo 4. Verificaram que existiam regularidade entre eles, permitindo-lhes desenhar os dois próximos triângulos. O Diogo verificou que "o número de pontos da base é mais um que o número" e o Eduardo acrescentou que "o número de pontos de cada lado do triângulo é mais um do que o número do triângulo".

Observaram corretamente as alterações entre as figuras desenhando corretamente as duas figuras seguintes. Demonstraram que interpretaram, compreenderam a questão e tentarem encontrar regularidades que lhes permitisse desenhar as duas figuras seguintes. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente a questão. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com base na sequência das figuras apresentadas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

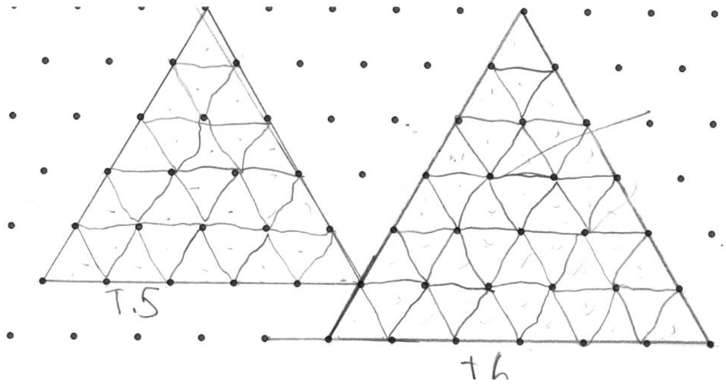


Fig. 22 – Resposta à questão 1 a)

Utilizando os conceitos de triângulo, área e unidade de área como se verificou pelo diálogo entre os dois alunos.

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das sequências e que as tarefas anteriores lhes tinham dado algum treino na visualização das regularidades. O que lhes permitiu relacionar o número do triângulo, com os elementos encontrados em cada uma das figuras. Tentaram encontrar alguma regularidade na sequência e diferentes formas de contagem que lhes permitisse desenhar as figuras seguintes sem dificuldades.

Na estratégia apresentada, houve organização. Iniciaram pela contagem do número de pontos da base e, posteriormente, em cada um dos outros dois lados do triângulo, o que lhes permitiu encontrar uma relação entre a sequência de triângulos e construir as outras figuras seguintes.

Na questão 1.b) interpretaram e compreenderam corretamente, permitindo-lhes assim preencher correta e autonomamente a tabela. O Diogo após a leitura do enunciado a primeira reação foi contar o número de pontos e a medida do perímetro para preencherem a tabela.

Triângulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
N.º de pontos na base	**2**	3	4	5	6	7
Perímetro dos triângulos	**3**	6	9	12	15	18

Fig. 23 – Resposta à questão 1. b)

Leram a questão seguinte que os induzia para observarem os números que representavam o número de pontos da base e, após pedirem apoio à professora para interpretarem o enunciado, responderam com base nos seus conhecimentos. No entanto, pareceu que tiveram dificuldades em transmitir o que tinham observado dando uma resposta com falta de rigor, como se pode observar pelo seu trabalho escrito.

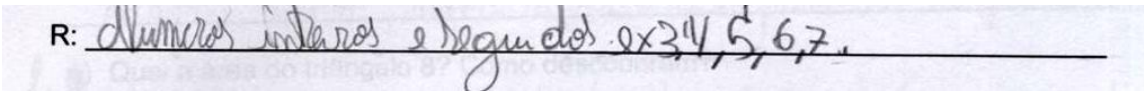

R: Numeros inteiros e seguidos 2,3,4,5,6,7.

Fig. 24 – Resposta à primeira questão da alínea 1. b)

Na entrevista, quando questionados sobre a sua resposta verificaram que o que disseram estava incompleto.

Inv. – Vocês referiram que são “números seguidos”. O que é isso de números seguidos?
Diogo – São números seguidos…
Edu – São números consecutivos mas não me lembrava da palavra.
Inv. – Não chega… mais…
Edu – Ah… inteiros.
Inv. – Ou seja, são números inteiros consecutivos. Agora falta dizer a partir de onde, qual a sua limitação! Caso exista. Aí podem ter limitação superior ou inferior?
Edu – Sim.
Inv. – Então são números inteiros consecutivos a partir de que número?
Edu – …do dois.
Inv. – Digam-me tudo como deviam ter escrito ai.
Diogo – São números inteiros e seguidos…
Edu – Estes são números inteiros positivos e consecutivos a partir a partir do dois.
Inv. – E perceberam tudo o que disseram?
Edu – Sim. Positivos, não é abaixo de zero; inteiros, é que não tem casas decimais e consecutivos quer dizer que são seguidos nessa sequência. (2.02.2011).

Na segunda pergunta da questão 1b) leram mas não conseguiram interpretar corretamente sem recorrer à ajuda da professora. No entanto, depois da professora ajudá-los a interpretar o que era pedido na questão e através da observação da tabela, conseguiram responder corretamente, mas sem explicar como pensaram. Como se pode verificar do seu diálogo durante o trabalho escrito (31.01.2011) e da resposta apresentada,

Diogo – O número de pontos da base é mais um que o número do triângulo.
Edu – O número de pontos de cada lado do triângulo é mais um do que o número do triângulo.

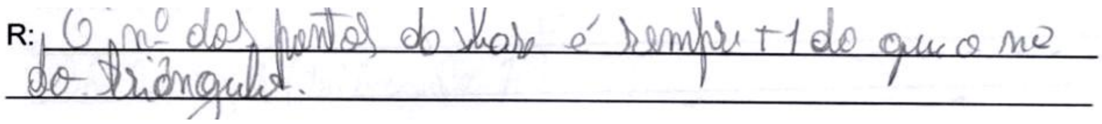

R: O nº dos pontos da base é sempre +1 do que o nº do triângulo.

Fig. 25 – Resposta à segunda questão da alínea 1 b)

Na questão 1.c), analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados da primeira fila com os da terceira fila da tabela.

O par relacionou de imediato que os números observados correspondiam a uma tabuada já conhecida, por isso apresentaram a seguinte resposta,

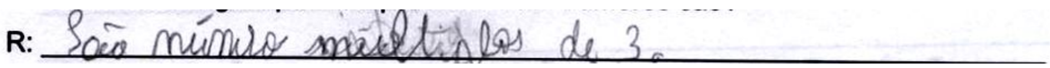

R: São números múltiplos de 3.

Fig. 26 – Resposta à questão 1 c)

Quando questionados sobre a razão pela qual colocaram que eram "os múltiplos de três", o Diogo disse "perímetro do triângulo… número da figura vezes três". Apresentando dois argumentos válidos para reforçar a sua resposta. Durante a entrevista foi possível explorar melhor a questão,

Inv. – Como concluíram que eram múltiplos de três?
Diogo – O perímetro dos triângulos?
Inv. – Sim.
Diogo – N.º da figura vezes 3.
Edu – 1x3 é 3; 3x2 é 6…
Inv. – Quais as características do triângulo que vos permitam fazer essa observação?
Edu – Características?
Inv. – Sim, o que é que o triângulo tem que vos permite dizer que o perímetro seja esse?
Edu – Porque tem três lados! […]
Inv. – Concordas Diogo?
Diogo – Concordo.
Inv. – Se vos pedisse para calcular o perímetro de um triângulo de uma ordem qualquer como fariam?
Diogo – Tabuada do 3. […] Se for o 100 é 3x100.
Edu – Não, 100 mais 99 mais 98.
Inv. – Confirma na figura 5…
Edu – 4, 4,4.
Diogo – 4,4,4.
Edu – Não, 4,4,3!
Inv. – É?
Diogo – É nada!
Edu – Então é 100, 100 e 99.
Diogo – 4,4,4.
Edu – Não, 4,4,3.
Diogo – Olha… 4,4,4.
Edu – 1,2,3,4 e este já está!
Diogo – E este aqui? Eu conto….
Edu – Mas eu não conto assim! 1,2,3,4,5 – 1,2,3,4 – 1,2,3.
Diogo – Mas porque não juntar tudo a 4?
Edu – Não sei!
Inv. – Então vamos fazer uma coisa. Eduardo, tu vais calcular da forma que queres e o Diogo da forma que quer para a figura número 100. E depois verificamos se esse modo de contagem da para a figura número 100.
Diogo – [imediatamente] 3x100 300.
Edu – 100, 100, 99. Não. Sim: 100,99,98.
Diogo – Não 101, 100,99.
Edu – Está calado.
Inv. – No triângulo 100? Quantos tem na base?
Edu – Aqui tem 1, 2, 3, 4, logo aqui tem 99.
Inv. – E qual é o n.º do triângulo?
Edu – É o 4!
Inv. – E tu começaste por contar quantos?
Edu – 5.
Inv. – Então…
Edu – Então dá 101!
Inv. – Segundo a tua forma seria?
Edu – 101, 100, 99.
Inv. – E a tua?
Diogo – 100, 100, 100.
Inv. – Qual é o calculo mais rápido?

Edu – É o dele.
Inv. – Porque apenas…o que se tem que fazer?
Edu – 100 mais 100 mais 100.
Diogo – Multiplicar. […]
Inv. – Agora qual vai ser o perímetro de um triângulo de ordem qualquer, por exemplo n.
Edu – Mas eu não sei quanto tem de lado!
Inv. – É n!
Diogo – Já sei! Contamos os da base…
Edu – É!? E quanto tem a base?
Diogo – n!
Edu – O n tem 2! (assemelha à figura da letra).
Diogo – Dois?!
Inv. – n vai ser uma ordem qualquer de um triângulo. Como calculo o perímetro para essa figura?
Edu – É um triângulo?
Inv. – É.
Edu – Lado mais lado mais lado.
Inv. – Mas nós dissemos que era n.
Diogo – Perímetro….
Inv. – Explica Diogo.
Diogo – O triângulo n é que em vez de ter o três vai ter o n.
Edu – Ah, já sei!
Inv. – Então como fica o triângulo n?
Diogo – l+l+l.
Inv. – Mas é n de lado!
Edu – n+n+n.
Inv. – Ou?
Diogo e Edu [em coro] – 3xn!
Inv. – Estão convencidos? E se me quisessem convencer que isso estava correto?
Edu – É que o perímetro é a soma de todos os lados!
Inv. – E mais.
Edu – O triângulo tem três lados.
Inv. – Sim e mais?
Edu – n é a medida do lado.

Com as questões orientadoras da investigadora, além de conseguirem explicar melhor o seu raciocínio também foram capazes de generalizar apresentando uma expressão algébrica para calcular o perímetro de um triângulo qualquer da sequência.

Na questão d) pretendia-se que os alunos relacionassem o número da figura com o número de pontos de cada lado do triângulo. Nesta questão responderam autonomamente sem apresentar qualquer dúvida e de forma concordante entre o par. Pela resposta escrita apresentada parece que interpretaram e compreenderam corretamente, como se pode verificar.

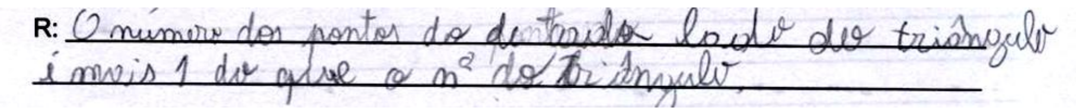

R: O número dos pontos do de cada lado do triângulo é mais 1 do que o nº do triângulo.

Fig. 27 – Resposta à questão 1. d)

No entanto, não explicaram o modo como verificaram a regularidade apresentada.

Na questão 1. e) interpretaram e compreenderam corretamente, permitindo-lhes assim preencher correta e autonomamente a tabela. Na parte da interpretação do enunciado a primeira reação do Diogo foi “como se calcula a área do triângulo?” mas logo concluiu que “ah, já sei! Pegamos na área deste triângulo e vemos em cada um quantos tem”. Enquanto que o Eduardo ficou com algumas reservas se assim seria e, para esclarecer, acharam necessário perguntar à professora.

Diogo – Ui… como se calcula a área do triângulo?... Ah, já sei! Pegamos na área deste triângulo e vemos em cada um quantos tem. Já estás a entender?
Quantos triângulos 1 tem em cada figura.
Edu – Não sei se é.
Diogo – Professora.
Edu – Não sei se é!
Diogo – Eu já entendi mas o Eduardo está com dúvidas. Uma unidade de área é quantas vezes cabe em cada um. Não é?
Prof. – Exatamente.
Edu – Então como vai ser.
Diogo – Eu faço com o lápis. (31.01.2011).

Após a confirmação, por parte da professora, que a interpretação do Diogo estava correta ele dividiu os triângulos em triângulos iguais ao da unidade de área,

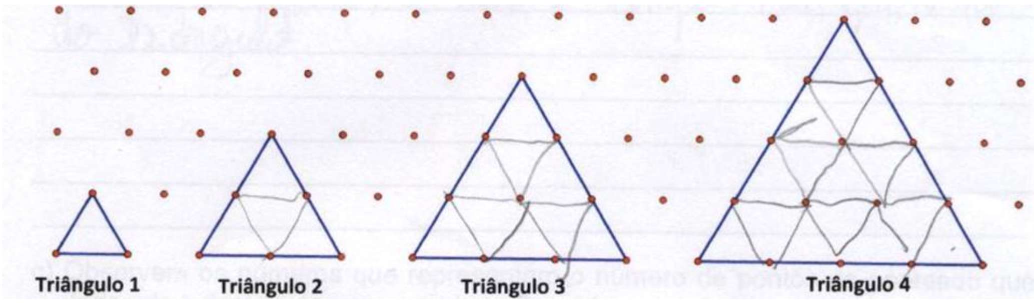


Fig. 28 – Divisão dos triângulos em triângulos iguais ao da unidade

De seguida contaram o número de triângulos existentes em cada triângulo e preencheram a tabela.

x1 x2 x3 x4 x5 x6

Triângulo	1	2	3	4	5	6
Área do triângulo geral	1	4	9	16	25	36

3+ 5+ 7+ 9+ 11+

Fig. 29 – Tabela da questão 1. e)

Posteriormente, quando tinham contado a área de cada um dos triângulos, leram a questão seguinte que os induzia para observarem os números que representavam o número de pontos da base. Responderam corretamente com base nas imagens observadas e nos seus conhecimentos. No entanto, pareceu que tiveram dificuldades em transmitir o que tinham observado, dando uma resposta com falta de rigor, como se pode observar pelo seu trabalho escrito.

Edu. – 8x8.
Diogo – Professora, encontramos uma fórmula.
Prof. – Foi assim que completaram a tabela e descobriram a área para a figura 8?
Diogo – Não, nós é que reparamos agora, mas já tínhamos completado.
Edu. – Faz isso.
Diogo – A área do triângulo 8 é 64. Porque nós reparamos que o número da figura multiplicado por ele mesmo daria um certo resultado. E não se preocupem porque testamos com todos os outros triângulos e dava certo …

O Diogo, observando esses números, verificou que os números obtidos na área de cada triângulo era o resultado de multiplicações especiais, dizendo “1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6, 7x7…” e exclamou “somos magos” (31.01.2011). O Eduardo disse-lhe “é a tabuada!”. O Diogo como parecia que não sabia como transmitir o que eram aquelas multiplicações pediu ao colega que escrevesse. Como se pode verificar pelos na sua resposta.

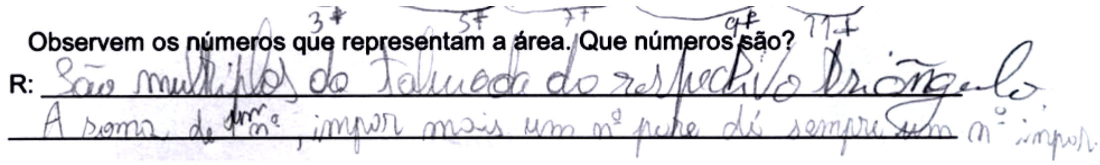


Fig. 30 – Resposta à primeira questão da alínea 1. e)

Apresentaram uma resposta com alguma falta de rigor “tabuada do respetivo triângulo”. Parecendo aqui que tiveram grandes dificuldades na linguagem matemática e, como tal, dificultou-lhes a transmissão do raciocínio para o trabalho escrito. Ou seja, no trabalho escrito não souberam apresentar corretamente os argumentos que lhes permitiam explicar com rigor o seu raciocínio. Na entrevista, com a ajuda de uma série de questões orientadoras conseguiram concluir que,

Inv. – Escreveram: “São números da tabuada do respetivo número”. Não percebi o que querem dizer com isto?
Diogo – Aqui?
Inv. – Sim.
Edu – 1x1 dá 1.
Diogo – 2x2 dá 4…
Inv. – Não me podem dizer isso de outra forma?
Diogo – Multiplicando o respetivo número pelo mesmo.
Inv. – “Para dar o resultado certo”. O que entendem por resultado certo? Como têm a certeza?
Edu – Nós reparamos que o número da figura 1 dava um certo resultado e testamos nas outras figuras e dava certo!
Inv. – Não percebi?!
Diogo – 8x8 é 8.
Inv. – Como?!
Diogo – 64.
Edu – 62. Ai não, 64!
Diogo e Edu – 2x2 4; 3x3 9; 4x4 16…
Inv. – O que vocês estão a calcular?
Edu – A área!
Inv. – A área de que triângulo?
Diogo – 8.

