INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Maria de Lurdes Fernandes de Amorim

CONTRIBUTO DOS PADRÕES NO DESENVOLVIMENTO DE CAPACIDADES TRANSVERSAIS EM MATEMÁTICA

Um estudo no 5.º ano de escolaridade

Mestrado em Educação / Didática da Matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Maria Isabel Piteira Vale

julho de 2014

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Isabel Vale, pelo apoio, sugestões, comentários, críticas e amizade;

À minha filha, pela paciência, apoio e compreensão, não só durante este estudo mas durante todo o curso de Mestrado;

À minha sobrinha Joana Pires pelo apoio, ajuda e contributo;

À Carla Ferreira pela sua disponibilidade e ajuda;

Ao Diretor do Agrupamento de Escolas, onde decorreu o estudo, pelo apoio, aceitação e compreensão;

Aos professores e aos alunos que participaram neste estudo e o tornaram possível.

RESUMO

Este estudo dedica especial atenção à resolução de problemas e à procura de padrões, tarefas bastante poderosas no desenvolvimento da capacidade matemática dos alunos. O seu principal objetivo é analisar as estratégias e representações que os alunos utilizam em tarefas de exploração de padrões e suas dificuldades, bem como as implicações no desenvolvimento das capacidades transversais.

Para aprofundar o conhecimento do problema em questão definiram-se as seguintes questões: i) Que papel atribui o aluno às diferentes representações na resolução de tarefas que envolvam a exploração de padrões? ii) Que estratégias utilizam os alunos na resolução de tarefas que envolvam a descoberta de padrões? iii) Como se podem caraterizar as principais dificuldades experienciadas pelos alunos na descoberta de padrões? iv) Como se pode caraterizar a contribuição da descoberta do padrão para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos?

Nesta investigação usou-se uma metodologia qualitativa, baseada num estudo de caso que acompanhou dois alunos no contexto de uma turma do 5.º ano de escolaridade. A recolha de dados baseou-se na análise de documentos, observação participante, realização de entrevistas, conversas e notas de campo.

A análise de dados permitiu verificar que os alunos realizaram as tarefas com sucesso revelando um grande entusiasmo no trabalho com padrões. Durante a resolução atenderam sempre às caraterísticas do problema, recorrendo tanto a informações numéricas, como geométricas. Os alunos recorreram a diferentes representações para descrever o padrão, fator este que se revelou importante no sucesso da sua resolução.

Constatou-se, ainda que a maior dificuldade dos alunos foi a análise e registo de dados, bem como a mobilização dos conhecimentos. Os alunos revelaram compreender e descrever oralmente o padrão, contudo, sentiram dificuldade em fazê-lo por escrito. Verificou-se, também, que, apesar de conseguirem descrever e continuar o padrão, nem sempre mobilizaram os conceitos matemáticos estudados anteriormente na sua resolução.

As tarefas propostas permitiram aos alunos a aplicação de conceitos matemáticos privilegiando a comunicação como forma de justificar o seu raciocínio.

Palavras-chave: currículo, padrões, resolução de problemas, raciocínio, comunicação.

ABSTRACT

This study focuses on problem solving and the search for patterns, powerful tasks in the development of the students´ mathematical ability. Its main goal is to analyze the strategies and representations used by students in the exploration of patterns´ tasks and their difficulties, as well as the implications in the development of transversal skills.

In order to deepen the understanding of the problem the following questions were set: i) Which role do the students give to the different representations involving patterns exploration? ii) Which strategies do the students use in order to find out patterns? iii) How can we characterize the difficulties they experience with the finding of these new patterns? iv) How can we characterize the contribution of the pattern to the development of the students´ skills?

In this study a quality methodology has been used, based on a case study, following two students in the context of the 5^{th} grade. The gathering of data was based upon documents analysis, participating observation, interviews, conversations and field notes.

The data analysis allowed to realize that students accomplished certain tasks successfully, showing great enthusiasm when working with patterns. During the resolution of tasks, they always considered the patterns of the problems, also using numerical, and geometrical information. Students used different representations to describe the pattern, which has revealed to be important for its successful resolution.

It has been realized that the students´ greatest difficulty was the analysis and the registration of data, as well as the use of different knowledge. They were able to understand and describe the pattern orally, however, they had some difficulty to express it in writing.

It was also, evident, that the student´s didn´t always use knowledge previously acquired in their Mathematics lessons to solve the problems.

The tasks set allowed the students to apply mathematical concepts emphasizing communication as a way to justify their reasoning.

Keywords: curriculum, patterns, problem solving, reasoning, communication.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

- APM – Associação de Professores de Matemática
- ME – Ministério da Educação
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics
- PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico
- DGIDC – Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular
- DEB – Departamento de Educação Básica

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo, dividido em três secções, será apresentado o tema em estudo e sua relevância, definido o problema, bem como as questões que o orientam e, por fim, será feita uma organização geral do trabalho.

Contexto e relevância do estudo

O presente estudo desenvolve-se numa escola do distrito de Braga, da qual faço parte do quadro de agrupamento desde o ano de 2005.

Confrontada com a possibilidade de estar envolvida na implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB), no ano letivo 2010/2011, na escola onde exerço funções, surge a possibilidade de desenvolver este estudo com os meus alunos do 5.º ano de escolaridade. Por outro lado, surge também a necessidade de refletir acerca do ensino e aprendizagem da Matemática, nas metodologias de ensino e tipo de tarefas a implementar nas aulas, que permitissem desenvolver as capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática.

Constitui também um fator de relevância para este estudo compreender as dificuldades e estratégias apresentadas pelos alunos na resolução de problemas, que envolvam a exploração de padrões, bem como compreender qual o contributo que estas tarefas podem dar no desenvolvimento das capacidades transversais.

Ao longo dos tempos, a Matemática ocupou sempre um lugar de relevo no currículo, sendo considerada uma das mais antigas disciplinas escolares. A Matemática, além de ser uma ciência que lida com objetos e relações abstratas, é uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação do mundo natural e social e é um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico [PMEB, (ME, 2007)], a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a demonstração são algumas das suas dimensões. No seu desenvolvimento criativo, a atividade matemática convoca capacidades cognitivas, nomeadamente, o raciocínio, a imaginação e a intuição.

Atendendo a que vivemos numa sociedade em constante mudança, e que as exigências são cada vez maiores, os alunos necessitam de uma educação matemática de qualidade, que lhes permita a realização pessoal e profissional.

Considero fundamental um trabalho de equipa entre todos os intervenientes no processo educativo, professores, pais e encarregados de educação, alunos, órgãos de gestão e todos os colaboradores neste processo educativo, de modo a criar salas de aula onde os alunos aprendem e compreendem noções matemáticas em ambientes desafiadores apoiados pela tecnologia. Hoje, mais do que nunca, a Matemática está presente na ciência e tecnologia, na arte, em muitas profissões e nas várias atividades do dia-a-dia.

Ao longo do meu percurso profissional, com alunos do 2.º ciclo do ensino básico, verifiquei que, cada vez mais, a Matemática contribui para o desenvolvimento da atividade humana e é um potencial contributo no desenvolvimento pessoal do aluno, proporcionando uma formação matemática necessária às outras disciplinas.

Esta ideia vai de encontro às duas finalidades fundamentais do ensino da Matemática, que constam no PMEB (ME, 2007):

> promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados, e, desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Ao longo dos anos, tem-se verificado um declínio no interesse e na capacidade matemática dos alunos, apesar dos resultados animadores nos últimos testes internacionais (PISA, TIMSS). Neste sentido, se queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, devemos facultar-lhes experiências que se relacionem com a sua realidade. O estudo dos padrões vai de encontro a este propósito, bem presente no PMEB (ME, 2007), que, contrariamente ao programa dos anos noventa prevê a abordagem da temática dos padrões de forma explícita, em todos os níveis de ensino. Também as orientações curriculares no pré-escolar (ME-DEB,1997) salientam que o desenvolvimento do raciocínio lógico supõe a oportunidade de trabalhar com padrões e sequências.

São vários os fatores que contribuíram na realização deste estudo assumindo relevância e pertinência na atividade profissional do professor de Matemática, uma vez que: pode ajudar a compreender o modo como os alunos trabalham com padrões e regularidades, bem como as estratégias que utilizam; pode ajudar a analisar o modo como os alunos fazem a ligação entre os padrões e regularidades e os outros temas matemáticos; pode ajudar o professor a compreender quais as tarefas a aplicar em sala de aula que vão de encontro às orientações curriculares, e pode ajudar o professor a compreender qual o contributo que os padrões podem dar no desenvolvimento das capacidades transversais.

No âmbito do projeto *Matemática e padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores,* foram identificadas grandes potencialidades dos padrões ao nível do desenvolvimento curricular, ao possibilitar uma variedade de conexões dentro e fora da Matemática (Vale & Pimentel, 2011).

O PMEB (ME, 2007) constitui um reajustamento do Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) e introduziu mudanças significativas no ensino da Matemática que são comuns aos três ciclos do ensino básico. Nas finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática (Anexo 7, tabelas 2 e 3), são apresentadas formulações novas que procuram melhorar a clareza e o conteúdo das principais metas para o ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico, bem como a sua articulação entre ciclos, de acordo com o que está estipulado no Currículo Nacional. Este programa propõe, além dos vários temas matemáticos, que se dê uma atenção especial às três capacidades transversais: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática (Anexo 7, tabela 4). Também está explícito no mesmo que a resolução de problemas é uma atividade para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Refere, ainda, que o raciocínio matemático envolve a formulação e teste de conjeturas e, mais tarde, a sua demonstração. A comunicação também é realçada, na medida que permite ao aluno expressar as suas ideias, interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões.

Os padrões continuam a ocupar um lugar de destaque no currículo de Matemática, uma vez que potenciam um contexto propício para pensar matematicamente.

Como referem Vale, I., Pimentel T., Alvarenga D., e Fão A. (2011), muito do insucesso em Matemática deve-se ao facto de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. Aprende-se a pensar matematicamente quando se descobre padrões e se estabelece conexões. Este pressuposto está em consonância com as ideias expressas pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000).

O ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais, a aquisição de conhecimento e experiência em Matemática e sua integração em contextos diversificados, e o desenvolvimento de atitudes positivas face a esta ciência. Por sua vez, estas devem permitir aos alunos a compreensão de conceitos matemáticos, a capacidade de resolver e formular problemas, e de argumentar e comunicar matematicamente.

Assim, os objetivos gerais para o ensino da Matemática surgem formulados em termos de resultados esperados. Além do "saber", do "saber-fazer" e do "saber porquê" de factos e procedimentos básicos da Matemática, é destacada a resolução de problemas, a comunicação, as representações e as conexões.

Tendo em vista as competências a desenvolver na escolaridade básica, os alunos devem compreender conceitos, algoritmos e procedimentos, explicitar o seu raciocínio justificando as suas afirmações e estabelecendo conexões, e ser autónomo na resolução de problemas e exploração de regularidades.

O PMEB (ME, 2007) introduz mudanças nas finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática, apresenta formulações completamente novas como principais metas para o ensino e aprendizagem desta disciplina, bem como a sua articulação interna.

No tema Números e Operações, o aluno é levado a usar a representação mais adequada, passando com facilidade de uma representação para outra.

O tema Álgebra não surge no 1.º ciclo, contudo aparecem as ideias algébricas no trabalho com sequências. No 2.º ciclo, já aparece como um tema matemático individualizado, onde se aprofunda o estudo das relações e regularidades. No 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica.

A maior alteração relativamente ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos, que permite aumentar o sucesso nas aprendizagens posteriores.

Uma outra alteração relativamente ao programa anterior é o estudo de diversas transformações geométricas, logo desde o 1.º ciclo. A Medida também assume grande importância no ponto de vista das conexões entre outros temas matemáticos.

Em relação ao tema Organização e Tratamento de Dados, este programa vai mais longe que o anterior nas formas de representação de dados.

A aprendizagem da Matemática pressupõe que os alunos trabalhem de diferentes formas na sala de aula: individualmente – lendo, interpretando e resolvendo tarefas matemáticas sozinhos; em pares – na resolução de pequenas tarefas; em grupo – no desenvolvimento de pequenos projetos, resolução de um problema ou na realização de uma investigação matemática; coletivamente em turma – partilhando, discutindo e sistematizando conhecimentos e ideias matemáticas.