Inv. – A área do triângulo que estávamos a calcular…
Diogo – A resolver.
Inv. – Na h porquê?
Edu – Está certo…
Inv. – Onde testaram? Foi nas questões?
Diogo – Questões, perguntas…
Inv. – Foi?!
Edu – Foi. Na 8 e na 30!
Inv. – Ou foi noutras coisas que vocês foram testar? Onde testaram?
Edu – Na tabela. […] Nos gráficos.
Inv. – A tabela foi construída a partir de onde?
Diogo – Da área do triângulo.
Edu – Da área do triângulo.
Inv. – E vocês foram buscar onde? Testaram onde?
Edu – Nos triângulos.
Inv. – Nos triângulos, é?!
Diogo – Sim.
Inv. – Então já me sabem dizer como dar …
Diogo – Porque nós testamos… (2.02.2011).

Na questão 1.f), no trabalho escrito, leram e interpretaram conjuntamente a questão e chegaram à solução por recorrência. Também conseguiram encontrar uma regra geral para saber a área de qualquer triângulo da sequência ao que o Diogo designou por "fórmula". Antes desta questão, quando estavam a analisar a tabela, observaram que ia ser "1x1, 2x2, 3x3, 4x4…". Assim, quando questionados sobre a área do triângulo 8, responderam de imediato 8x8, apresentando a seguinte resposta escrita,

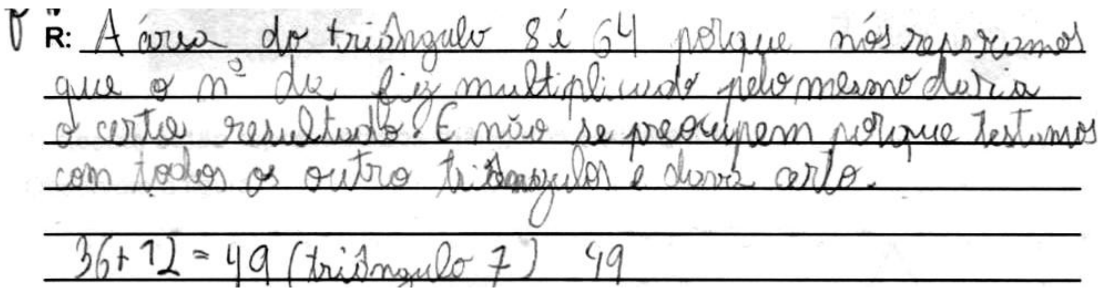

R: A área do triângulo 8 é 64 porque nós reparamos que o nº de fiz multiplicado pelo mesmo dava o certo resultado! E não se preocupem porque testamos com todos os outro triângulos e dava certo.
36+13 = 49 (triângulo 7) 49

Fig. 31 – Resposta à questão 1 f)

Verificando-se que tiveram a preocupação de escrever que a "fórmula" por eles encontrada era geral: "testamos com todos os outros triângulos e dava certo". Antes do Diogo a escrever, disse-a em voz alta e o Eduardo preveniu-o "escreve uma resposta convincente". Na última linha da resposta escrita encontra-se a confirmação da resposta por recorrência, visto que tinham os triângulos desenhados até ao 6. Mostrando assim que conseguiram compreender. A resolução apresentada (fig. 31) está correta e efetuou-se considerando todos os resultados que foram obtendo. No entanto, os argumentos apresentados não estão muito claros.

O argumento apresentado para justificar a estratégia é geral, válido, mas não totalmente rigoroso e completo. Parece que o Diogo quis transmitir que a resposta apresentada era convincente por ter dito e escrito “não se preocupem porque testamos com todos os outros triângulos e dava certo”. Não apresentando exemplos do que se estavam a referir ao dizer “testamos com todos os outros”. Ao serem interpelados para esclarecerem o que queriam dizer, o Diogo e o Eduardo achavam que estava tudo bem explicado e nem estavam a ver muito bem o que podiam explicar melhor. Segundo eles (2.02.2011),

> Diogo – Aqui?
> Edu – 1x1 dá 1.
> Diogo – 2x2 dá 4…
> Inv. – E não me podem dizer isso de outra forma?
> Diogo – Multiplicando o respetivo número pelo mesmo.
> Inv. – “Para dar o resultado certo”, o que entendem por resultado certo? Como têm a certeza?
> Edu – Nós reparamos que o número da figura 1 dava um certo resultado e testamos nas outras figuras e dava certo! […]
> Diogo – Porque nós testamos… (2-02-2011)

Os argumentos apresentados pelo Diogo ao grande grupo aparentemente foram convincentes porque conseguiu transmitir à turma o seu raciocínio que o seu modo de resolução era mais simples e rápido que o dos seus colegas que resolveram por recorrência. Na questão g),

> Diogo – [Lê a questão e escreve a área do triângulo 30]
> Diogo e Edu – 30x30.
> Diogo – 900.
> Edu – Tu és maluco. 3x3.
> Diogo – Ah, estás a ver como eu sei!
> Edu – Ah, ah, ah!
> Diogo – 30x30 é 900. Ah ya, agora nem precisamos de escrever muito. Pensamos da mesma maneira que na alínea anterior. […]
> Diogo – Vais pôr a minha resposta? […]
> Diogo – Vais pôr?
> Edu – Tem calma! (31.01.2011).

No trabalho escrito, apresentaram um raciocínio correto mediante o trabalho desenvolvido anteriormente e que consideravam que deviam registar que

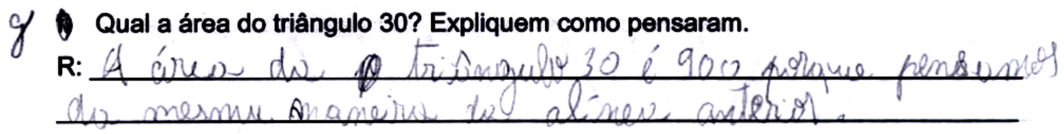

g) **Qual a área do triângulo 30? Expliquem como pensaram.**
R: A área do ~~o~~ triângulo 30 é 900 porque pensamos da mesma maneira da alínea anterior.

Fig. 32 – Resposta à questão 1 g)

Os argumentos apresentados pelo Diogo aparentemente foram convincentes porque conseguiu transmitir à turma o seu raciocínio de uma fora mais clara e simples que a restante turma. O par esteve em concordância não existindo necessidade de recorrer à argumentação colaborativa para encontrar o melhor raciocínio para resolver a questão.

Na questão h) eles escreveram que convencia com base na verificação do seu raciocínio nos outros triângulos, ficando assim esclarecidos,

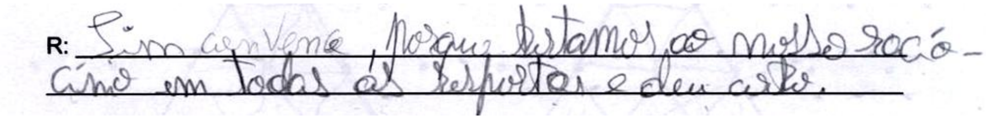

R: Sim convence, porque testamos o nosso raciócino em todas as respostas e deu certo.

Fig. 33 – Resposta à questão 1 a)

O par esteve sempre envolvido na tarefa só após a questão g) começaram a brincar um pouco mas terminaram a conversa no final da tarefa sem ser necessária a repreensão por parte do professor.

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi médio. Houve momentos em que resolveram a questão simplesmente por acumulação de factos.

ANEXO F – PAR B

Resolução da tarefa 2

Na questão 1 os alunos construíram retângulos utilizando 14 palhinhas demonstrando assim que interpretaram, compreenderam a questão. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte do professor ou do investigador. No entanto, na questão seguinte, pareceu que não era claro que o número de palhinhas que delimitavam o retângulo correspondia ao seu perímetro. A dúvida no significado de parte do enunciado “uma palhinha de lado” deu origem ao par discutir se as 14 palhinhas corresponderiam às 14 unidades de perímetro ou não.

Consideraram todos os dados porque construíram sempre retângulos e com 14 palhinhas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

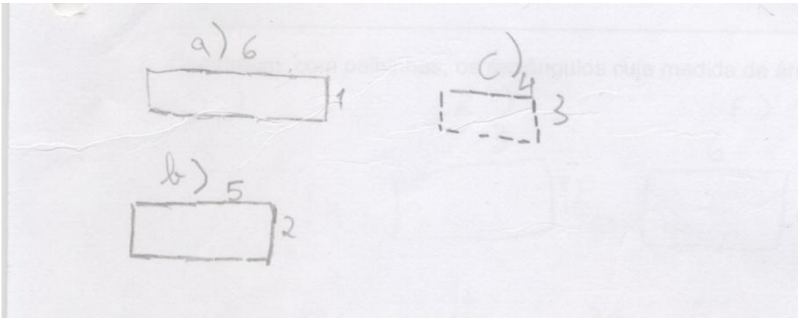


Fig. 1 – Resposta à questão 1

Utilizando intuitivamente os conceitos de retângulo, perímetro, comprimento e largura, como se pode depreender pela sua forma de construção, o diálogo entre os dois alunos, iniciou logo por “1, 6; 2, 5; 3, 4” sem qualquer discussão entre os elementos do par ou apresentação de qualquer dúvida.

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das relações entre o comprimento e a largura, permitindo-lhes manter a construção com 14 palhinhas. Nos três retângulos construídos, os dois comprimentos eram iguais, assim como, as duas larguras. Isto porque o Zé, imediatamente após ler o enunciado, referiu,

> Zé – Então é 6 no comprimento e 1 na largura.
> [contam enquanto colocam as palhinhas e depois desenham]
> Este é o A, está bem?
> Luís – Sim. Agora é o 5, 2. (o Zé constrói com as palhinhas)
> Zé – 5, 2, não é?
> Luís – Sim. Agora é o 4, 3.
> Zé – Hum, hum. (17.01.2011).

Na estratégia apresentada houve organização desde o primeiro retângulo. Iniciaram pela construção com maior comprimento e menor largura e daí é que foram alterando para as restantes.

> Inv. – O que aconteceu ao comprimento e à largura? Do primeiro retângulo o que fizeram para construir o segundo?
> Luís – Subimos à largura e descemos ao comprimento.
> Inv. – E para a terceira?
> Zé – Descemos mais à largura e subimos ao comprimento. (18.01.2011).

Primeiro pensaram como poderiam construir um retângulo com as 14 palhinhas e depois confirmaram com as palhinhas. Para os restantes retângulos já não recorreram às palhinhas, passando de imediato para o desenho. Nesta questão desenharam os três retângulos, como solicitado. No entanto, eles consideraram que tinham desenhado o número máximo de retângulos necessários.

> Inv. – E se vocês continuassem a fazer?
> Luís – Ia dar igual a esta, esta igual a esta e esta igual a esta mas só que ao contrário.
> Inv. – Conseguem dizer quantos retângulos era possível construir com 14 palhinhas?
> Zé – 3. (entrevista 18.01.2011).

Consideraram que os restantes retângulos que poderiam construir eram congruentes.

Nas questões 2 e 8 interpretaram e compreenderam corretamente após esclarecerem, entre si, os conceitos de comprimento, largura, área e perímetro. Utilizando esses conceitos e as propriedades matemáticas da multiplicação e soma conseguiram preencher correta e autonomamente as tabelas.

No entanto pareceu que o Zé tinha dúvidas se o número de palhinhas utilizadas correspondia ou não ao perímetro.

> Luís – Se é para por 14 palhinhas tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro.
> Zé – Não é nada!
> Luís – Mas se temos 14 palhinhas…
> Zé – Não, não…
> Prof. – Estão totós! Quantas palhinhas utilizaram?
> Zé – Se tem 14 palhinhas tem 14 de perímetro. Mas não é para por mais nada?! (17.01.2011).

Ao lerem o enunciado da questão 2 (o Zé lê a questão 2 e volta a ler) surgiram-lhe dúvidas,

> Zé – 1 palhinha é 1 unidade de comprimento?! Professora Joana! Não estamos a perceber isto!
> Luís – Unidade do quadrado com uma palhinha de lado?!
> Inv. – Cujo lado tem o comprimento de uma palhinha.
> Luís – Ao lado?
> Inv. – O lado…
> Luís – Isto é mais retângulo!
> Inv. – Mas dentro desse retângulo quantos quadrados vocês podem ter? Para construir esse retângulo quantos quadrados com uma palhinha de lado precisam.
> Luís – 6. Aqui era 1, 2, 3, 4, 5, 6.
> Inv. – Então, considerando o quadrado com uma palhinha de lado como unidade de área quantos precisavam para construir este retângulo?

Luís – 6.
Zé – 6.
Luís – Comprimento 6 e largura 1.
Zé – Para a área é 6. Não é?
Luís – É! (17.01.2011).

Apesar de saberem a fórmula da área do retângulo (como transparece no diálogo que se segue), leram integralmente o enunciado e tentaram interpretá-lo, esclarecer as dúvidas e só depois passaram para a resolução.

Luís – E a área?
Zé – Já estamos na 3.
Luís – Área é comprimento x largura.
Zé – Deixa estar assim que está bem.
Luís – Lembra-te da outra vez a professora ter dito… O que é a área? É comprimento vezes largura.
Zé – E o que é que tem?
Luís – 4x3… 12 de área. (17.01.2011)

Evidenciando-se tal facto na questão 8 porque não tiveram dúvidas em como calcular o perímetro e a área, apenas surgiram dúvidas se as letras A, B e C que estavam escritas na tabela se referiam aos retângulos desenhados na figura 1. Como se pode verificar durante a resolução da tarefa:

Zé – É para calcular o A, B, C como está a trás?
Luís – Outra vez?!
Zé – Não, estas são D, E, F.
Luís – Sim.
Zé – Diz qual é o comprimento de A? Comprimento de A!
Luís – Comprimento de A é 6;1;6;1; 6, 14.
Zé – Outro.
Luís – 5, 2, 10, 14.
Luís – C 4,3, 12, 14. Agora, comprimento 9, 4, 4 e área 36 e o perímetro…
Zé – O perímetro não, que agora não interessa. O comprimento do E!
Luís – 3. Agora tens que pôr o perímetro.
Zé – O perímetro agora…
Luís – Luís agora tens que por o perímetro. 9, 9 18… 26.
Zé – Espera aí. Faz antes tu esta conta que eu faço esta.
Luís – 26.
Zé – 26?
Zé – humhum.
Luís – Aqui dá 30.
Zé – 30. 6+6…
Luís – 6x4 é 24. Já está! (17.01.2011).

Apesar de lerem o enunciado e de terem conhecimento que a cada unidade de área corresponde “o quadrado cujo lado tem o comprimento de uma palhinha” ao preencherem a tabela não recorreram a tal dado. Partindo desde o primeiro momento, para o cálculo da área utilizando a fórmula “comprimento vezes largura”. Na questão 4 não parecem ter dúvidas de que para calcular a área do retângulo é mais rápido pela fórmula.

Luís – 4x9, também dá.
Zé – Esse já está! É o mesmo que 9x4.
Luís – Estás a ver mal…

Zé – Tu é que estás a ver mal…
Luís – Eu é que estava a ver aqui uma coisa. É 1!? 1x 36?
Zé – Esse dá [confirma] (17.01.2011).

Na questão 3, analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados iniciais com os resultados que foram obtendo das alíneas anteriores. Observando a tabela, o Luís concluiu que o perímetro era 14, no entanto o Zé considerava que se devia fazer algum cálculo.

Luís – Se é para pôr 14 palhinhas, tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro.
Zé – É igual ao outro.
Luís – Se é para pôr 14 palhinhas tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro.
Zé – Oh professora, professora.
Zé – Professora. Oh professora Joana! Não estamos a perceber a 3.
Luís – Não sabemos se está bem.
Luís – Mas se temos 14 palhinhas tem que ter 14 de perímetro.
Zé – Não, não é nada.
Luís – Vai ter obrigatoriamente 14.
Zé – Não, não.
Prof. – Quem chamou?
Zé – Fomos nós! Não estamos a perceber esta.
Prof. – Estão totós! Quantas palhinhas utilizaram? O que podem dizer acerca do perímetro dos retângulos. O que podem dizer? … A primeira coisa!
Zé – São todos iguais.
Prof. – Qual foi a primeira coisa em que pensaram?
Luís – Se tem 14 palhinhas tem 14 de perímetro.
Zé – Não professora, nós pensávamos que era para fazer um cálculo… Mas não é para pôr mais nada?!
Prof. – Ah!? (17.01.2011).

Apresentaram uma resposta escrita com algum rigor porque relacionaram o perímetro com o número de palhinha, lendo-se: "Todos os retângulos têm 14 de perímetro. Se temos 14 palhinhas o perímetro é 14". Podendo-se analisar como sendo uma explicação completa.

Na questão 4 leram e interpretaram conjuntamente a questão,

Zé – O que pensamos acerca da área dos retângulos?
Luís – Acerca da área é o comprimento vezes largura!
Zé – Os retângulos são todos diferentes.
Luís – São todos diferentes.
Zé – São todos diferentes, pronto.
Luís – Multiplicamos comprimento vezes a largura.
Zé – M-U-L-T-I-P-L-I-C-A-M-O-S [escrevem]… (17.01.2011)

Mostrando assim que cada um dos elementos fez uma interpretação diferente do que era solicitado, no entanto, consideraram ser necessário registar as duas. O Luís quando interpelado, continua a mostrar que não compreende o que é pedido na questão.