Na escola básica e em qualquer dos ciclos, a Matemática não pode e não deve ser trabalhada de uma forma isolada. A Matemática constitui uma área de saber plena de potencialidades, pelos seus aspetos específicos relativos ao raciocínio, à organização, à comunicação e à resolução de problemas. Isto só será possível se os alunos tiverem diversas oportunidades de viver experiências de aprendizagem adequadas e significativas.

O Currículo Nacional destaca a especificidade da Matemática, nomeadamente como a ciência das regularidades e da linguagem dos números, indo esta ideia de encontro com o PMEB (ME, 2007), que prevê de uma forma explícita a abordagem da temática dos padrões na abordagem dos temas matemáticos transversais aos três ciclos de ensino. Salienta-se aqui, de um modo particular, a importância dos padrões na atividade matemática, nomeadamente na resolução de problemas.

Desta forma, pensa-se que o presente estudo pode contribuir significativamente para compreender de que modo a resolução de tarefas, que envolvam a exploração de padrões, contribui para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos.

Problema e questões de estudo

Este estudo decorreu numa turma do 5.º ano de escolaridade, na realização de tarefas de exploração de padrões, onde a opção metodológica escolhida foi a de estudo de caso qualitativo em ambiente natural de sala de aula.

Atendendo às atuais orientações curriculares e às ideias referidas anteriormente, o presente estudo tem como principal objetivo analisar o trabalho dos alunos em tarefas que envolvam a exploração de padrões, bem como o potencial contributo que tais tarefas podem dar no desenvolvimento de capacidades transversais no 2.º ciclo do ensino básico.

No âmbito desta problemática foram formuladas as seguintes questões orientadas:

- Que papel atribui o aluno às diferentes representações na resolução de tarefas que envolvam a exploração de padrões?

- Que estratégias utilizam os alunos na resolução de tarefas que envolvam a descoberta de padrões?

- Como se podem caraterizar as principais dificuldades experienciadas pelos alunos na descoberta de padrões?

- Como se pode caraterizar a contribuição da descoberta do padrão para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos?

Para investigar estas questões, elaborou-se uma proposta didática, na qual privilegiará a resolução de tarefas, cuja resposta envolva o conhecimento de aspetos que, de acordo com Devlin (2002), se enquadram na Matemática como a ciência dos padrões.

Organização geral do estudo

O presente trabalho é constituído por cinco capítulos, seguidos das Referências Bibliográficas e dos Anexos.

No primeiro capítulo, faz-se uma reflexão sobre o tema em estudo e a sua pertinência, apresentando-se também o problema que se pretende estudar e as questões que o orientam, terminando com uma descrição da organização geral do relato escrito. No segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica em que se baseou o estudo. Foram abordadas as capacidades cognitivas de ordem superior, como a resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões, o raciocínio e a comunicação, fazendo-se também um enquadramento curricular do mesmo. Posteriormente é feita uma análise às mudanças que o PMEB (ME, 2007) introduziu no processo de ensino e aprendizagem, com a referência aos padrões e sequências, e às capacidades transversais. Em seguida, destaca-se a importância da comunicação, do raciocínio e das representações em tarefas que envolvem a exploração de padrões. Por último, apresenta-se uma proposta didática utilizada neste estudo, bem como uma referência a alguns estudos empíricos.

No que se refere ao terceiro capítulo, apresenta-se a metodologia seguida neste estudo, onde se referem as opções metodológicas, os procedimentos adotados na escolha dos casos e planificação do estudo e as técnicas usadas na recolha e análise dos dados. Segue-se o quarto capítulo, onde se descreve a turma e os alunos-caso em particular, em relação ao seu desempenho durante a proposta didática.

Por último, no quinto capítulo, é feita uma síntese dos resultados obtidos e são apresentadas as conclusões, que resultaram da análise realizada sobre os dados recolhidos, sendo, ainda, referidas algumas limitações e recomendações para estudos futuros.

CAPÍTULO II - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo procurará fazer um enquadramento teórico das temáticas em que incide esta investigação, que será orientada com o objetivo de analisar o trabalho dos alunos na resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões.

A primeira temática focará as mudanças que ultimamente têm ocorrido na nossa sociedade e que, em grande parte, estão relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Em seguida, será feita uma abordagem à resolução de problemas, por se considerar um eixo principal em torno do qual gira todo o ensino da Matemática, procurando compreender o seu significado. Posteriormente serão abordadas algumas questões relacionadas com a exploração de padrões, em particular no 2.º ciclo do ensino básico. Inicialmente será apresentado um conceito de padrão, e será referido o papel das representações e da comunicação na exploração de padrões. Em seguida, será feita a análise de documentos curriculares relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática, no que se refere aos padrões. No final deste capítulo, procurar-se-á discutir de que modo a resolução de problemas, e a exploração de padrões, contribuem para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos.

Matemática: o ensino e aprendizagem e a mudança

A primeira manifestação do que hoje chamamos de atividade matemática foi contar e medir, e foi sendo progressivamente alargada desde que a Matemática se constituiu como domínio autónomo ao estudo dos números e operações, das figuras geométricas, das estruturas e regularidades, da variação do acaso e da incerteza.

Numa conferência realizada pelo grande matemático Henri Poincaré, em 1908, este comentou o facto de muitas pessoas inteligentes e dotadas de excelente memória cometerem erros ou terem dificuldade em compreender raciocínios matemáticos.

Na sua história, a Matemática sofreu uma grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas, na sua relação com a atividade humana. A Matemática surge identificada com um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento.

Esta ciência tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade e tem ocupado um lugar central nos currículos escolares. A necessidade de se “entender” e “ser capaz” de a utilizar na vida diária e nos locais de trabalho nunca foi tão grande como nos dias de hoje.

Considerando a Matemática como uma das ciências mais antigas e das mais antigas disciplinas escolares, ela ocupou sempre, ao longo dos tempos, um lugar de relevo no currículo.

No início do século XX, o ensino da Matemática foi caraterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de factos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão e entender o que faziam. Nessa época começou-se a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática. Foi no início da década de setenta que foi dada importância à resolução de problemas, mas só no final dos anos setenta ela emerge e ganha espaço no mundo inteiro.

Verifica-se uma grande necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que podem levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática. Foi na década de oitenta que surgiu um interesse crescente em fazer da Resolução de Problemas um foco do currículo de Matemática (e.g. APM, 1988; NCTM, 1980/1985).

É atribuída ênfase nos aspetos do raciocínio matemático, ao longo de toda a escolaridade, no sentido de desempenhar um papel essencial para que se torne matematicamente competente e ao mesmo tempo esteja melhor preparado para contactar com outros aspetos da Matemática.

Outro aspeto relevante nesta ciência é o modo como, no contexto da atividade matemática, as afirmações são formuladas e justificadas, através de uma linguagem precisa. A experiência em tarefas que implicam a comunicação de ideias e de descobertas matemáticas deve corresponder a uma necessidade sentida e não imposta.

Ser capaz de comunicar matematicamente, tanto por escrito como oralmente, constitui outro aspeto essencial da competência matemática que todos devem desenvolver.

O PMEB (ME, 2007) constitui uma oportunidade de mudança curricular em Portugal, no ensino da Matemática. Segundo ele, a escola deve proporcionar uma formação que permita aos alunos compreender e utilizar a Matemática, nas diferentes disciplinas em que ela é necessária, mas igualmente na profissão, na vida pessoal e em sociedade; o reconhecimento do seu contributo para o desenvolvimento científico e tecnológico e da sua importância cultural e social em geral; uma formação que promova aos alunos uma visão adequada da Matemática e da atividade matemática, e uma formação que promova nos alunos uma relação positiva com a disciplina e a confirmação nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela.

Nesta sociedade cada vez mais exigente e em constante mudança, são colocados novos desafios e novos modelos de ensino e de aprendizagem. Desenvolvimentos teóricos que se centram mais na construção do conhecimento do que na sua mera transmissão, têm permitido uma visão alternativa do processo de aprendizagem.

As transformações da sociedade em que vivemos exigem que todos os alunos se tornem matematicamente alfabetizados, de modo a que se possam comportar com eficácia num mundo tecnológico, e reconheçam a importância e a necessidade da Matemática para entender o mundo em que vivem. O papel dos educadores e a noção que os alunos têm sobre a informação que precisam de conhecer, está a revolucionar o conceito de sala de aula. A tecnologia que hoje todos devem ter oportunidade de aprender a utilizar, em relação com a Matemática escolar, inclui não só a calculadora elementar, mas os modelos científicos e gráficos das calculadoras modernas e, ainda, o computador. Uma iniciação ao trabalho com a folha de cálculo e com programas de geometria dinâmica deve fazer parte da experiência de aprendizagem de todos os alunos.

A competência matemática que todos os cidadãos devem desenvolver não se limita às situações que envolvem raciocínio numérico. Quando observamos a Natureza, uma obra de arte ou um artefacto construído pelos seres humanos, ou simplesmente queremos dar alguma explicação sobre um mapa ou ver relações geométricas, há uma tendência para procurar regularidades e perceber a estrutura que está presente na situação. Como refere Devlin (1998) as pessoas não conseguem entender que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas mas sim a compreensão de padrões. Em situações muito diferentes e recorrendo a objetos matemáticos distintos, a competência matemática está relacionada com essa tendência para *ver* a estrutura abstrata por detrás daquilo que observamos.

Se analisarmos os currículos, apercebemo-nos de que o estudo dos padrões atravessa todos os programas de Matemática escolares, desde o pré-escolar até ao ensino secundário. Os padrões encontram-se em várias formas na vida de todos os dias e ao longo da matemática escolar, e, podem constituir um tema unificador. O estudo de padrões apoia a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjeturas, previsões e generalizações.

No entanto, apesar da importância que os padrões têm em Matemática e nos diferentes temas que lhe estão associados, foi, sobretudo, nas últimas décadas que mais ênfase se deu, principalmente quando os matemáticos, na procura de uma definição mais atual para Matemática, chegaram à ideia de que ela é a ciência dos padrões. Como refere Devlin, (1998, citado em Vale & Pimentel, 2009):

> o que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse um pouco mais criativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana.

O processo de ensino e aprendizagem é influenciado por vários aspetos e fatores sociais que dificilmente podem ser controlados. A interação entre o professor e o aluno é, assim, não só condicionada pelas decisões oficiais acerca das finalidades, conteúdos, métodos, avaliação e estrutura escolar, mas também depende das conceções dos professores sobre a Matemática, o ensino e a aprendizagem e conceções dos alunos nestes domínios.

A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas que o professor usa na sala de aula (Doyle, 1988). Tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem concetualmente e que os estimulem a fazer conexões, representam uma oportunidade diferente de pensamento para os alunos. O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática.

De acordo com o princípio da aprendizagem NCTM (2007):

> quando desafiados com tarefas criteriosamente selecionadas, os alunos tornam-se confiantes na sua capacidade de lidar com problemas difíceis, ansiosos por chegar à resposta certa por eles mesmos, flexíveis na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de caminhos alternativos, com vontade e perseverança.

Como indica o Currículo Nacional (2001), o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos, etc. Na mesma linha está o Programa de Matemática (ME, 2007), quando apresenta diversas orientações metodológicas gerais, com destaque para a necessidade da diversificação de tarefas.

A disciplina de Matemática no ensino básico, deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, deve proporcionar a formação matemática necessária a outras disciplinas e ao prosseguimento de estudos em outras áreas e na própria Matemática, e deve contribuir também para a sua plena realização na participação e desempenho social, e na aprendizagem ao longo da vida.

Ao professor compete a mudança curricular ao nível da sala de aula. Este pode promover a mudança proporcionando situações de aprendizagem, recorrendo a meios e recursos apropriados que o ajude a atingir os objetivos inicialmente propostos.

É neste contexto que as tarefas de investigação assumem um suporte essencial para a mudança. Em vez de exercícios para os alunos praticarem processos já conhecidos, propõem-se tarefas em que eles têm de definir estratégias e argumentar soluções.