Inv. – Na questão 4 vocês disseram que obtinham "multiplicando o comprimento pela largura".
Zé – Para fazer com quadrados.
Luís – Aquilo dos quadrados estava a ver o que dava por ali eu como sabia que o comprimento largura também dava…

Inv. – O que a questão pedia era o que podiam dizer acerca da área do retângulo e não é como calculam… vocês pegavam na tabela que tinham construído anteriormente e analisavam o que acontecia à área do retângulo.
Luís – Quando o comprimento é mais grande e a largura é menor a que tem menos área. (18.01.2011).

A resolução apresentada (figura 2) está parcialmente correta e efetuou-se autonomamente considerando os resultados que foram obtendo. O seu Zé considerou que era necessário escrever, "eram todas diferentes" para responder à questão. O Luís considerava que o que podia dizer acerca da área era como a calculava, "comprimento vezes largura" (Luís). O Zé concordou e responderam à questão por acumulação de factos.

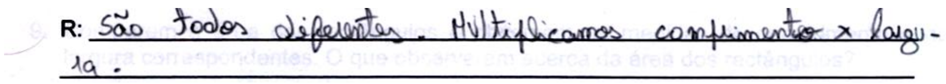

R: São todos diferentes. Multiplicamos comprimento x largu-ra.

Fig. 2 – Resposta à questão 4

Nesta questão não explicam como pensaram, apenas referem como calcularam.

Na questão 5 leram, interpretaram e compreenderam corretamente.

Zé – Considerando o retângulo.
Luís – O que tem menor largura é o que tem… O que tem maior comprimento e menor largura é o que tem menos.
Zé – É a A. É a A
Luís – Sim, é a A.
Zé – É a A.
Luís – É a A porque é a que tem menor área.
[os dois concordam e repetem: porque tem maior comprimento e menor largura.]

Consideraram os retângulos construídos e registaram que, "É o retângulo A. Porque é o que tem maior comprimento e menor largura.".

Na questão 6 pretendia-se que verificassem se o que escreveram se podia ampliar e generalizar. O Zé imediatamente após ter lido a questão pediu à professora,

Zé – Oh professora pode-nos dar uma ajudinha?!
Luís – Ó professora pode-nos…. dar mais algumas? (17.02.2011).

No trabalho escrito, apenas verificaram para o caso de 20 palhinhas, "se fizermos 18, 1,1, 18 18+1 19, mais 1, já dá 20. Já dá! 9, 9, 1,1. Também dá!" (Luís, 17.01.2011).

Tendo registado apenas "É válido", revelando que não foram capazes de registar nem de explicar o seu raciocínio, apenas verificaram a sua resolução para 20 palhinhas. No entanto, no diálogo da sala de aula, é possível verificar que interpretaram e compreenderam parcialmente a questão.

Ao ser-lhes solicitado que respondessem qual a área maior e menor para 20 e 30 palhinhas,

Inv. – Qual é o que tem menor área? O que acontece entre a medida do comprimento e da largura?
Zé – Maior o comprimento e menor a largura.

Inv. – E se fosse ao contrário?
Zé – Era igual 3x4 ou 4x3 dá 12.
Inv. – Então tem que haver uma particularidade para aquela figura ter a maior área.
Zé – Sim.
Inv. – O que acontece aos números?
Luís – Estão quase a fazer o mesmo número. E estão quase a fazer os mesmos números e a trocar de posições!
Inv. – O que entendes por "quase a fazer o mesmo número"?
Luís – Porque este aqui tem 4 vai fazer 3 e esta aqui tem 3 e vai fazer 4… vão trocar de posições.
Inv. – O 3 e o 4 não têm nenhuma relação? 2,5; 3,4…
Luís – Fazem todos a metade do perímetro. Porque o comprimento do perímetro é 14 e metade é 7.
Inv. – Gostava que reparassem a distância entre os números.
Zé – Quanto mais próximo são maiores, se estiverem os números maior será a área
Inv. – Experimentem isso para o caso de 20 palhinhas. Qual será o retângulo que vocês acham que seriam as medidas do retângulo de maior área?
Luís – 9,9,1,1.
Inv. – Concordas? Esse seria o que tem maior área?
Zé – Não, esse é o que vai ter menos área.
Inv. – Porquê?
Zé – É como eu estava a dizer se estivessem mais perto seria maior e o 9 e o 1 estão muito longe!
Inv. – Então qual seria a maior?
Luís – É ao contrário.
Inv. – Estás a dizer que o Zé tem razão?
Luís – Sim, de largura terá o 1 e o 9. Ai não, não. Será entre o 6 e o 4.
Inv. – Tens a certeza?
Luís – O mais aproximado era o 5, mas…
Inv. – E o 5 não pode ser?
Luís – Pode, um quadrado é um retângulo.
Inv. – E com 18 palhinhas?
Luís – Não dava.
Inv. – Não dava porquê?
Luís – Porque não temos números iguais.
Inv. – E se pudesses partir as palhinhas. Já dava?
Luís – Assim já dava.
Inv. – E como ficava?
Luís – 4 e meio para cada um. […]
Inv. – E com 30 palhinhas? Se não pudessem partir ao meio. […]
Luís – Obtínhamos 56.
Inv. – Então a maior área seria o retângulo que tivesse quanto de comprimento e quanto de largura?
Luís – 8x7 ou 7x8.
Inv. – Zé, concordas?
Zé – Sim, agora concordo. Para achar a maior área tínhamos que partir as palhinhas. (18.01.2011)

Para a menor área, o Zé disse que as dimensões deviam ser, 9 de largura e 1 de comprimento e o Luís concordou. Para obter a área máxima, o Zé considerou quase de imediato que as medidas deviam ser mais próximas (como se pode ler na entrevista) mas o Luís teve algumas dificuldades na generalização. O Luís foi convincente ao ponto de no final o Zé já achava que não podiam pôr o resultado 8 no comprimento e 7 na largura ou 7 no comprimento e 8 na largura porque comprimento e largura não eram iguais!

Na questão 7 interpretaram e compreenderam corretamente a tarefa considerando todos os dados e relacionando-os com os resultados que iam obtendo.

Luís – De área 36. Espera aí.
Zé – Já sei! É 9x4.
Luís – Não, não dá.
Zé – Dá, dá. [Contam e desenham… 4x9]
Zé – Pela tabuada que só tenha números pares. Tabuada do 2. Professora podemos fazer o 2x 13?
Prof. – Achas? Não sei...
Zé – 13x2…
Luís – 13x2, não dá! (fazem os cálculos)
[Discutem os dois] – Não… três vezes doze é que dá!
Zé – Assim?
Luís – Sim. [O Zé confirma fazendo as multiplicações.] 4x9, também dá.
Zé – Esse já está! É o mesmo que 9x4!
Luís – Estás a ver a mal…
Zé – Tu é que estas a ver mal…
Luís – Eu é que estava a ver aqui uma coisa… E um!? 1x 36?
Zé – Esse dá! [confirma]. (17.01.2011).

Apresentando no final, no trabalho escrito, cinco retângulos não congruentes.

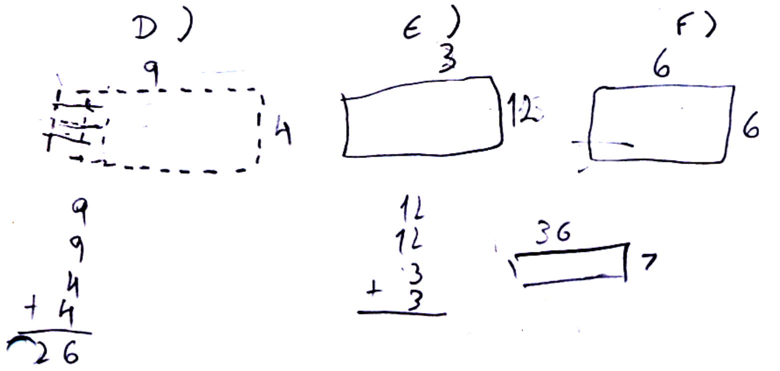


Fig. 3 – Resposta à questão 7

A estratégia de resolução foi procurar aleatoriamente números inteiros positivos que multiplicados entre si desse 36. O Zé chegou a pensar que tinha que encontrar algum número na tabuada do 2 mas como o produto que lhe surgiu foi o “2x13” e o par verificou que não dava 36, alteraram-no para “3x12”. Deixando assim a estratégia com que iniciaram a resolução.

Na questão 9 interpretaram e compreenderam-na, no entanto apenas consideraram alguns dados. O par responde, considerando apenas a medida da área e não observa as relações existentes entre “as medidas do comprimento e da largura correspondentes”, como é solicitado no enunciado. Resolvendo corretamente parte da questão utilizando a ajuda da professora, tenso registado “a área é sempre igual”. Existiram argumentos do Zé e da professora que pareceram não convencer totalmente o Luís. Devido ao contexto envolvente e à intervenção da professora foi registado o que concluíram após o diálogo com a professora.

Prof. – Olhem para estes aqui. As áreas são todas iguais. Certo?

Luís – Mas havia uma…
Prof. – Ah, ah! Ah humm… E os comprimentos e larguras vão ser sempre os mesmos?
Zé – Não.
Prof. – Obrigada. Não são sempre os mesmos, variam. O que observam acerca da área dos retângulos?
Zé – Que a área é sempre igual.
Prof. – E o comprimento e largura vão ser sempre iguais?
Zé – Não.
Prof. – Pronto.

Na questão 10 interpretaram e parece que compreenderam a questão considerando todos os dados obtidos nas alíneas anteriores porque deram uma resposta baseada na observação dos dados da tabela da questão 8. Apresentaram raciocínio correto para os retângulos que construíram na questão 7. Apresentaram uma explicação incompleta não relacionando a medida da largura e do comprimento entre os retângulos que "O perímetro é sempre igual". Concluíram de forma particular devido aos retângulos em consideração.

Na questão 11 leram, interpretaram, compreenderam, consideraram todos os seus resultados e resolveram com base neles. Podendo-se ler no seu trabalho escrito: "É de 24.".

Pelo facto de interpretarem o enunciado como se tratando de um caso particular não passaram à generalização, nem escreveram se o número se referia à medida de perímetro de um dos retângulos já desenhados ou se referia a outro, nem chegaram a formular uma conjetura, como tinham feito, anteriormente, na questão 5.

Na questão 12 do trabalho escrito apenas registaram "É válido" não apresentando mais qualquer tipo de trabalho. Durante a resolução da tarefa na aula transpareceu que interpretaram e compreenderam a questão considerando todos os dados obtidos nas alíneas anteriores porque quando questionados sobre o que escreveram, parece que apenas um dos elementos refletiu e argumentou o seguinte:

Luís – O que tem menor perímetro é o 6… lembraste?... Ora vê! O que tem menor é o que eu vou fazer. Olha agora.
Zé – Este aqui vai ter…
Luís – Vai ter 36, 36, 1, 1. Este aqui tem 72+1+1…
Zé – Isso não interessa agora! Deixa de ser burro! Já acabamos.
Inv. – Já acabaram mas esta aqui não está justificada.
Luís – Pensávamos que não era.
Inv. – Como sabem quando é que tem menor perímetro?
Luís – Tem maior comprimento e menor largura… depende dos algarismos...
Inv. – O que é maior?!
Luís – Maior comprimento e menor largura é para ter menor área e para ter maior área é o contrário daquilo…
Inv. – Perguntei para ter maior perímetro…
Luís – Para ter maior perímetro é necessário ter maior comprimento e menor largura.
Inv. – E para ter menor?
Luís – É necessário ter as medidas dos lados mais aproximadas. (17.01.2011).

Os argumentos apresentados não foram gerais e não ficou claro se estes permitiram convencer o colega. Neste momento foram capazes de apresentar uma explicação para o maior perímetro ("Tem maior comprimento e menor largura… depende dos algarismos"**)** considerando um qualquer grupo de retângulos que tenha igual área. Para o menor perímetro o Luís conseguiu expressar-se de forma mais rigorosa e que permitia a generalização, referindo: "É necessário ter as medidas dos lados mais aproximadas" (17.01.2011).

Quando questionados pelo investigador na aula, com o objetivo de os levar a refletir, parece que o Luís expôs o que estava a pensar e que o Zé já não estava interessado em ouvi-lo. Através das imagens vídeo observa-se que o Zé, neste momento, tem um comportamento irrequieto e desconcentrado relativamente à tarefa.

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos, ao nível da argumentação colaborativa foi **fraca**, ao nível da argumentação utilizada foi **média**.

A argumentação colaborativa foi fraca porque a questão 4 foi respondida por acumulação de factos, e não pelo debate e argumentação; a partir do momento em que o Zé deixou de estar interessado surgiu argumentação agressiva, não trabalham em conjunto para resolver o mesmo problema; no entanto, competia com o par A para terminar a tarefa no menor tempo possível.

Do que se observou da recolha de dados apenas surgiu um momentos de argumentação agressiva,

Luís – Vai ter 36, 36, 1, 1. Este aqui tem 72+1+1…
Zé – Isso não interessa agora! Deixa de ser burro! Já acabamos. (17.01.2011).

Estiveram quase sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão. No entanto, foi notória a dificuldade que tiveram em argumentar ou apresentar uma opinião contrária à do colega. O nível de concentração na tarefa a partir da questão 9 baixou consideravelmente, podendo-se verificar na questão 12, com o aparecimento da argumentação agressiva. Durante a resolução da tarefa, foram poucos os momentos que conseguiram ouvir-se, raciocinar e refletir sozinhos. À primeira dificuldade optavam sempre por chamar a professora.

Zé – Já estamos na 3.
Luís – A área é comp. x largura.
Zé – Deixa estar assim.
Luís – Lembra-te da outra… O que é a área? É comprimento vezes largura.
Zé – E o que é que tem?
Luís – 4x3 12 de área. Se é para pôr 14 palhinhas, tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro.
Zé – É igual ao outro.
Luís – Se é para pôr 14 palhinhas, tem que ter obrigatoriamente 14 de perímetro.
Zé – Oh professora, professora. Professora. Oh professora Joana! Não estamos a perceber a 3.
Luís – Não sabemos se está bem.
Zé – Não é nada!
Luís – Mas se temos 14 palhinhas tem que ter 14 de perímetro.

Zé – Não, não é nada.
Luís – Vai ter obrigatoriamente 14.
Zé – Não, não.
Prof. – Quem chamou?
Zé . – Fomos nós! Não estamos a perceber esta.
Prof. – Estão totós! Quantas palhinhas utilizaram? O que podem dizer acerca do perímetro dos retângulos. O que podem dizer? A primeira coisa?
Zé – São todos iguais.
Prof. – Qual foi a primeira coisa em que pensaram?
Luís – Se tem 14 palhinhas tem 14 de perímetro.
Zé – Não professora, nós pensávamos que era para fazer um cálculo! Mas não é para pôr mais nada?!
Prof. – Ah?!… [Escrevem: O perímetro é igual…]
Zé – [Zé lê "O que podem dizer acerca da área dos retângulos."] **São todos diferentes. Oh professora, professora!**

No momento em que a professora anunciava que o tempo estava prestes a terminar o par deixou de se apoiar em argumentos para resolver as restantes questões e terminá-las antes dos seus colegas.

Luís – O que tem menor largura é o que tem… O que tem maior comprimento e menor largura é o que tem menos.
Zé – É a A. É a A
Luís – Sim, é a A.
Zé – É a A.
Luís – É a A porque é a que tem menor área (os dois concordam e repetem enquanto registam). Porque tem maior comprimento e menor largura.

Ao longo desta tarefa este par teve dificuldades em apresentar argumentos, ser autónomo (recorriam sempre a confirmação), transmitir o raciocínio ao colega e em serem mais exigentes na sua forma de resolução da tarefa. Para resolverem grande parte das confusões, reforçar o seu argumento, ou dúvidas e/ou pequenas dificuldades solicitavam sempre a ajuda do professor ou da investigadora.

A argumentação utilizada foi média porque tiveram raciocínio correto apesar de não ter sido partilhado com sucesso; utilizaram conceitos e propriedades matemáticas; iniciaram o processo de generalização; apresentaram argumentos incompletos.

A notória competição do Zé com os outros pares, querendo terminar de resolver a tarefa em primeiro lugar, condicionou bastante o par. Até porque mesmo antes de terem terminado já o estava a anunciar. Este facto não lhes permitiu refletir o suficiente em algumas questões.

O Zé quando não concordava com o colega negava ou simplesmente chamava a professora para "calar" o colega ou esclarecer a questão, não sendo capaz de contra-argumentar. À medida que o tempo de resolução da tarefa ia passando a grande dificuldade foi o diálogo, ou seja, conseguir ouvir o seu parceiro, e argumentar de modo a tentar convencê-lo.

Verificaram-se algumas dificuldades ao nível da generalização, na questão 6 enquanto resolviam o trabalho escrito.