Pode mesmo considerar-se que a essência da Matemática consiste em descobrir padrões, ajudando deste modo os alunos a aprender uma Matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, proporcionando-lhes um ambiente que se relacione com a sua realidade e experiências. O estudo dos padrões vai de encontro a este propósito, que através do desenvolvimento e uso de estratégias cognitivas apoia a aprendizagem dos alunos, a descobrir relações, a encontrar conexões, a fazer conjeturas, previsões e generalizações.

A riqueza dos padrões reside na sua transversalidade, tanto ao nível dos conteúdos como das capacidades que promove nos alunos e também, na forte ligação que tem com a resolução de problemas.

Neste contexto, o presente estudo, dá uma especial atenção e relevância ao potencial contributo que os padrões podem dar no desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos, nomeadamente à resolução de problemas.

A exploração de padrões

Muito antes de entrar na escola, as crianças desenvolvem conceitos informais relacionados com padrões. Através de poemas e canções que se baseiam na repetição e crescimento de padrões, aprendem noções de sequencialidade nas suas ações ou em acontecimentos. Os padrões são um modo de os alunos reconhecerem ordem e organizarem o seu mundo, e são importantes em todos os aspetos da Matemática.

Considerando esta disciplina como a ciência dos padrões, a descoberta de padrões constitui um aspeto essencial desta ciência, como já foi referido. À medida que os alunos começam a compreender os padrões, percebem que a procura de um padrão é uma estratégia de resolução de problemas muito poderosa. Problemas com respostas numéricas simples facilmente se transformam em novas situações onde os alunos têm a possibilidade de conjeturar, construir padrões, generalizar e justificar factos e relações matemáticas.

A utilização dos padrões no ensino da Matemática pode ajudar os alunos a aprender uma Matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências (Borralho & Barbosa, 2009).

Pressupõe-se que a procura de padrões e regularidades permite formular generalizações, particularmente em contextos numéricos e geométricos, o que contribuirá para o desenvolvimento do raciocínio algébrico do aluno. Com base nesta ideia, Orton e Orton (1999) afirmam que os padrões são um dos caminhos possíveis quando pensamos desenvolver o pensamento algébrico. Ao propor tarefas que envolvem a descoberta de padrões, contribuímos também para o desenvolvimento do raciocínio e estabelecimento de conexões entre as diversas áreas da Matemática (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Nos primeiros anos de escolaridade, o raciocínio que as crianças utilizam nas aulas de Matemática é bastante informal. As primeiras tentativas de justificação envolverão estratégias de tentativa erro ou a experimentação. A demonstração por contradição também é possível com estas crianças. Desde cedo, as crianças podem aprender a refutar conjeturas através da identificação de contra exemplos. Em todos os níveis de ensino, os alunos irão raciocinar indutivamente a partir de padrões e de casos específicos (NCTM, 2000).

Conceito de padrão

Definir padrão tem-se mostrado um propósito difícil. Quando nos confrontamos com o termo padrão, pensamos, de imediato, em padrões visuais como os que se veem nos tecidos, papel de parede, pavimentações das ruas, ou ainda nas primeiras canções que aprendemos. Podemos estar a fazer compras, a ler, a jogar ou simplesmente a passear, a nossa mente procura de imediato padrões e estabelece relações.

Quando consultamos o dicionário, verificamos que há outros significados relacionados com padrão, sendo eles modelo, amostra, desenho, decorativo (...).

Na língua portuguesa um termo que aparece frequentemente associado a padrão é regularidade. Enquanto padrão aponta sobretudo para a unidade base que eventualmente se replica, de forma igual ou de acordo com alguma lei de formação, regularidade remete para a relação que existe entre os vários objetos. Dependendo do objeto que temos em conta, os padrões e regularidades surgem como complementares um do outro.

Na literatura, associado ao conceito de padrão, são usados termos, como, generalização, pavimentação, configuração, friso, ritmo, motivo, sequência, regularidade, ordem, repetição, (...). A literatura em inglês usa muitas vezes o termo "pattern", que associamos de imediato a "padrão".

Segundo Sawyer (1955), o conceito de padrão deve ser compreendido num sentido amplo, para que a mente consiga perceber todo o tipo de regularidade. Mas Davis e Hersh (1995), ajudam-nos a esclarecer o significado de padrão quando, além da ideia de regularidade, introduzem a invariância como ideia fundamental de padrão.

Usamos o termo padrão na Matemática quando queremos procurar ordem, estrutura, regularidade, repetição e simetria (Frobisher, Frobisher, Orton & Orton, 2007). Pimentel e Vale (2012) definem padrão como uma relação discernível, apreendida de modo pessoal, num arranjo de qualquer natureza, através de um processo mental que pode ser partilhado, e que corresponde a uma estrutura traduzível por uma lei matemática.

Entender a Matemática como a ciência dos padrões é uma ideia que já vem sido defendida, há muito tempo, por vários investigadores (e.g. Orton, 1999; Smith, 2003), tendo subjacente a ideia de que a essência da Matemática consiste em procurar padrões (Balmond, 2000).

Como se pode constatar através das ideias já referidas, a Matemática é a ciência dos padrões e esses padrões podem ser encontrados em qualquer parte: no universo físico, no mundo vivo ou mesmo nas nossas próprias mentes (Devlin, 2002). Ainda de acordo com este autor, pode-se encontrar padrões numéricos, de forma, de movimento ou comportamento, quer nas profundezas do espaço e do tempo, quer nas atividades mais ocultas da mente humana.

Através dos padrões matemáticos é possível explicar fenómenos ou ocorrências naturais ou não. É o caso dos flocos de neve, das romãs, de técnicas na área das telecomunicações e no papel de parede. Podemos também falar dos soalhos de linóleo, dos tecidos estampados, dos tapetes e das carpetes.

As crianças poderão aprender a reconhecer padrões matemáticos nos ritmos das canções, a identificar a forma hexagonal dos favos de mel e a contar o número de vezes que conseguem saltar à corda (NCTM, 2000).

A caraterística que mais interessa ao matemático é o facto de ele se repetir de forma regular até preencher completamente o plano. O próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão (Davis e Hersh, 1995).

A ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança. Em tudo o que vemos ou imaginamos que possa vir a acontecer, identificamos um padrão. Quando há um motivo que se repete ciclicamente, falamos de padrão de repetição. Se cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior, estamos perante um padrão de crescimento. Os padrões de repetição podem ser trabalhados desde o pré-escolar, podendo ser explorados de forma aprofundada em tópicos como a multiplicação, múltiplos e divisores, as relações numéricas e o raciocínio, e sobretudo nos processos de generalização. Estes padrões têm uma importância significativa tanto na descoberta de conceitos e propriedades como na resolução de problemas (e.g. Orton, 1999; Vale et al., 2009).

Neste trabalho optou-se pela definição de padrão, considerando as vertentes multifacetadas do termo em questão, tanto ao nível do mundo físico e mente humana, como aos conceitos matemáticos com ele relacionado. Esta abordagem privilegia o contexto figurativo dando especial atenção aos processos de pensamento superior que são parte essencial, não só da resolução de problemas, mas também do pensamento matemático.

O papel das representações

A forma pela qual as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como as pessoas compreendem e utilizam essas ideias. Muitas das representações, que hoje tomamos como garantidas, são o resultado de um aperfeiçoamento cultural, ocorrido ao longo de muitos anos. Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2000).

O termo representação refere-se à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática e à forma em si mesma. Algumas formas de representação têm feito parte da matemática escolar, desde há muito tempo.

Toda a atividade matemática necessita de recorrer a representações que incluem componentes verbais, concretas, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas, que descrevam diferentes aspetos do conceito (Vale, 2012).

No ensino da Matemática, em especial na Álgebra, são considerados quatro modos de representação: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica (Friendland & Tabach, 2001, citado por Vale, 2012). Só se poderá retirar todo o potencial de cada uma dessas representações, se, na exploração dos vários conceitos matemáticos recorrer a representações múltiplas, de modo a promover uma articulação entre as diferentes representações e a promover uma melhor compreensão dos conceitos. Nesta linha de pensamento, Tripathi (2008) sugere a utilização de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático, uma vez que permite maior flexibilidade na resolução de problemas.

Segundo as recomendações do NCTM (2000), as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos.

Os alunos deverão compreender que as representações escritas das ideias matemáticas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção de Matemática. É importante que aprendam a representar as suas ideias, ainda que não sejam as convencionais, de modo a facilitar quer a sua aprendizagem quer a comunicação das suas ideias.

As representações podem ajudar os alunos a organizarem o seu raciocínio. Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos poderão usar as representações nos registos que fazem do seu esforço para compreender a Matemática.

Ao longo do segundo e terceiro ciclos, as representações matemáticas dos alunos são, geralmente, de objetos e ações diretamente relacionadas com a sua experiência e poderão ser usadas para resolver problemas ou para enquadrar, esclarecer ou expandir uma ideia matemática. Os computadores e as calculadoras vêm mudar o que os alunos podem realizar com representações convencionais e ampliar o conjunto de representações com as quais podem trabalhar.

A importância da utilização de múltiplas representações deverá ser privilegiada ao longo da educação matemática dos alunos.

A investigação sobre a utilização de diferentes representações no ensino e aprendizagem da Matemática tem proporcionado um conjunto de evidências sobre os benefícios da utilização de múltiplas representações. A aprendizagem matemática deve incluir problemas que levem os alunos a pensar visualmente (Tripathi, 2008).

Investigações realizadas no âmbito da aprendizagem da álgebra, têm alertado para o envolvimento dos alunos, desde o pré-escolar, no trabalho com um grande número de experiências algébricas informais. Por sua vez estas envolvem pensar nas relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente através de diferentes representações, incluindo o recurso aos símbolos. Deste modo, os padrões proporcionam um contexto que, através das suas diferentes representações pode reduzir as dificuldades associadas ao ensino da álgebra, que ainda está muito ligado à manipulação simbólica (Lannin, 2005).

Segundo as orientações do PMEB (ME, 2007), as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação. Os alunos necessitam, por isso, de adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática no trabalho com números e as operações aritméticas, os objetos geométricos, os dados estatísticos, o simbolismo algébrico e a representação cartesiana ou outros tipos de gráficos, tabelas, diagramas e esquemas. Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. Antes das representações simbólicas, muitas vezes, é apropriado usar representações icónicas. Os alunos podem sentir a necessidade de representar os objetos e relações matemáticas, começando por desenvolver para isso as suas próprias representações não convencionais. À medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais.

No PMEB (ME, 2007), pode ler-se que um dos objetivos gerais desta disciplina nos três ciclos de escolaridade básica é o aluno conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capaz de as utilizar em diferentes situações e de selecionar a representação mais adequada à situação. Isto é, deve ser capaz de ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos e apresentar a informação em qualquer destas formas de representação; traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra; elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas e usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais.

Outro objetivo é o aluno ser capaz de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos.

O termo modelo tem sido utilizado como se fosse um sinónimo aproximado de representação. O termo modelo matemático significa uma representação matemática dos elementos e relações presentes numa versão idealizada de um fenómeno complexo. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para esclarecer e interpretar fenómenos e para resolver problemas.

Um grande número de estudos tem mostrado que o uso de representações visuais e concretas tem melhorado o desempenho na resolução de problemas.

Durante o processo de ensino e aprendizagem, o recurso a situações da vida real e as representações concretas e pictoriais, ajudam os alunos a compreender conceitos abstratos melhorando a interiorização e a visualização. Toda a atividade matemática necessita de recorrer a representações, sendo estas entidades usadas para explicar algo e que, usualmente, adquirem a forma de analogias, desenhos ou manipuláveis.

Um aspeto a ter em conta no trabalho com padrões diz respeito às representações. Podemos falar de representações numéricas, algébricas, verbais, pictóricas, tabulares ou até de objetos materiais. Cada representação assume um determinado papel, de acordo com o campo de estudo. No entanto, verifica-se que no campo da Matemática, a mesma representação aparece com designações diferentes.

As representações, de acordo com Goldin (2002), são elementos fundamentais no ensino e aprendizagem da Matemática, não somente porque o uso de um sistema de símbolos é muito importante em Matemática, a sintaxe e a semântica deles é rica, variada e universal, mas também por duas razões epistemológicas: a Matemática desempenha uma parte essencial na concetualização do mundo real; e a Matemática faz um largo uso de homomorfismos. Segundo este autor, uma representação é uma configuração que pode representar qualquer coisa de determinada maneira.