Luís – O que tem menor perímetro é o 6… lembraste?... Ora vê! O que tem menor é o que eu vou fazer. Olha agora.
Zé – Este aqui vai ter?
Luís – Vai ter 36, 36, 1, 1. Este aqui tem 72+1+1…
Zé – Isso não interessa agora! Deixa de ser burro! Já acabamos.
Inv. – Já acabaram mas esta aqui não está justificada.
Luís – Pensávamos que não era.
Inv. – Como sabem quando é que tem menor perímetro?
Luís – Tem maior comprimento e menor largura… depende dos algarismos...
Inv. – Porque é maior?!
Luís – Maior comprimento e menor largura é para ter menor área e para ter maior área é o contrário daquilo…
Inv. – Perguntei para ter maior perímetro…
Luís – Para ter maior perímetro é necessário ter maior comprimento e menor largura.
Inv. – E para ter menor?
Luís – É necessário ter as medidas dos lados mais aproximadas.

Quando se estende para 20 palhinhas o Luís e o Zé registaram "é válido". Na entrevista, quando questionados, pareceu que não compreenderam a questão.

Inv. – Vocês pegavam na tabela que tinham construído anteriormente e analisavam o que acontecia à área do retângulo.
Luís – Quando o comprimento é mais grande e a largura é menor a que tem menos área.
Inv. – Tens a certeza? E se for ao contrário?
Luís – Tem maior área!

De um modo geral, os elementos deste par tiveram grandes dificuldades em apresentar o raciocínio, de argumentar e contra-argumentar.

Resolução da tarefa 3

Na questão 1 os alunos contaram o número de quadrados necessários para fazer cada uma das molduras representadas. O trabalho apresentado mostra que a resolveram corretamente sem necessitarem de qualquer apoio por parte do professor ou do investigador. Consideraram os dados do enunciado e da figura, como se pode verificar no seu trabalho escrito,

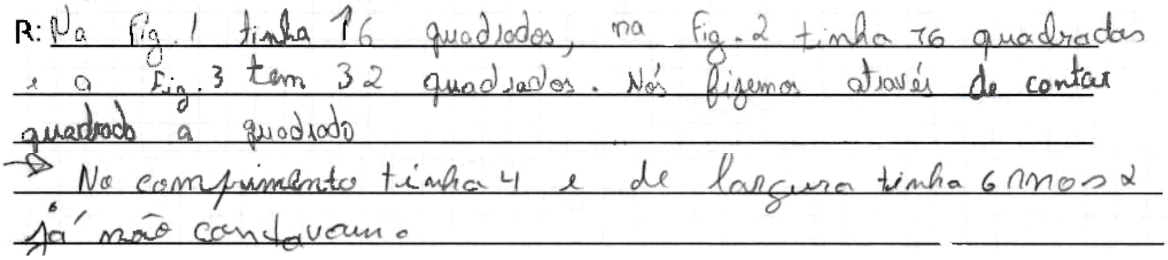

R: Na Fig. 1 tinha 16 quadrados, na Fig. 2 tinha 16 quadrados e a Fig. 3 tem 32 quadrados. Nós fizemos através de contar quadrado a quadrado
No comprimento tinha 4 e de largura tinha 6 mas 2 já não contavam.

Fig. 4 – Resposta à questão 1

A primeira estratégia apresentada foi a contagem "unidade a unidade" do número de quadrados existente em cada moldura desde o primeiro retângulo. A segunda forma de contagem que lhe surgiu, depois de observarem melhor as molduras, foi contar uma vez o número de quadrados do comprimento e multiplicar por 2 (correspondente aos lados opostos de um retângulo terem comprimentos iguais), somar o dobro do número de quadrados da largura e depois tirarem 2 ("porque morreram").

Tendo registado no seu trabalho escrito,

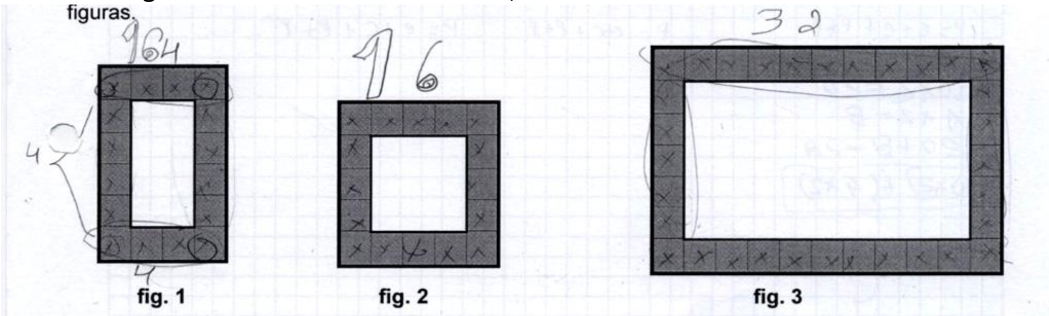


Fig. 5 – Resposta à questão 1

Na questão 2 desenharam três diferentes molduras sem qualquer dificuldade nem dúvida.

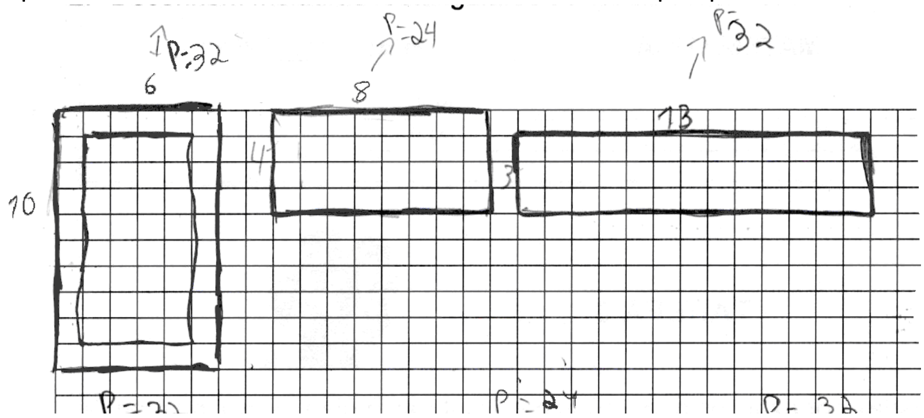


Fig. 6 – Resposta à questão 2

A questão 3 solicitava-lhe que escrevessem uma expressão numérica que traduzisse o número de azulejos que gastava cada moldura. O par teve dificuldades em compreender o que era uma expressão numérica porque era a primeira vez que ouviam tal expressão. A professora optou por ler o enunciado da questão e explicar, para toda a turma, o que era pretendido. Analisando o trabalho escrito parece que interpretaram e compreenderam corretamente o que lhes era solicitado e, inicialmente relacionaram a resposta à questão anterior com o trabalho que estavam a desenvolver. Apesar de lerem o enunciado e de terem conhecimento que cada unidade de azulejo está representada por "um quadrado" ao escreverem a expressão numérica em cada uma das molduras equivocaram-se nos cálculos, embora tenham uma expressão que representa o modo como pensaram. Como se pode observar na figura seguinte,

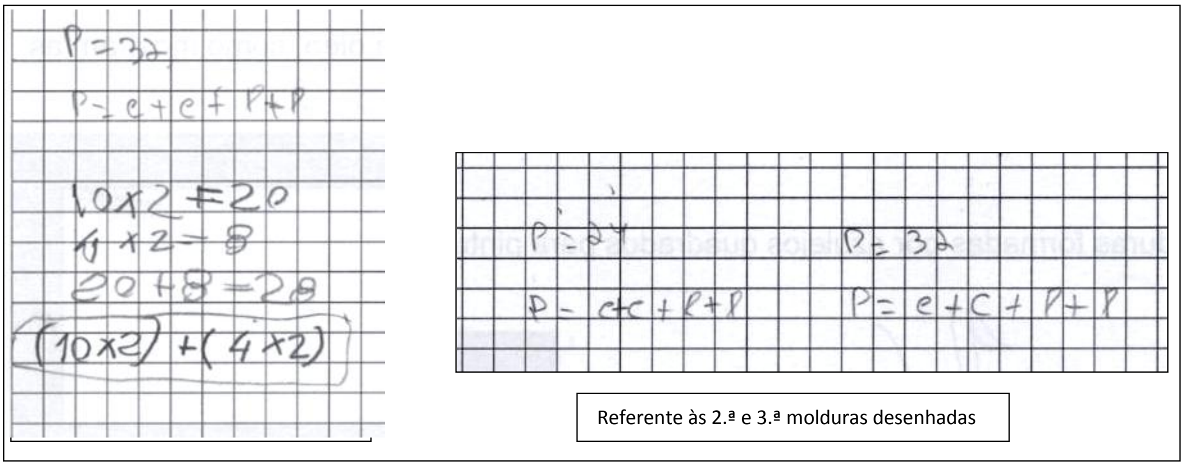


Fig. 7 – Resposta à questão 3

Na primeira moldura apesar de terem colocado o valor do perímetro também colocaram o número de azulejos utilizados e a respetiva expressão numérica. Nos dois retângulos seguintes apenas colocaram apenas a expressão e o valor do perímetro.

A expressão numérica referente à primeira moldura foi escrita com o apoio da investigadora durante a entrevista. Para a referida moldura apenas tinham registado os produtos separadamente e, no final, efetuado a soma. Nas restantes molduras parece que se esqueceram de verificar o trabalho deixando estar com a expressão referente ao perímetro.

Na entrevista (24.01.2011) observando o que fizeram concluíram:

Zé – Não, caímos na ratoeira de trás!
Inv. – Atrás fizeram uma coisa e chegaram aqui e escreveram outra.
Luís – Contamos aquele. 10, 10, 5, 5 dava 20 a… 30.
Inv. – Então dava? (interrompe apressadamente…)
Luís – Não, 5 não! 10, 20… ah era só 4 . Por isso era 20, 24, 28.
Inv. – Então faziam?
Zé – 10 vezes dois.
Luís – Igual a 20 e 4x2.
Inv. – Que é igual?
Zé e Luís – 8.
Inv. – E no final é que somavam que dava?
Zé e Luís – 28. (24.01.2011).

Apesar do registo na tarefa não estar completo, porque não tinham escrito numa única expressão como obter o número de azulejos necessários para a moldura e nas outras duas molduras calculou o perímetro, o par expôs a sua forma de visualização da moldura e apresentou o raciocínio que lhes permitiu obter a forma de contagem "mais rápida":

Luís – Este dava 16.
Inv. – Sim?!
Zé – Mas como este nesta fila já não ia contar e aqui já acabava. Contávamos este e este e estes dos lados morriam. Contamos 4 e este morria para os outros e ficava 4, depois morria para este.
Luís – E ficavam outros 4.
Inv. – Hum, hum.

Zé – Mas este nesta fila já não ia contar. É como se morresse e estes 4 aqui também morriam. Mas este aqui são outros 4.
Inv. – Já percebi. Primeiro contaram ao comprimento, não foi? E depois à largura tiraram…
Luís – 2.
Inv. – Dois. Foi assim que vocês pensaram?!
Luís – Mas eu já tinha explicado esta no quadro. (24.01.2011).

Apresentaram uma resposta escrita nas expressões numéricas com falta de rigor porque relacionaram o perímetro com o número de azulejos, lendo-se: "P= c+c+l+l…". Podendo-se analisar a expressão escrita como sendo uma explicação incompleta.

Na questão 4 não desenvolveram qualquer trabalho escrito durante o tempo de aula. Quando questionados, na entrevista, pelo facto de não terem desenvolvido qualquer trabalho justificaram que não tinham percebido. No entanto, na gravação vídeo é possível observar que o par começou a conversar com os colegas e deixou de tentar resolver a tarefa.

Na entrevista responderam à questão,

Inv. – Agora tinham uma moldura 100x200. Quanto é que seria?
Luís – Nessa, eu não estava a perceber de onde era o 100 ou o 200!? De que lado…
Inv. – 100 aqui e 200 aqui. Quantos azulejos precisavam?
Luís – 200, 400, não!
Zé – 200, 400, 600.
Luís – Não, não…
Zé – É, é!
Luís – Não, não porque tens que descontar os outros dois.
Zé – Então dava…
Luís – 98 mais 98.
Inv. – Então escreve a expressão numérica.
O 200 mais 200 concordam?
Eles – sim.
Inv. – Então escreve 200 mais 200 ou..
Eles – 200x2 [devendo dizerem 2x200].
Inv. – E depois o que fizeram…
Luís – 98 mais 98.
Inv. – Que dava quanto?
Luís – 196.
Zé – 596.
Luís – [o Luís faz o algoritmo] 596, não é?
Inv. – Sim. (24.01.2011)

Nesta questão pretendia-se que verificassem se o que escreveram se podia ampliar e generalizar. O Luís imediatamente após ter percebido o que era pedido respondeu. O Zé não ficou completamente esclarecido mesmo depois do Luís responder. Pelo que o Luís teve necessidade de argumentar para que o Zé ficasse convencido, "Não, não porque tens que descontar os outros dois." (24.01.2011).

O Luís recorreu aos cálculos que efetuou para explicar o número de azulejos necessários.

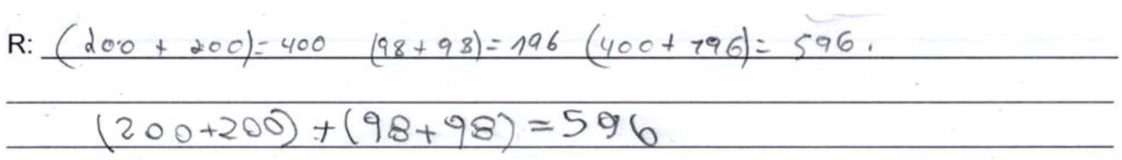


Fig. 8 – Resposta à questão 4

De modo geral, os elementos deste par não sentiram grande necessidade de argumentar e contra-argumentar porque existiu concordância na resposta.

Teve dificuldades em interpretar do enunciado da última questão. O Zé leu a questão, não refletindo em conjunto com o colega, e de imediato pede o apoio da professor, "Ó Professora! Não consigo perceber esta… lá lá lá [canta]. Em moldura retangulares de várias dimensões." (19.01.2011). Ao que o Luís responde "Fazemos uma com 1000 de um lado e 2000 noutro e acabamos com a folha!" passando a desenhar três molduras com diferentes dimensões.

Apesar da professora ter explicado o significado de "expressão numérica", na entrevista não pareceu que estivesse ficado muito claro. Ao alertar-lhes para o enunciado onde era pedido a expressão numérica "Como aqui pedia uma expressão numérica tinham que escrever todas as operações juntas. Escrevam lá (registam 10x2 + 4x2). Isto é que é uma expressão numérica!", no final o Luís exclamou "Ai é?!" (24.01.2011).

No trabalho escrito não encontraram diferentes formas de contagem, nem procuraram verificar se existia algumas mais simples, o que transparece a falta de reflexão. No momento da exploração dos raciocínios em grande grupo o par foi capaz de apresentar mais duas formas de visualização que foram, posteriormente exploradas na entrevista. O par considerou que inicialmente tiveram algumas dificuldades em resolver a tarefa, justificou o Luís que "no início sim, começamos foi um pouco mal. Tentamos fazer a área mas não dava." (24.01.2011). Quando confrontados com o que registaram no trabalho escrito "Aqui deduzi que estavam a calcular o perímetro. 2x a largura mais 2x o comprimento." O Luís pareceu que não conseguiu arranjar argumentos para convencer o colega e, possivelmente, sentiu um pouco de insegurança. O par revelou dificuldades em argumentar e contra argumentar para apresentarem o raciocínio mais correto:

> Zé – Mas assim depois não ia dar.
> Inv. – Porquê?
> Zé – O Luís contou comprimento e largura e ia fazer duas vezes o comprimento e duas vezes a largura mas nunca ia dar porque assim estávamos a somar outra vez este. Já não ia dar! Ia dar a mais.
> Luís – Eu pensei assim (agrupando os quadrados na primeira moldura) depois ele disse... deixa estar assim que é mais fácil…
> Zé – Eu disse que era melhor contar um a um porque assim temos a certeza que está bem. (24.01.2011).

Apesar de dizerem que se calculassem o perímetro que estava mal o par registou na questão 2 “P=32…”.

O envolvimento na tarefa foi diminuindo ao longo do tempo; na última questão verificou-se a falta de persistência, nem sequer recorreram à ajuda do professor para tentar resolver a questão. Na entrevista o Luís disse “Nessa eu não estava a perceber de onde era o 100 ou o 200!? De que lado…”, durante o trabalho escrito não se ouve qualquer comentário à questão.

No que concerne à argumentação colaborativa foi mais evidente na entrevista verificando-se desenvolvimento de trabalho através do debate, alguma partilha de conhecimento matemático, o envolvimento do par para resolver o mesmo assunto, o trabalho para uma aprendizagem não competitiva, alguns momentos em que a argumentação surgia como diálogo, souberam ouvir-se, raciocinar e, pontualmente, refletir.