Dreyfus (1991), na atividade matemática, considera as representações simbólicas e as representações mentais. Enquanto a representação simbólica é escrita, ou falada, com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito, uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interatuar com o mundo exterior e que pode diferir de pessoa para pessoa. O uso de múltiplas representações para a compreensão de um conceito matemático é fundamental. A visualização é um dos processos, pelo qual as representações mentais podem aparecer.

Uma representação é uma forma de uma ideia que nos permite interpretar, comunicar e discutir a ideia com os outros. Deste modo, é importante ter muitas representações de um conceito, de modo a permitir o seu uso de uma forma flexível na resolução de problemas e, em particular, na exploração de padrões.

O professor, através das tarefas que seleciona para as suas aulas, leva os estudantes a *ver* relações e propriedades, e ao mesmo tempo suscitar diferentes estratégias de resolução, que envolvem também diferentes representações. A forma como se apresenta um problema pode levar a que uma simples tarefa aritmética se transforme numa tarefa algébrica, proporcionando a construção de padrões, a generalização e justificação de relações matemáticas.

De acordo com alguns autores (Lesh, Post & Beher, 1987; Tripathi, 2008), durante a aprendizagem matemática e a resolução de problemas podemos identificar cinco tipos de representações: contextual (situações da vida real); concreto (manipulável); semi-concreto (pictorial); verbal (linguagem); e simbólico (notação). A investigação, sobre a utilização de diferentes representações no ensino e aprendizagem da matemática, tem proporcionado evidências sobre os benefícios da utilização de múltiplas representações (Tripathi, 2008).

Vários estudos realizados neste âmbito têm mostrado que o uso de representações visuais e concretas tem melhorado o desempenho na resolução de problemas.

Os padrões no currículo de Matemática para a educação pré-escolar e para a Educação Básica

Na educação matemática escolar, as metas a atingir são exigentes, no sentido de formar uma sociedade com capacidade de pensar e raciocinar matematicamente, dotando-a de conhecimentos e procedimentos úteis.

Muito antes do ensino formal, as crianças desenvolvem conceitos relacionados com padrões, funções e álgebra.

Apesar das modificações curriculares apresentadas no Programa de Matemática, as orientações da investigação relativamente à importância que os padrões têm nesta disciplina e nos diferentes temas que lhe estão associados, não foram consideradas durante algum tempo.

Na década de 90, os padrões não apareceram nas orientações programáticas de matemática escolar. Foi sobretudo nas últimas décadas que mais ênfase se deu, sobretudo quando os matemáticos, na procura de um definição mais atual para a matemática, chegaram ao consenso de que a matemática é a ciência dos padrões (Devlin, 2002).

Ao nível da matemática escolar, quer investigadores quer documentos programáticos, têm alertado para a importância da exploração de padrões em qualquer nível de ensino.

Desde há muitos anos que o estudo dos padrões tem sido reconhecido, por muitos investigadores, como a essência da Matemática e parte fundamental no currículo e no ensino da matemática escolar (Devlin, 1998; Polya, 1945; NCTM, 2000).

De acordo com Vale (2009), apesar do papel significativo em Matemática, os padrões não têm sido um tema ao qual se tem dado grande importância nos currículos nacionais da Matemática escolar. Contudo, é notável que todas as provas de aferição elaboradas pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE,2001-2010), apresentam questões relacionadas com padrões, que vão além das recomendações programáticas, o que leva a considerar a sua importância.

Segundo as orientações curriculares para a Educação Pré-escolar (ME-DEB,1997), no domínio da Matemática, salienta que o desenvolvimento do raciocínio lógico supõe a oportunidade de encontrar e estabelecer padrões, ou seja, formar sequências que têm regras lógicas subjacentes.

Refere também que a expressão motora e musical podem facilitar a tomada de consciência da posição e orientação no espaço, a construção da noção de tempo e a descoberta de padrões rítmicos.

Relativamente à apropriação da noção de tempo, é introduzido outro termo relacionado com padrão – sucessão, quando são abordados os acontecimentos ao longo do dia, da semana e do mês.

A linguagem é também um sistema simbólico organizado que permite, desde cedo, às crianças aprenderem cantigas repetitivas, cânticos ritmados e poemas, baseados na repetição e crescimento de padrões.

No Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007), ao nível do 1.º ciclo, a Álgebra surge como um tópico de Números e Operações, onde é indicada a exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números. Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números e podem observar padrões de pontos, contribuindo este trabalho, em grande parte, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No domínio da Geometria e Medida, é dada ênfase à visualização e compreensão de propriedades de figuras geométricas. Sugerem que observar trabalhos de arte decorativa (azulejos, bordados e tapetes) pode entusiasmar os alunos a explorarem aspetos relacionados com simetrias e pavimentações e a aperceberem-se da beleza visual que a Matemática pode proporcionar.

No 2.º ciclo, no domínio dos Números e Operações, referem que a resolução de problemas, que incluam a investigação de regularidades numéricas, constitui um aspeto a privilegiar na didática dos números. O trabalho com sequências numéricas, em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de números, estabelece uma ponte concetual importante entre os três ciclos do ensino básico. No tema Geometria, os alunos do 2.º ciclo vão ampliar o estudo efetuado no 1.º, em que foi desenvolvido a descrição, construção e representação de figuras. Neste tema encontramos referência explícita aos padrões, nos objetivos gerais de aprendizagem, onde se pode ler que os alunos devem ser capazes de analisar padrões geométricos. Nos objetivos específicos, pode ler-se que o aluno deve completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias; identificar as simetrias de frisos e rosáceas e construir frisos e rosáceas.

A Álgebra é introduzida como tema programático no 2.º e 3.º ciclos, deixando de ser apenas uma referência do 3.º Ciclo.

No 2.º Ciclo, os alunos ampliam e aprofundam o pensamento algébrico explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Pode ler-se que o aluno deve ser capaz de explorar e investigar regularidades, tanto em sequências numéricas como em representações geométricas, sendo considerada a base para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Também o trabalho com relações associadas a sequências numéricas e proporcionalidade direta é importante no desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste ciclo, os alunos continuam o estudo de situações aleatórias simples já iniciadas no 1.º ciclo e realizam experiências que possibilitam a exemplificação da regularidade a longo termo.