Como se pode verificar pelo diálogo (24.01.2011):

Inv. – Consideraram que foi o método mais fácil? Como foi isso?
Luís – Este dava 16.
Inv. – Sim?!
Zé – Mas como este nesta fila já não ia contar e aqui já acabava. Contávamos este e este e estes dos lados morriam. Contamos 4 e este morria para os outros e ficava 4, depois morria para este
Luís – E ficavam outros 4.
Inv. – Hum, hum.
Zé – Mas este nesta fila já não ia contar, como se morresse e estes 4 aqui também morriam. Mas este aqui… são outros 4. […]
Zé – Não, caímos na ratoeira de trás!
Inv. – Atrás fizeram uma coisa e chegaram aqui e escreveram outra.
Luís – Contamos aquele. 10 10 5 5 dava 20 a… 30.
Inv. – Então dava?
Luís – Não, 5 não! 10, 20… ah era só 4 . 20 24 28.
Inv. – Então faziam?
Zé – 10 vezes dois
Luís – Igual a 20 e 4x2 […]
Inv. – 100 aqui e 200 aqui. Quantos azulejos precisavam?
Luís – 200, 400, não.
Zé – 200, 400, 600.
Luís – Não, não!
Zé – É, é!
Luís – Não, não porque tens que descontar os outros dois.
Zé – Então dava…
Luís – 98 mais 98.
Inv. – Que dava quanto?
Luís – 196.
Zé – 596.
Luís – [faz os cálculos] 596, não é?

Durante o trabalho escrito (19.01.2011) a única intervenção que se ouviu em que os dois elementos trabalharam em conjunto para resolver um problema foi na questão um:

Luís – Ainda não explicamos porquê.

Zé – Ah, pois não. Porque contamos quadrados…
Luís – Através da contagem dos quadrados.
Zé – quadrado a quadrado.

Os argumentos apresentados pelo Zé e pelo Luís no trabalho escrito não foram muito claros como se pode ver, na apresentação de uma estratégia para contar o número de azulejos de cada moldura, não ficou claro se os dois de comum acordo com eles. O Zé confessou na entrevista que primeiro tinha sugerido, que "(…) era melhor contar um a um porque assim temos a certeza que está bem" e depois quando questionados sobre a estratégia ele disse,

Zé – Mas este nesta fila já não ia contar, como se morresse e estes 4 aqui também morriam. Mas este aqui são outros 4.
Inv. – Já percebi. Primeiro contaram ao comprimento, não foi? E depois à largura tiraram…
Luís – 2.
Inv. – Dois. Não foi? Foi assim que vocês pensaram!
Luís – Mas eu já tinha explicado esta no quadro.
Inv. – Pois explicaram no quadro mas não tinham registado! E qual acham a forma mais fácil? A vossa forma de contagem, ou a do Diogo ou da Beatriz.
Zé – A nossa forma. Alguém começou a contar aqui.
Inv. – Como?
Zé – Era a nossa forma. Contamos aqui, mas não era a nossa forma, que era contar de outra forma 6+6+2+2.

Durante a explicação oral à turma surgiram diferentes formas de resolução que não tinham surgido no par durante a resolução da tarefa escrita. Por isso, o par não tinha este raciocínio registado no seu trabalho escrito. Após o diálogo em grande grupo, o Zé já aceitava, para além, da resolução do Luís a de outros colegas que tinham visualizado a moldura de outras formas.

Ou seja, ele enuncia primeiro a estratégia do Luís mas sem estar muito convencido porque na entrevista geral voltou, inicialmente, a referir a contagem "quadrado a quadrado" como sendo a melhor. Como o Zé, na entrevista (logo a seguir à realização da tarefa, ainda não sabia muito bem qual seria a melhor optou por referir as formas como os colegas pensaram. Talvez tenham ficado um pouco confusos e não tenham chegado a um consenso sobre a melhor forma de resolução porque no diálogo em grande grupo tal também não ficou explicito.

Na entrevista geral o par continuava a discordar, o que representa que o diálogo em grande grupo não foi explícito.

Inv. – Vocês acham que a vossa estratégia era a melhor. Mas qual era a vossa estratégia?
Zé – Já não me lembro.
Inv. – Tinhas dito que era contando!
Zé – É, é!
Luís – Primeiro sim, mas depois fomos vendo outras formas.
Inv. – Qual consideram ser a mais fácil?
Zé – Contando. Assim tenho a certeza.
Luís – Fazendo vezes. Como aqui 4vezes 4.
Inv. – Tens a certeza que é vezes?
Luís – Não! Oh… É 4 mais 4, mais 4 e mais 4.
Inv. – E se fosse uma moldura como esta! Qual será mais fácil?

Zé – Acho que é a minha.
Luís – Acho que não.
Inv. – Então se as duas estavam certas experimentem e vamos ver quem descobre primeiro.[…]
Zé – A do Luís!
Inv. – Porque achas que é a do Luís?
Zé – Porque deu certo.
Inv. – E mais rápido.
Luís – Ainda podia ser mais rápido. Eu é que me enganei a contar a primeira vez. [contou o comprimento e a largura, tirou 2 à largura e somou o dobro do comprimento com o dobro da diferença do comprimento por dois].

O Zé explicou a estratégia de resolução do par, considerando que estava correta: "Mas como este nesta fila já não ia contar e aqui já acabava. Contávamos este e este e estes dos lados morriam. Contamos 4 e este morria para os outros e ficava 4, depois morria para este." (24.01.2011).

Na questão 4, durante a entrevista (24.01.2011), depois de algumas questões orientadoras o par resolveu a questão.

Inv. – Agora tinham uma moldura 100x200. Quanto é que seria?
Luís – Nessa eu não estava a perceber de onde era o 100 ou o 200!? de que lado…
Inv. – 100 aqui e 200 aqui. Quantos azulejos precisavam?
Luís – 200 400, não.
Zé – 200 400 600.
Luís – Não, não.
Zé – É, é!
Luís – Não, não porque tens que descontar os outros dois.
Zé – Então dava…
Luís – 98 mais 98.[…]
Inv. – Que dava quanto?
Luís – 196.
Zé – 596.
Luís – 596. Não é?!

Antes da entrevista, tinham apresentado um trabalho incompleto porque não fizeram a última questão e não verificaram a resposta à questão 3. A "linguagem matemática" utilizada nem sempre foi a mais correta. E durante a resolução da tarefa não ficou claro qual era o método que melhor convencia, dentro do par e na turma.

Resolução da tarefa 4

Na questão 1.a) os alunos começaram por contar o número de quadradinhos da fig.1, depois da fig. 2 e, por último, da fig. 3. Verificaram que existia uma regularidade entre eles, "no primeiro aumenta sete e depois nove… é sempre mais dois que se acrescenta". O Luís iniciou a contagem do número de quadradinhos de cada figura em voz alta levando o Zé a seguir o seu raciocínio. Apesar do raciocínio não ter surgido por parte do Zé este acabou por conseguir exprimir-se de uma forma um pouco mais rigorosa que o seu colega,

Luís – [contam] Aqui tem 8 e aqui tem 15.
Zé – Se aqui tem 8 e aqui tem 15, então, aqui vão sete.
Luís – [contam] Aqui tinha quinze e aqui quanto é que tinha?
Zé – Tinha 7.
Luís – Agora tem 9. Aumenta sempre dois!
Zé – No primeiro aumentou sete e depois aumentou nove… É sempre mais dois que se acrescenta. Então, se acrescenta sempre mais dois, quantos vamos ter aqui?
Luís – 24. […]
Zé – Aqui tem 15 e aqui tem 24. Daqui para aqui são sete e daqui para aqui são nove! São sempre mais dois. (19.01.2011).

Após encontrarem esta regularidade, correspondente ao número de quadradinhos em cada figura, começaram a olhar para as possíveis regularidades entre a sequência das figuras. O Luís reparou que "Este quadrado está em todas.", ou seja, existia um quadrado no canto superior direito em todas as figuras. O Zé observou que acrescentava-se sempre mais uma fila de uma figura para a figura seguinte. Com algumas questões orientadoras o Zé acabou por verificar que não se acrescentava só mais uma fila. No entanto, continuou a não expressar-se corretamente sobre o que estava a ser alterado,

Zé – Em cada figura tem sempre mais uma fila.
Inv. – Só mais uma fila?
Zé – Sim. Uma…
Luís – Está a outra fila que tem mais outra fila.
Zé – Só mais uma fila não, tem mais…
Inv. – Tem uma fila e que mais?
Zé – Posso acrescentar mais dois numa fila e mais duas.
Inv. – E aqui quantos é que tinhas?
Zé – Mais dois, quatro, seis.
Inv. – Como?
Zé – Aqui já dava seis! (24.01.2011).

Apesar de não explicarem rigorosamente as alterações entre as figuras desenharam corretamente as duas figuras seguintes. Demonstrando que interpretaram e compreenderam a questão, e tentaram encontrar regularidades que lhes permitisse desenhar as duas figuras seguintes. O trabalho apresentado mostra que resolveram corretamente a questão. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com base na sequência das figuras apresentadas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

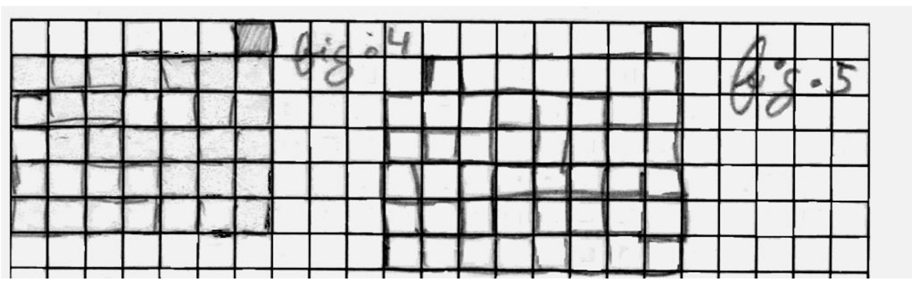


Figura 9 – Resposta à questão 1 a)

Utilizaram os conceitos de retângulo, quadrado, comprimento, largura, fila, coluna e área como se pode depreender do diálogo entre os dois alunos,

> Zé – Em cada figura tem sempre mais uma fila. […]
> Zé – É um paralelepípedo.
> Luís – Não é um retângulo. […]
> Zé – Se tiramos este para aqui fica retângulo. …
> Luís – Só vou pôr aqui fig. 5 e fig. 6. […]
> Zé – Para calcular a área.
> Luís – Cada quadrado é uma área! (19.01.2011).

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das sequências e que as tarefas iniciais lhes tinham dado algum treino na visualização das regularidades. O que lhes permitiu obter diferentes formas de contagem e, consequentemente, desenhar sem grandes dificuldades as figuras seguintes da sequência.

Na estratégia apresentada, houve organização. Iniciaram pela sequência gerada por recorrência e a partir da figura anterior descobriam o valor da área da figura seguinte. Para desenharem as figuras, primeiro construíram um retângulo, com base na figura anterior e nas regularidades encontradas, e depois faziam as alterações que achavam necessárias. Como se pode verificar durante a resolução da tarefa (19.01.2011).

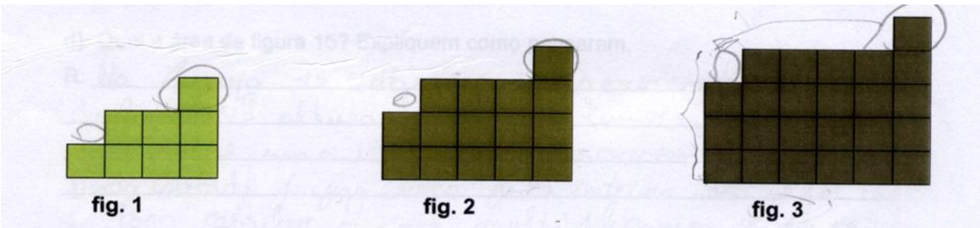


Fig. 10 – Resposta à questão 1.a)

> Zé – O outro vai ter… Este para aqui vai ficar um retângulo… este para aqui também fica um retângulo… este para aqui também fica um retângulo… Se tu reparares em cada um aumentas sempre uma fila (interrompido)
> Luís – Já sei. Já estou a perceber o que tu queres dizer! …
> Zé – Para esta não. Mas se depois pedir outro raciocínio pomos este do retângulo porque é uma maneira mais fácil! Temos mais dois e uma fila. Já está! (19.01.2011).

O par conseguiu chegar à generalização da sequência por recorrência.

> Zé – em cada fig. aumenta sempre mais 2, aqui é 7, aqui é 9, aqui é 11, aqui é 13 agora é 15, 17.
> Luís – Qual a área da fig.…
> Zé – Nós já sabemos! Aqui é sete, não é? Mais 7, 7+2 =9, 9+2=11, 11+2=13, 13+2=15, 15+2= 17. Qual é a área da figura 7? [lê a questão e começa a responder] A área da fig. 7 é…
> Luís – Tens que aumentar mais 15 para dar! 48 mais 15 … 53. Agora tens que aumentar mais 17.
> Zé – Mais 15 ou mais 17?
> Luís – Ó professora?! Aqui é 7, 9, 11, 15 e ia dar 53… mais 17.
> Zé – Dá 70.
> Luís – Em cada figura aumentamos mais dois.
> Zé – Aumentamos mais dois dos que iam de trás… primeiro o 7, depois o 9.

Na questão 1.b) interpretaram e compreenderam corretamente, permitindo-lhes preencher correta e autonomamente a tabela.

Zé – Para calcular a área.
Luís – Cada quadrado é uma área!
Zé – Olha, a 1 é 8.
Luís – Se tirarmos 4… tem 4 aqui em baixo!

Posteriormente, quando tinham a área das três figuras calculadas, o Zé repetiu a conclusão a que tinham chegado "em cada figura aumenta sempre mais 2, aqui é 7, aqui é 9, aqui é 11, aqui é 13 agora é 15, 17." (19.01.2011). Como se pode verificar pelos cálculos efetuados ao lado da tabela.

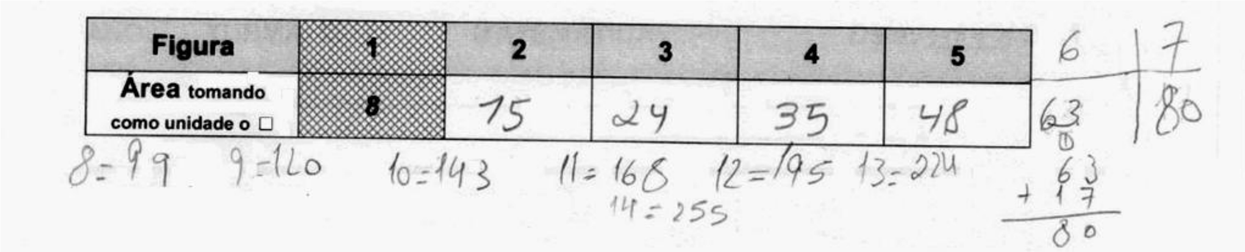


Figura	1	2	3	4	5	6	7
Área tomando como unidade o □	8	15	24	35	48	63	80

8=99 9=120 10=143 11=168 12=195 13=224
14=255

63
+17
80

Fig. 11 – Resposta à questão 1.b)

Na questão 1.c), analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados iniciais com os resultados que foram obtendo das alíneas anteriores. Como lhes era pedido a área da figura 7 tentaram encontrar outras formas de a calcular sem ser pela contagem das unidades de quadradinhos existentes na figura, ou pela recorrência à figura anterior.

Luís – Já sei. Repara, a figura 1 tem 4 quadradinhos, a figura 15 vai ter 19 ou 21.
Não, agora falta saber como a metemos…
Zé – 20… 7, 9, 11, …
Prof. – Que estão a fazer?
Zé – Nós aqui movemos isto para aqui e fica um retângulo e assim é mais fácil de contar!
Prof. – hum.
Zé – Ou fazemos 1,2,3… 1,2,3,4,5 para aqui e fazemos uma conta vezes…!

O Zé como não estava a perceber o raciocínio da colega apenas disse à professora o raciocínio que tinham encontrado anteriormente. O Luís voltou, persistentemente, a expor o seu pensamento:

Luís – Eu já sei, um para saber quantos tem na figura 15! Na figura 1 tem 4, na figura 15 tem… mais 4 dezanove, em cada figura…
Zé – Mas para fazer isso temos que saber a da catorze!
Luís – Não!
Zé – É, é! […]
Luís – Para fazer aquilo que eu disse tem sempre mais um dos lados, logo a figura quinze vai ter que ter 16 e aqui 19! E 16x19 vai dar o resultado.
Prof. – Faça assim e veja quanto dá!
Zé – Vamos fazer…
Luís – Vamos fazer 19x16 para ver quanto dá!

Zé – 9x6 54… 6 e 4? 9… 304. Mas não temos nada para confirmar!
Luís – E a prova real?
Zé – Não dá para ver o resultado.
Zé – É melhor fazer isto à mão, não é?
Luís – Sim, até para confirmar.
Zé – 7,9, 11,15,17, 19 mais 80, 80+19=99… [fazem os cálculos]

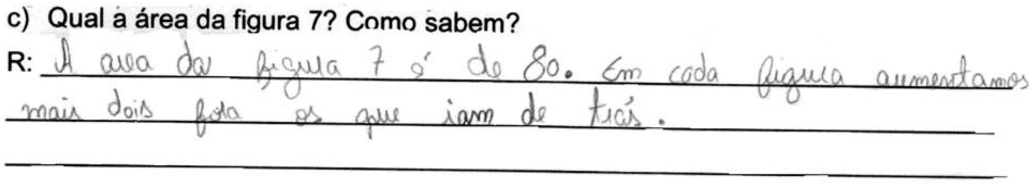

c) Qual a área da figura 7? Como sabem?
R: A area da figura 7 é de 80. Em cada figura aumentamos mais dois fora os que iam de trás.

Fig. 12 – Resposta à questão 1.c)

No entanto, na resposta escrita, para explicar como sabiam qual era o valor da área da figura número 7 escreveram-na com falta de rigor. Ou seja, no trabalho escrito não souberam apresentar corretamente os argumentos que lhes permitiam explicar com rigor o seu raciocínio.

Na questão 1.d), no trabalho escrito, leram e interpretaram conjuntamente a questão e chegaram à solução por recorrência, tal como na questão anterior. O Zé em voz alta dizia: "7,9, 11,15,17, 19 mais 80, 80+19=99… " (19.01.2011). Apesar do Luís ter referido uma forma de contagem e o Zé outra, continuaram a resolver por recorrência. Parecendo que os dois tiveram receio de "errar", optando por completar o trabalho recorrendo sempre à figura anterior. Até porque eles não sabiam como verificar se o que disseram estava correto,

Zé – É melhor fazer isto à mão não é?
Luís – Sim, até para confirmar.

O diálogo em grande grupo permitiu que o par falasse sobre as outras formas de contagem a que tinham chegado. O Zé explicou a sua forma de chegar à solução e foi desenhá-la ao quadro. Desenhou um retângulo e depois apagou um quadrado e desenhou-o no canto superior direito da figura. Segundo ele, fez desse modo para não se enganar.

Zé – 1.º estava mal quando eu construi aqui um quadrado mas eu perguntei quando eu fiz este meti este aqui e estava bem e transportei este para aqui como se este aqui estivesse aqui e não estivesse nada ali. Construi normal e depois no final apaguei e coloquei-o ali.
Inv. – Explica porque é que fizeste isso.
Zé – Porque assim tenho um a mais e um a menos e ao transportar este para aqui ia ficar um retângulo e era mais fácil de construir e no fim apagávamos e colocávamo-lo ali.
Luís – Ó professora também é mais fácil de contar! Víamos de lado...
Prof [interrompe] – contabilizar…era mais fácil?!…
Luís – [continua] Contávamos o comprimento e contávamos a largura e fazíamos de vezes e sabíamos quanto tinha de área! (19.01.2011).

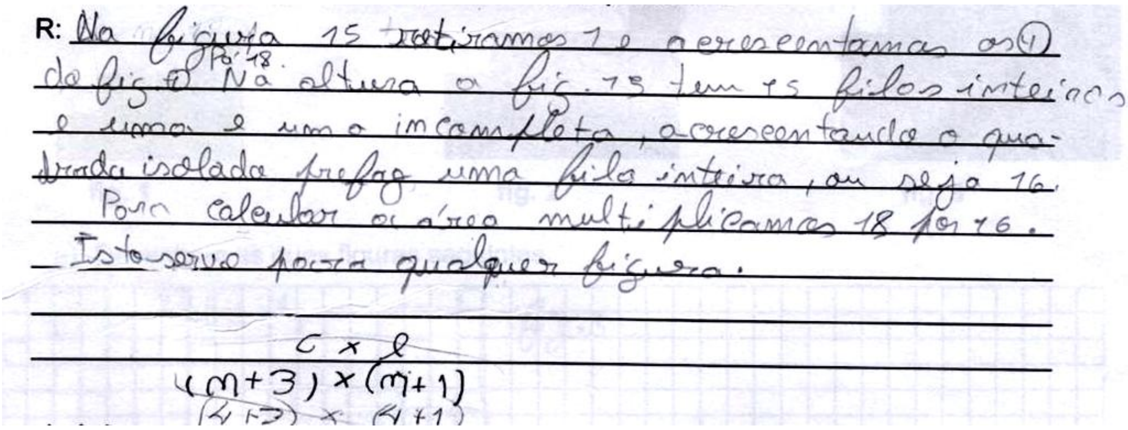
O Luís disse à professora que ainda existia outra forma e a professora pediu que ele fosse ao quadro explicar aos seus colegas o seu raciocínio. No entanto, estava a cometer um erro mas não detetava onde, e os seus colegas não o estavam a compreender.

Luís – Professora sei uma maneira mais fácil!
Inv. – O Luís diz que sabe uma maneira mais fácil! Podes dizer como fizeste?
Luís – A figura 1 tinha 4, a figura 15 ia ter os 15 mais os 4, dá dezanove!... Como tirávamos a de cima e púnhamos ali, de lado, dava sempre mais um que o número da figura por isso ia ter 16 de lado.
Inv. – Escreve tudo o que disseste… Alguém não percebeu o que o Luís disse?
Edu – Eu não percebi muito bem!
Inv. – Não percebeste muito bem. Luís, queres aproveitar um espacinho do quadro para explicar o teu raciocínio.
Prof. – Tentem perceber o que o Luís vai fazer… […]
Luís – Na fig. 1 vai ter quatro e a fig. 5 vai ter nove por baixo.
Inv. – Porque é que a fig. 15 ia ter 19 por baixo?
Luís – Porque na fig. 1 tem 4, logo temos que somar ao n.º da figura os da primeira.
Inv. – Sim? Então verifica se isso dá na segunda figura. Sendo assim tinha que ter 2 mais 4 da primeira. Confirma? […]
Prof. – Então para seguir o teu raciocínio tinha que na fig. 2 ter 4 mais…?
Inv. – O número da figura não era?
Luís – Na fig. 15 acrescentava e ficava 19.
Prof. – Então, Luís para esse raciocínio confirmar tinhas que ter 2 mais 4 e isso confirma-se?
Luís – Aqui tenho mas aqui não!
Inv. – Na figura 1, quantos quadrados tens na base?
Luís – 4.
Inv. – Na figura dois, o n.º de quadradinhos da base da figura 1 mais o número de quadradinhos correspondente ao número da figura. Neste caso, na figura 2 seria 4+2. Era?
Luís – sim. (19.01.2011).

Após a colocação de várias questões ao Luís, com o objetivo de o levar a refletir, concluiu que "somar o número da figura com os quatro quadrados da base da primeira figura e depois retirar um". No entanto, o resto da turma ficou complemente "boquiaberta" sem perceber o que o colega estava a fazer, pelo que a professora optou por ser ela a voltar a explicar o raciocínio do Luís à turma. Apesar do Zé continuar a achar que a forma dele fazer era mais fácil. Na entrevista a resposta do Zé já não era a mesma,

Zé – Convence, a minha convence mas a dele também convence.
Luís – Como estava aqui não convencia porque eu aqui tinha uma coisa mal.
Zé – Relativo a esta porque é parecido. A do Luís dava mas a do Diogo era melhor era mais… rápida… (24.01.2011).

Mostrando assim que o Zé conseguiu compreender o colega. A resolução apresentada (Figura 5) está correta e efetuou-se considerando todos os resultados que foram obtendo. O Zé parece que só compreendeu após a explicação da professora. No entanto, não ficou claro se para ele esse era o melhor raciocínio. Mesmo assim, permitiu que o Luís o registasse, tal como a professora solicitou a todos que o fizessem.


R: Na figura 15 retiramos 1 e acrescentamos os ① da fig. ① Fig. 18 Na altura a fig. 15 tem 15 filas inteiras e uma e uma incompleta, acrescentando o quadrado isolado perfaz uma fila inteira, ou seja 16. Para calcular a área multiplicamos 18 por 16. Isto serve para qualquer figura.

c x l
4(n+3) x (n+1)
(k+3) x (k+1)

Fig. 13 – Resposta à questão 1.d)

No entanto, no trabalho escrito, o par respondeu à questão por recorrência e baseados nos dados e nas regularidades detetadas.

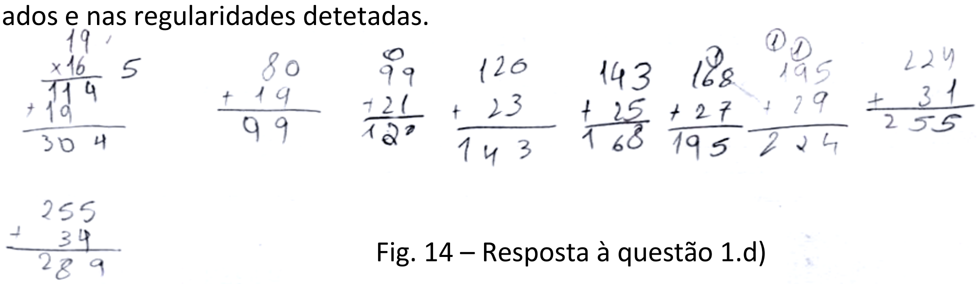


Fig. 14 – Resposta à questão 1.d)

Posteriormente, através da observação das figuras, assim como as regularidades e com o apoio das questões orientadoras da professora e da investigadora conseguiram obter uma forma general de calcular a área de qualquer figura da sequência (19.01.2011).

Prof. – Luís, explica agora como registar.
Luís – Na figura 15, retiramos um e acrescentamos os quatro da 1.ª figura.
Prof. – Os quatro da figura 1. Na altura o que devemos fazer?
Luís – Na altura, na figura 15 tem 15 filas inteiras e 1 incompleta, acrescentamos aquele ali. O que está sozinho.
Prof. – Acrescentamos o quadrado isolado.
Luís – Que faz uma fila inteira.
Prof. – Perfaz uma fila inteira. Logo…
Luís – Ao todo dá 16 filas inteiras.[…]
Luís – Professora ainda falta fazer 15x16.
Prof. – Ah, é verdade.
Luís – Ah!
Prof. – Para fazer a área multiplicamos 15x16. … Esquecemo-nos de uma coisa… não é 16 é 18…

O argumento apresentado para justificar a estratégia é geral, válido, rigoroso, completo e, segundo o Zé, foi convincente porque “Convence, a minha convence mas a dele também convence.” O Luís já não é tão seguro, “Como estava aqui não convencia porque eu aqui tinha uma coisa mal.”. Segundo eles (24.01.2011),

Zé – Relativo a esta porque é parecido. A do Luís dava mas a do Diogo era melhor era mais… rápida…
Inv. – Mas quando vocês acabaram a tarefa acham que convencia os vossos colegas?
Luís – sim.

Zé – sim.
Luís – Na altura acho que não! Porque tinha erros. Era no comprimento. Na altura acho que não porque tinha erros!
Inv. – Qual era o erro?
Luís – Era no comprimento.

Os argumentos apresentados pelo Luís, aparentemente, só convenceram porque a professora voltou a explicar o que o Luís tinha dito. Mas depois um colega da turma (Diogo) conseguiu encontrar uma forma mais simples de explicar. A forma de visualização do Luís, inicialmente, não foi transmitida com sucesso à turma. Talvez a dificuldade que o Luís teve em expressar o seu raciocínio tenha complicado a compreensão pelos colegas.

A verificação do seu raciocínio noutras figuras já desenhadas foram capazes de confirmar se o seu raciocínio estava correto. Como se pôde ouvir,

Luís – Agora tem 9. Aumenta sempre dois!
Zé – No primeiro aumentou sete e depois aumentou nove… é sempre mais dois que se acrescenta. Então se acrescenta sempre mais dois quantos vamos ter aqui?
Luís – 24. […]
Zé – Aqui tem 15 e aqui tem 24. Daqui para aqui são sete e daqui para aqui são nove! São sempre mais dois.

Apenas, pontualmente, o faziam pela solicitação da professora ou da investigadora "Só mais uma fila?" (Inv., 19.01.2011).

Tendo o Luís registado apenas depois do par concordar,

Luís – Eu já sei um para saber quantos tem na figura 15! Na figura 1 tem 4, na figura tem… mais 4, dezanove, em cada figura…
Zé – Mas para fazer isso temos que saber a da catorze!
Luís – Não!
Zé – É, é!
Luís – Para fazer aquilo que eu disse tem sempre mais um dos lados, logo a figura quinze vai ter que ter 16 e aqui 19! E 16x19 vai dar o resultado. […]
Zé – 9x6 54… 6 e 4? 9… 304. Mas não temos nada para confirmar!
Luís – E a prova real?
Zé – Não dá para ver o resultado.
Zé – É melhor fazer isto à mão, não é?
Luís – Sim, até para confirmar.
Zé – 7,9, 11,15,17, 19 mais 80, 80+19=99… [fazem os cálculos]

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi **médio**. Houve momentos em que resolveram a questão simplesmente por acumulação de factos. Por exemplo, o Zé disse para o Luís "Tu desenhas o a e eu desenho o b".

Estiveram sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão e, por vezes, souberam ouvir, raciocinar e refletir.

Luís – [contam] Aqui tem 8 e aqui tem 15.
Zé – Se aqui tem 8 e aqui tem 15, então, aqui vão sete.
Luís – [contam] Aqui tinha quinze e aqui quanto é que tinha?
Zé – Tinha 7.

Luís – Agora tem 9. Aumenta sempre dois!
Zé – No primeiro aumentou sete e depois aumentou nove… é sempre mais dois que se acrescenta. Então se acrescenta sempre mais dois quantos vamos ter aqui?
Luís – 24. […]
Zé – O outro vai ter… Este para aqui vai ficar um retângulo… este para aqui também fica um retângulo… este para aqui também fica um retângulo… se tu reparares em cada um aumentas sempre uma fila [interrompido].
Luís – Já sei. Já estou a perceber o que tu queres dizer! …
Zé – Para esta não, mas depois se pedir outro raciocínio, pomos este do retângulo porque é uma maneira mais fácil!

Ao longo desta tarefa este par teve algumas dificuldades na transmissão do raciocínio ao seu par. Parece verificar-se que a capacidade de transmissão do raciocínio ao seu par e a outros elementos da turma e o tempo de trabalho escrito têm sido obstáculos significativos. Outras dificuldades reveladas nesta tarefa foram: como colocar o seu raciocínio por escrito, principalmente ao nível da generalização; o tempo limitado cedido para o diálogo em grande grupo, e nesta tarefa esse espaço revelou-se importante para que os alunos tivessem mais confiança e ganhassem "coragem" para expor outras forma como pensaram e que não foram capazes de ser escutadas pelo colega; o não saber refletir, o pensar sobre o pensamento do seu colega disse e só depois construir o seu argumento. Todos estes obstáculos acabaram por limitar o seu desempenho.

Resolução da tarefa 7

Na questão 1.a) os alunos começaram por contar o número de pontos que estão na base do triângulo 1, do triângulo 2, do triângulo 3 e, por último, do triângulo 4 e depois tentaram encontrar algumas relações entre eles.

Zé – É sempre a figura 1 mais 2. Na figura 1, isto aqui nunca resulta. Na figura 2 tem a figura 2 mais 1 dá 3, 3x2 dá 6, 3+4 … 4 e depois 4.
Luís – Não fica aqui.
Zé – Pois aqui já não dá!
Luís – Ui… depois zero!!!
Zé – Não vamos começar enquanto não acabarmos o raciocínio! Ok!?
Luís – Este estúpido deste cérebro tem o raciocínio meio estragado…
Zé – Então diz! O que esse estúpido desse cérebro meio estragado…
Luís – [ri] Tipo, no triângulo 2 tem mais um dois, um dois, um dois … sempre…1 2, 12, 1 2. Aqui na figura três continuas a ter 1, 2, 3; 1,2,3;1,2,3…
Zé – Não pode! Estás louco?!
Luís – Hum, era meio estragado…
Zé – Não pode… olha 1,2,3,4.
Luís – Mas para já resultou…
Zé – Tu, já contas-te este aqui, por isso não podes contar isto aqui nesta vez.
Luís – Pensava que era este tipo de palito…mas dá na mesma.
Zé – Não dá!
Luís – Mas dá na mesma. Deixa-me contar!

Zé – Não dá. Não dá nada.
Luís – Posso dar a minha opinião?
Zé – Podes, dizer para ti. Mas para que é que vais contar uma que não conta para nada!
Luís – Já sei.
Zé – Então diz.
Luís – Tem aqui 4, por exemplo na figura 4 vai ter 1,2,3,4 e aquele 1 não contamos, contamos um, dois, três e quatro! Contamos aquele também.
Zé – Não dá! Tu estás a contar assim! Assim, 1,2,3,4 mas aqui só vai ter 3 e aqui vai ter 2…
Luís – Acho que era...
Zé – Acho que descobri! Olha, fig. 3 mais 1 vai dar 4. Não dá?! 1,2,3, 4, não dá?
Luís – Sim. Aquele o 1 também conta?
Zé – Depois vai ter menos um 1,2,3 e depois ainda vai decrescer outro 1, 2
Luís – E é esse?
Zé – Três mais um?
Luís – 3+1 é quatro.
Zé – 1,2,3,4 e depois menos um.
Luís – Ó fogo!...
Zé – Estamos a brincar? E depois menos um. 1,2,3 e depois menos um outra vez. Este aqui… nesta vez este aqui vai contar. Não vai? Este aqui, este aqui nesta vez já não vai contar. Pois não? Vai ser estes três.
Luís – Era o que eu estava a pensar.
Zé – Não mas tu estavas a contar estes e depois…
Luís – Mas era o que eu queria dizer…
Zé – Então vai ser 100, 99 e 98.
Luís – Era o que eu estava a dizer, mas estava mal no… não sei explicar!
Zé – Não, mas tu estavas a contar 4,4,4.
Luís – Não, não estava. Posso dizer como estava a contar? 1,2,3 e aqui 1,2,3 e aqui 1,2,3 e nesta 1,2,3,4; 1,2,3,4 e aqui 1,2,3,4. Aqui 1,2 1,2 1,2.
Zé – Deixa estar! O meu dá. Não dá?
Luís – Dá.
Zé – Tu desenhas esse?
Luís – Os dois triângulos?
Zé – Sim. 4+5?
Luís – 9! Tem que ser assim 4 mais… É 5 bolas.
Zé – ah ya está bem assim! É 5 bolas. … Ai não!
Luís –Ah, ya.
Zé – Está mal uma.
Luís – Não, porque assim é igual à figura 4. Esta é daqui. Vai ter que ser assim!

Verificaram que existiam regularidade entre eles, permitindo-lhes desenhar os próximos dois triângulos. O Luís verificou que “eu estava a olhar para ali e estava a dar 3 e aqui tem 4 tem sempre mais um que o número da figura... Estava a ver 4 mais 1 cinco.” Enquanto que o Zé continuava a olhar para o perímetro da figura e a tentar convencer o colega para optarem pela estratégia dele, mesmo considerando que “davam” as duas estratégias.

Observaram corretamente as alterações entre as figuras desenhando corretamente as duas figuras seguintes. Demonstrando assim que interpretaram, compreenderam a questão e tentaram encontrar regularidades que lhes permitisse desenhar as duas figuras seguintes. O trabalho apresentado mostra que resolveram corretamente a questão. Consideraram todos os dados porque trabalharam sempre com base na sequência das figuras apresentadas. Como se pode verificar no seu trabalho escrito,

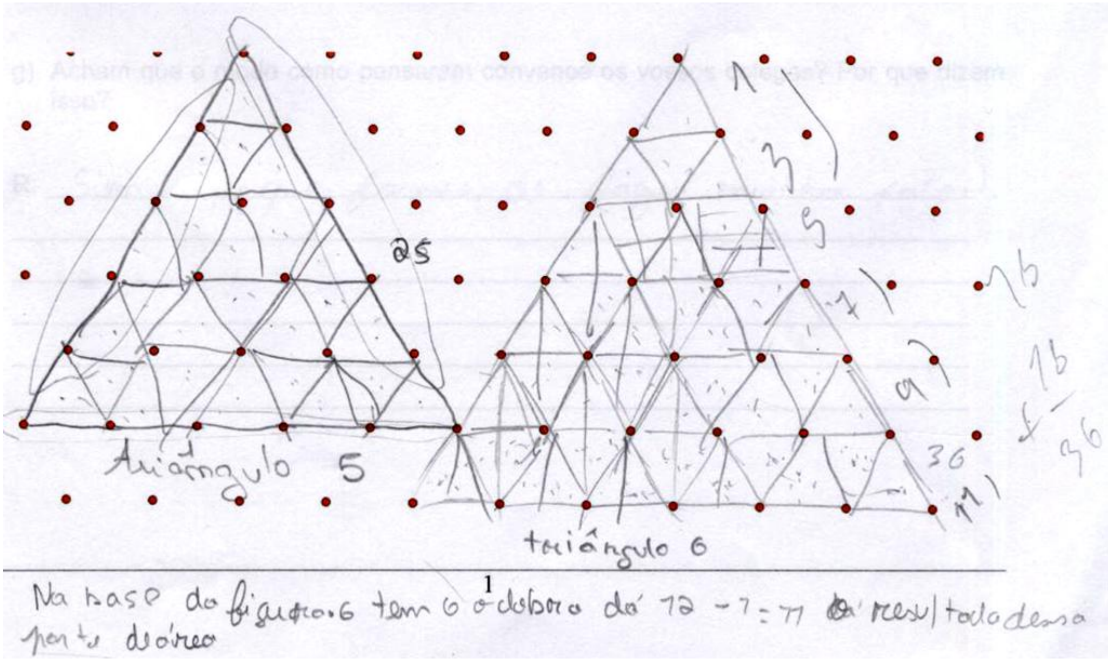


Fig. 15 – Resposta à questão 1 a)

Utilizaram os conceitos de triângulo, área e unidade de área como se pode depreender quando, por exemplo, o Zé disse "Metade da área do quadrado é a do triângulo. Não é? Então pede a área da figura 8… Sei lá. (31.01.2011).

Mostraram que tinham conhecimento matemático acerca das sequências e que as tarefas iniciais lhes tinham dado algum treino na visualização das regularidades. Permitindo-lhes "olhar" para as figuras de forma diferente e relacionar o número do triângulo com os elementos encontrados em cada uma das figuras. Numa tentativa de encontrar alguma regularidade na sequência, diferentes formas de contagem e, consequentemente, desenhar as figuras seguintes da sequência sem grandes dificuldades.

Na estratégia apresentada houve organização. Iniciaram pela contagem do número de pontos da base e, posteriormente, em cada um dos outros dois lados do triângulo. Encontrando uma relação entre a sequência de triângulos e permitindo-lhes, desse modo, construir as duas figuras seguintes.

> Zé – Descobri logo, como se diz… a sequência… logo aqui era muito mais fácil. Para desenhar a figura 5 ou a 6.
> Inv. – Então tentaram descobrir a sequência de quê?
> Zé – Eu estava a pensar em pontos mas depois o Luís pensava que não era.
> Luís – Eu estava a fazer esta e não ouvi a explicação e estava a pensar em palitos. (02.02.2011)

Na questão 1.b) interpretaram e compreenderam corretamente, conseguindo preencher correta e autonomamente a tabela. O Luís, após ler o enunciado, começou instantaneamente a contar o número de pontos na base mas logo reparou "se cada ponto vale 1… o raciocínio que eu estava a dizer… estava a olhar para ali e estava a dar 3 e aqui tem 4! Tem sempre mais um que o número da figura". Confirmaram para o triângulo 4 e depois preencheram o resto da linha seguindo esse raciocínio. Para completar a linha do "perímetro dos triângulos", O Luís começou por somar 3 com 6, o Zé disse o resultado e Luís propôs "não, estava a pensar 3x1…". No entanto quem finalizou o raciocínio foi o Zé "este aqui nunca dava… olha 3x1, 3x2, 3x3, 3x4, 3x5, 3x6" e pede ao Luís para confirmar na figura 4, para a 5 e para a 6. Preenchendo assim a medida do perímetro na tabela.

Triângulo	1	2	3	4	5	6
N.º de pontos na base	2	3	4	5	6	7
Perímetro dos triângulos	3	6	9	12	15	18

Fig. 16 – Preenchimento da tabela 1 b)

A questão seguinte induzia-os para observarem os números que representavam o número de pontos da base e responderam com base nos seus conhecimentos matemáticos. Apresentando uma resposta com base no que tinham observado e com rigor. Como se pode observar pelo seu trabalho escrito.

R: Inteiros a partir do nº 2 (pares/ímpares).

Fig. 17 – Resposta à questão 1 b)

Na entrevista quando questionados sobre a sua resposta esclareceram o que queriam transmitir.

Inv. – Vocês escreveram que são números inteiros e que mais podiam dizer?
Luís – Que são números seguidos.
Inv. – Seguidos?!
Zé – Mas a partir do número dois. (2.02.2011).

Na segunda pergunta da alínea 1b) interpretaram, leram e responderam correta e autonomamente através da observação da tabela. Como se pode verificar do seu diálogo durante o trabalho escrito e da sua resposta escrita,

Zé – [lê] Qual é a relação entre o n.º de pontos da base e o n.º do triângulo?
Luís – É mais um que o número da figura.
Zé – Não, não pode!
Luís – 1-2; 2-3; 3-4; 4-5 … é sempre mais um que o número da figura.
Zé – É sempre mais um que o n.º da figura. [escreve] Olha e agora isto aqui. Não sei fazer!? […]
Zé – Na tabela reparamos…
Luís – Espera aí. Nós reparamos que era sempre mais um que o n.º da figura.
Zé – Prof. Joana. Nós na resposta pusemos que era sempre mais um que o n.º da figura.

Inv. – Se vocês acham.
Zé – … O número de pontos de cada figura… (31.01.2011)

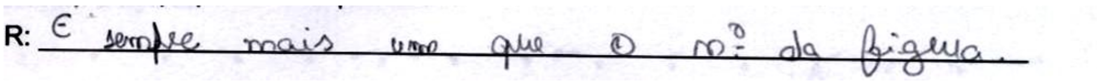


Fig. 18 – Resposta à segunda questão 1 b)

Na questão 1.c), analisando o trabalho escrito, parece que interpretaram e compreenderam corretamente a questão e foram relacionando os dados da primeira fila com os da terceira fila da tabela.

Zé – Eu estava a pensar porque… mas ele estava a fazer uma que era 4, na fig. 3 era 3+1 que dá 4 então era 4,4á 4 então era 4,4,4. Mas eu…
Luís – Eu pensava que era só isso!
Zé – Depois eu disse 5+1 que era 6, 6… 6 depois era 6 menos 1 é 5, e depois 5 menos 1 quatro.
Luís – E depois estivemos a calcular.
Inv. – E para o número de pontos….
Luís – Mas eu também tive uma! Por exemplo a fig. 6… na fig. 1 tinha 1,1,1 e na fig. 2 era 2,2,2 e na fig. 3 era 3,3,3!
Inv. – Então na figura 6 era?
Luís – 6,6,6. (02.02.2011).

O par referiu de imediato como chegavam ao resultado mas teve algumas dificuldades em colocar por escrito o que estavam a dizer. Escrevendo apenas o primeiro período da sua resposta no trabalho escrito e o restante apenas completaram após algumas questões orientadoras durante a entrevista.

Inv. – Na questão 1.c) confirmem se a resposta está certa! […]
Luís – Até acho que dá! Aqui dá. Esta é mais um que o número da figura.
Inv. – Observem o número de pontos do ponteado que os lados do triângulo passam por cima. Ou seja, os lados do triângulo passam por cima de quantos pontos no triângulo1?
Luís – 3.
Zé – 3.
Inv. – E é mais um que o número da figura?
Luís – Não, eu não estava a ver isso!
Inv. – Mas é o que a questão pede! E como é que se chama ao comprimento total dessa linha?
Zé – Perímetro!
Inv. – Então nessa tabela vamos olhar para o…
Zé – Perímetro.
Inv. – Qual é então a relação entre o perímetro e o número do triângulo!?
Luís – Está sempre a aumentar primeiro era mais um, depois mais 3, depois mais 7.
Inv. – Será? Confirmem… 3+1 é 4 e na segunda temos 6…
Luís – Ah! Não estava a ver isso! Na primeira se houvesse mais uma tinha que ser aqui 1… mais 2 era 3...
Inv. – Luís, e dessa forma obténs o perímetro? Que número são estes?
Luís – Ah!
Zé – Múltiplos de 3.
Inv. – E porquê?
Luís – Porque é o números que tem cada triângulo.
Inv. – E que mais. Qual é a relação entre o perímetro e os números dos triângulos? [repito novamente]
Luís – Porque fazemos sempre vezes 3.
Inv. – E porquê 3?

Luís – Porque é o número de lados.
Inv. – Concordas Zé?
Zé – Concordo. (02.02.2011).

No final apresentaram a seguinte resposta,

R: Nós somamos o número da figura mais 1 e deu-nos os pontos da base, se multiplicamos o número da figura vos os três lados do triângulo. Vai dar dar o perímetro da figura.

Fig. 19 – Resposta à questão 1 c)

Assim após a aula (trabalho em par e diálogo em grande grupo) e durante a entrevista, com questões orientadoras, além de conseguirem explicar melhor o seu raciocínio também foram capazes de generalizar.

Na questão d) pretendia-se que os alunos relacionassem o número da figura com o número de pontos de cada lado do triângulo. Nesta questão responderam autonomamente sem apresentar qualquer dúvida e de forma concordante entre o par. Pela resposta escrita apresentada parece que interpretaram e compreenderam corretamente, como se pode verificar.

R: somaram sempre mais um que o número da figura. O número de pontos de cada lado do triângulo é sempre mais um (+1) do que o nº do triângulo; o número da figura mais 1 dá os pontos da base.

Fig. 20 – Resposta à questão 1 d)

Na questão 1.e) interpretaram e compreenderam corretamente após algum apoio por parte da professora ou da investigadora, permitindo-lhes assim preencher correta e autonomamente a tabela. Na parte da interpretação do enunciado, o primeiro impacto o Luís foi "Área?!" e o Zé "A área do triângulo, não estou a perceber!". E intencionavam desistir da tarefa:

Luís – Já percebi. […]
Luís – 1,2,3,4,5,6. São números inteiros a partir de um…. […]
Zé – Metade da área do quadrado é a do triângulo. Não é? Então pede a área da figura 8 … sei lá. Vamos pôr à sorte.
Luís – Dizemos que nos despachamos?! […]
Zé – Já acabamos! (31.01.2011).

Mas com pouco de apoio o Luís continuou. No entanto, o Zé já não conseguia estar totalmente concentrado na tarefa,

Inv. – Têm a certeza que esta está bem?
Luís – Nós não percebemos muito bem!
Inv. – É considerando este triângulo pequenino que vão contar a área… [faltavam 3 questões].
Zé – Vamos lá fazer rápido. […]
Luís – 4+4 dá 8 e menos 1 dá 7 e aqui dá 7. 3+3 dá 6 menos 1 é 5. E está sempre a dar!!
Inv. – Explica-me isso por outras palavras.

Luís – Tem 6, por isso o dobro de 6 é 12 e menos 1 é 11.
Inv. – Aí está outra forma de pensar. Deves escrever… Devem verificar esta…
Zé – Nós já tínhamos feito isto tudo… eu gosto mais do meu que é mais pequenino…
Completam novamente a tabela da área de cada triângulo. […O Zé brinca e canta].
Luís – Encontrei outra… o 4 é o n.º da figura…
Inv. – Qual é a área da fig. 8?
Luís – Da fig. 8 é 8x8 porque estive a ver nas figuras de trás e experimentamos. O número da figura vezes o n.º da figura dava o valor da área! [Zé canta mal viro as costas].
Inv. – Zé, estás a brincar?
Zé – Não! [cala-se] (02.02.2011).

Após a "confirmação", por parte da professora, que a sua interpretação estava correta, o Luís desenhou nos triângulos a divisão em triângulos iguais ao da unidade de área,

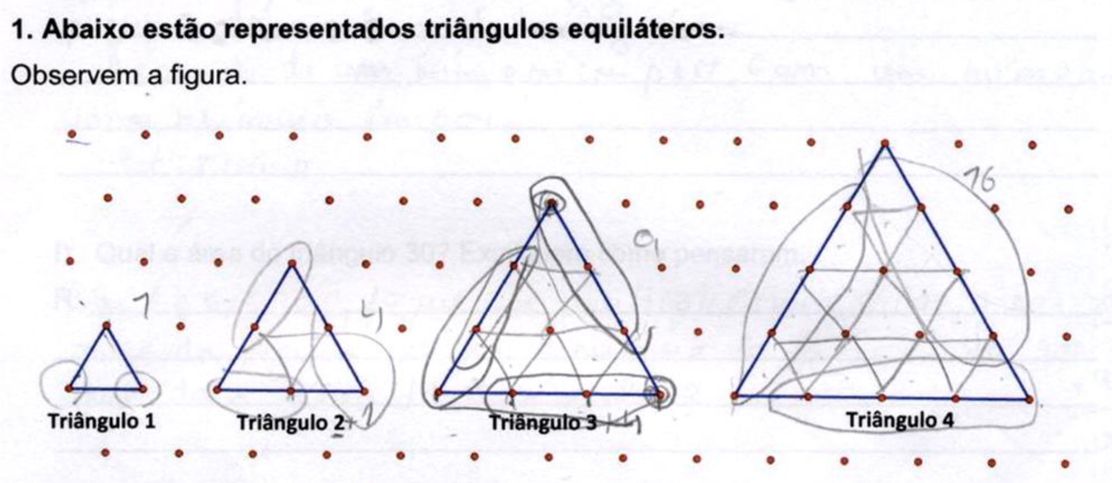


Fig. 21 – Apoio à resolução da questão 1. e)

Escreveu por baixo dos dois triângulos que desenharam parte de uma das outras duas formas de contagem da área,

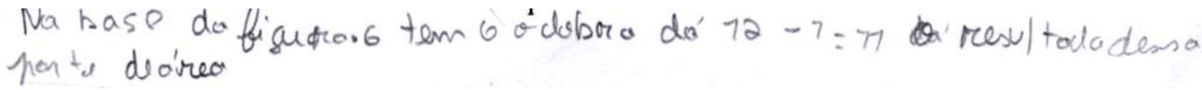


Fig. 22 – Observação do Luís enquanto resolviam a questão 1. e)

Por este processo conseguiu contar a área da primeira fila de um dos triângulos. De seguida contaram o número de triângulos existentes em cada triângulo e preencheram a tabela.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
Triângulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Área do triângulo geral	**1**	4	9	16	25	36

+3 +5 +7 +9 +11

Fig.23 – Preenchimento da tabela 1 e)

Posteriormente, quando tinham contado a área de cada um dos triângulos, leram a questão seguinte que os induzia para observarem os números que representavam o número de pontos da base e responderam com base nos seus conhecimentos. No entanto, pareceu que tiveram dificuldades em transmitir o que tinham observado dando uma resposta incompleta como se pode observar pelo seu trabalho escrito.

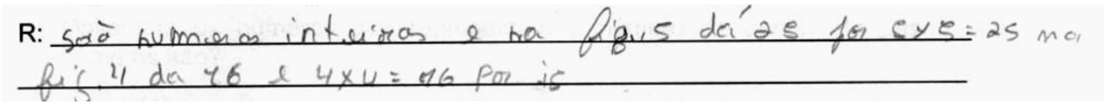

R: São números inteiros e na figura 5 dá 25 foi 5x5=25 na fig. 4 da 16 e 4x4=16 por is

Fig. 24 – Resposta à questão 1 a)

O Luís, observando os números da tabela, verificou que os números obtidos na área de cada triângulo era o resultado de multiplicações especiais, dizendo "da fig. 8 é 8x8 porque estive a ver nas figuras de trás e experimentamos e o número da figura vezes o n.º da figura dava o valor da área! (31.01.2011). O Zé nem interferiu aceitando logo o que o colega disse. O Luís escreveu como tinha descoberto a resposta.

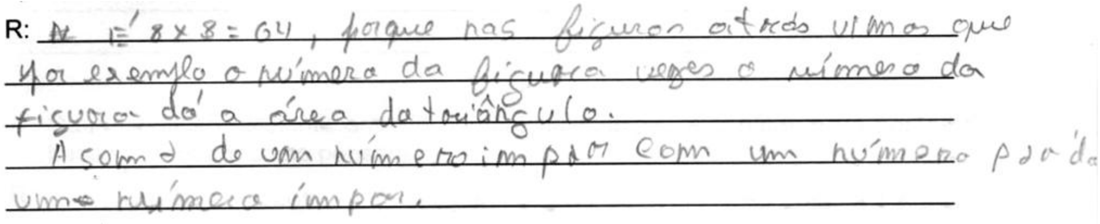

R: A é 8x8=64, porque nas figuras atrás vimos que por exemplo o número da figura vezes o número da figura dá a área do triângulo.
A soma de um número impar com um número par dá um número impar.

Fig. 25 – Resposta à questão 1 f)

Recorreram a um exemplo para lhe facilitar a sua explicação. Na entrevista, com a ajuda de uma série de questões orientadoras conseguiram concluir como determinavam a área do triângulo pelo processo iniciado pelo Luís,

Luís – Porque estava a experimentar e tentei 4x4 e dava.
Inv. – E desta forma.
Luís – Sim, a base é o dobro menos 1 e este aqui acho que é o n.º de quadrados… "chiça" 5x2 dava 10 menos 1 dava 9.Aqui é 9,7,5,3,1.
Luís – São números ímpares.
Inv. – Então para calcular a área também podiam somar o quê?
Zé – A sequência dos números ímpares.
Inv. – Até onde? …
Zé – O Luís disse à pouco. É até ao dobro da… figura menos 1.
Inv. – Porquê!?
Zé – Era outra forma de saber mas demorava mais tempo. (2.02.2011).

A forma de visualização do Luís foi transmitida com dificuldade à turma, talvez pela dificuldade em expressar o seu raciocínio e este ser compreendido pelos colegas. Acrescendo ainda de um fator importante, quem foi completar a explicação ao quadro foi o Diogo e não o Eduardo.

Na questão 1. g), no trabalho escrito, leram e interpretaram conjuntamente a questão e chegaram à solução aplicando a regra geral "o número da figura vezes o n.º da figura". Assim quando questionados sobre a área do triângulo 30 o Zé respondeu de imediato "agora estamos a fazer a área do 30. Podemos fazer igual a essa mas com 30. 30x30". O Luís escreveu, apresentando a seguinte resposta escrita,

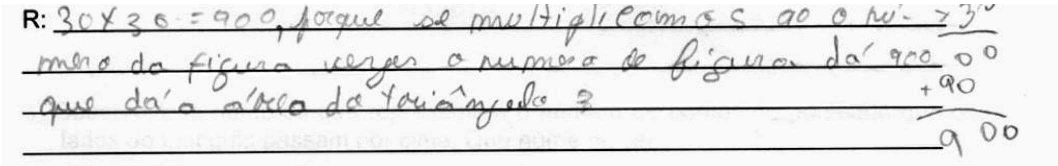

R: 30x30 = 900, porque se multiplicamos ao o nu-
mero da figura vezes o numero da figura da' 900
que da' a área do triângulo 3

Fig. 26 – Resposta à questão 1 g)

Mostrando assim que conseguiram compreender. A resolução apresentada (fig. 26) está correta e efetuou-se considerando todos os resultados que foram obtendo. No entanto, em vez de se referir ao triângulo 30 escreveu 3.

Verificou-se que o Luís teve a preocupação de se certificar que a regra por eles encontrada era geral "da fig. 8 é 8x8 porque estive a ver nas figuras de trás e experimentamos e o número da figura vezes o n.º da figura dava o valor da área!". Enquanto o Luís escrevia, o Zé já estava a pensar na seguinte e disse: "Multiplicamos 30x30 e deu 900. Agora o que complica é a g." [referindo-se à questão h].

Na questão 1.h) o argumento apresentado para justificar a estratégia não foi rigoroso e nem completo. Parece que o Luís e o Zé quiseram terminar rapidamente a tarefa. Segundo eles porque já não tinham tempo, e segundo os registos áudio mal o Zé exclama a dificuldade que terá que enfrentar ouve-se a professora "Acabou o tempo…". Na entrevista confirmam isso mesmo,

> Inv. – Então falta a última. Gostava que me explicassem melhor o cálculo da área.
> Luís – A professora disse que era para acabar era para acabar e eu pus uma resposta rápida.
> Zé – Uma resposta rápida que a resposta 8 não é muito pequena!
> Luís – Era para acabar! (02.02.2011).

Ao serem interpelados para esclarecerem porque achavam que convencia os colegas. Segundo eles (2.02.2011),

> Luís – A professora disse que era para acabar e eu pus uma resposta rápida.
> Zé – Uma resposta rápida que a resposta 8 não é muito pequena!
> Luís – Era para acabar!
> Inv. – Por isso escreveste que era fácil. Agora digam porque é que calcularam a área dessa forma.
> Luís – Porque estava a experimentar e tentei 4x4 e dava.
> Inv. – E desta forma.
> Luís – Sim, a base é o dobro menos 1 e este aqui acho que é o n.º de quadrados… "chiça" 5x2 dava 10 menos 1 dava 9.Aqui é 9,7,5,3,1.
> Luís – São números ímpares.
> Inv. – Então para calcular a área também podiam somar o quê?
> Zé – A sequência dos números ímpares.
> Inv. – Até onde? …
> Zé – O Luís disse à pouco. É até ao dobro da… figura menos 1.
> Inv. – Porquê!?
> Zé – Era outra forma de saber mas demorava mais tempo.

Os argumentos apresentados pelo Zé e pelo Luís nem sempre foram convincentes porque ou o Luís não conseguia transmitir o seu raciocínio de um modo simples ou o Zé não o queria ouvir porque achava que o dele era melhor.

Luís – Este estúpido deste cérebro tem o raciocínio meio estragado…
Zé – Então diz! O que esse estúpido desse cérebro meio estragado…
Luís – [ri] Tipo no triângulo 2 tem mais um dois, um dois, um dois … sempre…1 2, 12, 1 2. Aqui na figura três continuas a ter um, dois, três; 1,2,3;1,2,3…
Zé – Não pode! Estás louco?!
Luís – Hum, era meio estragado…
Zé – Não pode… olha 1,2,3,4
Luís – Mas para já resultou…
Zé – Tu, já contas-te este aqui por isso não podes contar isto aqui nesta vez.
Luís – Pensava que era este tipo de palito…mas dá na mesma.
Zé – Não dá!
Luís – Mas dá na mesma. Deixa-me contar.
Zé – Não dá, não dá nada.
Luís – Posso dar a minha opinião?
Zé – Pode, dizer para ti. Mas para que é que vais contar uma que não conta para nada!
Luís – Já sei.
Zé – Então diz.
Luís – Tem aqui 4, por exemplo na figura 4 vai ter 1,2,3,4 e aquele 1 não contamos, contamos um, dois, três e quatro! Contamos aquele também.
Zé – Não dá! Tu estás a contar assim! Assim, 1,2,3,4 mas aqui só vai ter 3 e aqui vai ter 2…
Luís – Acho que era...
Zé – Acho que descobri! Olha, figura 3 mais 1 vai dar 4. Não dá?! 1,2,3, 4, não dá?
Luís – Sim. Aquele o 1 também conta?
Zé – Depois vai ter menos um 1,2,3 e depois ainda vai decrescer outro 1, 2.
Luís – E é esse?
Zé – Três mais um?
Luís – 3+1 é quatro.
Zé – 1,2,3,4 e depois mais um.
Luís – Ó fogo!...
Zé – Estamos a brincar? E depois menos um. 1,2,3 e depois menos um outra vez. Este aqui… nesta vez este aqui vai contar. Não vai? Este, aqui, este aqui nesta vez já não vai contar. Pois não? Vai ser estes três.
Luís – Era o que eu estava a pensar.
Zé – Não mas tu estavas a contar estes e depois…
Luís – Mas era o que eu queria dizer…
Zé – Então vai ser 100, 99 e 98.
Luís – Era o que eu estava a dizer, mas estava mal no… não sei explicar!
Zé – Não mas tu estavas a contar 4,4,4.
Luís – Não, não estava. Posso dizer como estava a contar? 1,2,3 e aqui 1,2,3 e aqui 1,2,3 e nesta 1,2,3,4; 1,2,3,4 e aqui 1,2,3,4. Aqui 1,2; 1,2; 1,2.
Zé – Deixa estar! O meu dá. Não dá?
Luís – Dá. (31.01.2011).

No trabalho escrito, apresentaram um raciocínio correto mediante o trabalho desenvolvido anteriormente e que consideravam que deviam registar.

Em algumas das questões o par esteve em concordância não existindo necessidade de recorrer à argumentação colaborativa para encontrar o melhor raciocínio para resolver a questão.

Na questão h) eles escreveram que convencia com base na verificação do seu raciocínio nos outros triângulos, ficando assim esclarecidos,

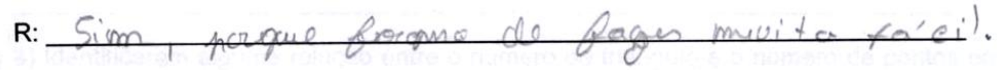

R: Sim, porque foram de fazer muito fácil).

Fig. 27 – Resposta à questão 1 h)

O par esteve sempre envolvido na tarefa até à questão f). O Zé sentiu dificuldades na interpretação desta e começou a brincar pedindo ao seu colega “escreve à sorte” para terminarem a tarefa. Sendo necessário a ajuda da investigadora para terminarem a tarefa. O Zé a partir, aproximadamente, dos 50 minutos de tarefa começa a dispersar e ter que fazer mais que uma coisa ao mesmo tempo. Primeiro o objetivo passa por despachar a tarefa até porque o que ele gosta mesmo é de cálculos e não de ter que justificar e dizer como pensou e ainda por cima convencer o colega de que como ele pensou é melhor.

Durante a tarefa o nível de desempenho global dos alunos ao nível da argumentação colaborativa foi médio.

Surgiram raros momentos de argumentação agressiva,

Zé – Não pode! Estás louco?!
Luís – Hum, era meio estragado…
Zé – Não pode… olha 1,2,3,4
Luís – Mas para já resultou…
Zé – Tu, já contas-te este aqui por isso não podes contar isto aqui nesta vez.
Luís – Pensava que era este tipo de palito…mas dá na mesma.
Zé – Não dá!
Luís – Mas dá na mesma. Deixa-me contar.
Zé – Não dá, não dá nada.
Luís – Posso dar a minha opinião?
Zé – Pode, dizer para ti. Mas para que é que vais contar uma que não conta para nada!
Luís – Já sei.
Zé – Então diz. (31.01.2011).

Estiveram quase sempre envolvidos na tarefa e tentaram trabalhar em conjunto para resolver a mesma questão e, por vezes, souberam ouvir, raciocinar e refletir.

Zé – Não pode… olha 1,2,3,4.
Luís – Mas para já resultou…
Zé – Tu, já contas-te este aqui por isso não podes contar isto aqui nesta vez.
Luís – Pensava que era este tipo de palito…mas dá na mesma.
Zé – Não dá!
Luís – Mas dá na mesma. Deixa-me contar.
Zé – Não dá, não dá nada.
Luís – Posso dar a minha opinião?
Zé – Pode, dizer para ti. Mas para que é que vais contar uma que não conta para nada!
Luís – Já sei.
Zé – Então diz.
Luís – Tem aqui 4, por exemplo na figura 4 vai ter 1,2,3,4 e aquele 1 não contamos, contamos um, dois, três e quatro! Contamos aquele também.
Zé – Não dá! Tu estás a contar assim! Assim, 1,2,3,4 mas aqui só vai ter 3 e aqui vai ter 2…
Luís – Acho que era...
Zé – Acho que descobri! Olha, figura 3 mais 1 vai dar 4. Não dá?! 1,2,3, 4, não dá?
Luís – Sim. Aquele o 1 também conta?

Zé – Depois vai ter menos um 1,2,3 e depois ainda vai decrescer outro 1, 2
Luís – E é esse?
Zé – Três mais um?
Luís – 3+1 é quatro.
Zé – 1,2,3,4 e depois mais um.
Luís – Ó fogo!...
Zé – Estamos a brincar? E depois menos um. 1,2,3 e depois menos um outra vez. Este aqui … nesta vez este aqui vai contar. Não vai? Este, aqui, este aqui nesta vez já não vai contar. Pois não? Vai ser estes três.
Luís – Era o que eu estava a pensar.
Zé – Não mas tu estavas a contar estes e depois…
Luís – Mas era o que eu queria dizer…
Zé – Então vai ser 100, 99 e 98.
Luís – Era o que eu estava a dizer, mas estava mal no… não sei explicar!
Zé – Não mas tu estavas a contar 4,4,4.
Luís – Não, não estava. Posso dizer como estava a contar? 1,2,3 e aqui 1,2,3 e aqui 1,2,3 e nesta 1,2,3,4; 1,2,3,4 e aqui 1,2,3,4. Aqui 1,2; 1,2; 1,2.
Zé – Deixa estar! O meu dá. Não dá?
Luís – Dá.
Zé – Tu desenhas esse?
Luís – Os dois triângulos? (31.01.2011).

Ao longo desta tarefa este par teve algumas dificuldades devido à transmissão do seu raciocínio ao seu colega. No início da resolução da tarefa, o Luís começou a analisa-la levando o Zé a seguir o seu raciocínio.

Parece verificar-se níveis de concentração, capacidade de transmissão do raciocínio e de tempo de trabalho bastante diferentes entre os elementos do par.

Verificaram-se algumas dificuldades colocar o seu raciocínio por escrito, principalmente ao nível da generalização. O diálogo em grande grupo revelou-se importante para os alunos exporem as suas formas de pensar.

Anexo G

Conceções

	Par A				Par B			
	Diogo		Eduardo		Luís		Zé	
Questões	**1.º**	**2.º**	**1.º**	**2.º**	**1.º**	**2.º**	**1.º**	**2.º**
1. Todos os alunos conseguem aprender Matemática.	Ct	Ct	C	C	D	C	C	Ct
2. Não tenho jeito para a Matemática.	Dt	Dt	Ct	C	Dt	D	Dt	D
3. Se me empenhar, consigo aprender Matemática.	Ct	Ct	D	C	C	Ct	Ct	Ct
4. A Matemática é muito difícil.	D	Dt	Dt	Dt	Dt	D	Dt	D
5. Nunca fui bom aluno(a) a Matemática.	Dt	Dt	C	Dt	Dt	D	D	D
6. Mesmo quando estudo não entendo a Matemática.	Dt	D	Ct	D	D	D	Dt	D
7. A capacidade para aprender a Matemática nasce com as pessoas	D	Dt	Ct	Dt	D	C	Dt	C
8. Na Matemática não se pode questionar, argumentar, ou fazer interpretações pessoais.	Dt	D	Ct	Dt	D	D	Dt	D
9. Quando te dizem que vais ter a aula de Matemática lembras-te que vais fazer cálculos.	C	D	Ct	D	C	C	C	Ct
10. Quando te falam em Matemática lembras-te de problemas difíceis.	D	D	Dt	D	D	C	D	C
11. O teu professor gosta de dar aulas de Matemática.	Ct	Ct	Ct	Ct	Ct	Ct	Ct	Ct
12. O conhecimento matemático é fixo e imutável (não se altera).	D	D	Dt	Dt	D	D?	Dt	D
13. O trabalho a pares ajuda-me a perceber melhor os problemas.	Ct	Ct	Ct	D	C	D	C	Ct
14. Só o professor é capaz de transmitir conhecimento matemático.	D	D	Ct	D	D	C?	Dt	Dt
15. Os alunos conseguem criar conhecimento matemático.	C	Ct	D	C	C	C	C	Ct

Legenda: Dt – discordo totalmente; d – discordo; C – concordo; Ct – concordo totalmente; ? – o aluno revelou hesitação ao rodear a resposta.