No 3.º Ciclo do ensino básico, no tema Números e Operações, nas indicações metodológicas referem que resolver problemas e investigar regularidades numéricas constituem as atividades principais na didática dos números. No tópico Intervalos, um dos objetivos específicos é resolver problemas e investigar regularidades.

No domínio da Álgebra, alarga-se e aprofunda-se o estudo das relações, representando-se simbolicamente o termo geral.

A análise dos programas permite verificar que os padrões atravessam os vários temas desta disciplina, com destaque para os temas da Álgebra e da Geometria. Desta forma, os padrões, desde a educação pré-escolar até ao ensino básico, são uma referência de extrema importância nos diferentes conteúdos a abordar.

Também a nível internacional encontramos vários documentos programáticos que realçam a importância da exploração de padrões nos vários níveis. Ser capaz de reagir espontaneamente a padrões que se modificam dá aos estudantes uma grande visão sobre a Matemática e sobre a ciência (NCTM, 1991).

Um dos objetivos a atingir no domínio da Álgebra, desde o pré-escolar até ao secundário, é a compreensão de padrões, relações e funções (NCTM, 2000).

A procura e identificação de padrões desafia os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento de ordem superior: fazem parte da resolução de problemas. Tanto os padrões como a resolução de problemas são considerados atividades desafiadoras e interessantes para motivar os alunos na sua aprendizagem matemática (Vale & Pimentel, 2005).

A integração de tarefas que permitem reconhecer padrões em diferentes representações ou que envolvem a generalização, no currículo da Matemática escolar, é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas.

Assim, verifica-se que o currículo de Matemática que vigorou nos anos 90 não deu importância aos padrões. Só mais tarde o currículo foi reformulado e surge o PMEB (ME, 2007), onde há referência aos padrões de forma explícita. Vários países têm destacado o estudo dos padrões nos seus currículos de Matemática devido às suas potencialidades, podendo afirmar-se que, mais do que um conteúdo a ensinar, fornece um contexto propício para que os alunos pensem matematicamente (Vale & Pimentel, 2011). Por outro lado, verifica-se que há uma forte ligação entre padrões e Matemática e que o trabalho com padrões, além de tornar os estudantes mais motivados para a aprendizagem, potencia-os para a resolução de problemas nas situações concretas do dia-a-dia.

Capacidades transversais em Educação Básica

O programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) assume a necessidade de se indicarem, para além dos temas matemáticos, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática – que devem merecer uma atenção permanente no ensino, apresentando-as de forma desenvolvida num espaço próprio, com a explicitação de objetivos gerais e específicos de aprendizagem relativos a cada uma dessas capacidades (Anexo 7, tabela 4).

Também as atuais orientações curriculares (ME-DEB, 2001) defendem, como principais finalidades da Matemática no Ensino Básico (Anexo 7, tabela 2), a valorização desta disciplina através do contacto com as ideias e métodos fundamentais desta área do saber e o desenvolvimento da capacidade e confiança pessoal no uso da matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar.

A competência matemática promove a mobilização de saberes para compreender a realidade e para abordar situações e problemas. Ao mesmo tempo, proporciona instrumentos que favorecem o uso de linguagens adequadas para expressar as ideias. Com efeito, a Matemática distingue-se das outras ciências no modo como encara a generalização e a demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar.

No programa de Matemática (ME, 2007), constata-se que, nos objetivos gerais desta disciplina (Anexo 7, tabela 3), nos três ciclos da escolaridade básica, os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. A comunicação envolve a vertente oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática.

Assim, os alunos devem ser capazes de, oralmente e por escrito, descrever a sua compreensão matemática e os procedimentos matemáticos que utilizam. Devem, igualmente, explicar o seu raciocínio, bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida.

O desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno é assim considerado um objetivo curricular importante, e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula.

Outro objetivo refere que os alunos devem ser capazes de raciocinar matematicamente usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos. O termo raciocínio surge muitas vezes com o mesmo sentido de pensamento, contudo, raciocínio geométrico, raciocínio algébrico, raciocínio espacial, raciocínio visual, raciocínio indutivo, raciocínio abdutivo, raciocínio dedutivo, intuição, demonstração e argumentação, são alguns exemplos de termos que lhe estão associados. Ao raciocínio matemático está associada a previsão de resultados essenciais para a formulação de conjeturas, o questionamento das soluções, a procura de padrões, o recurso a representações alternativas e a análise e síntese (Domingos; Vale; Saraiva; Rodrigues; Costa & Ferreira, 2013). O raciocínio matemático envolve a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Neste sentido, os alunos devem aprender a justificar as suas afirmações desde o início da escolaridade recorrendo a exemplos específicos, passando a justificações mais gerais à medida que progridem nos diversos ciclos. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria.

Um outro objetivo a destacar refere-se à capacidade que os alunos devem ter para resolver problemas. A resolução de problemas não só é um importante objetivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos.

Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático pode frequentemente ser resolvido através de diferentes estratégias, e dar atenção à análise retrospetiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm.

O desenvolvimento da capacidade de comunicação favorece o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas, mas também é verdade que o desenvolvimento destas capacidades favorece o desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno.

Por outro lado, desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objetivos de aprendizagem centrais, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar na sala de aula.

A comunicação deve ter também um lugar de destaque na prática letiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas.

Através da escrita de textos os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar, de modo mais aprofundado, as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância e rigor no uso da linguagem matemática.

Numa análise ao PMEB (ME, 2007) para o 1.º Ciclo, pode constatar-se que um dos objetivos gerais de aprendizagem é os alunos resolverem problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas e avaliando os resultados; raciocinar matematicamente, formulando e testando conjeturas, explicando processos e ideias e justificando resultados e comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

As indicações metodológicas, para este ciclo, referem que a capacidade de resolução de problemas se desenvolve resolvendo problemas de diversos tipos e em contextos variados, e analisando as estratégias utilizadas e os resultados obtidos.

A resolução de problemas constitui um ponto de partida para a abordagem de conceitos e ideias matemáticas e funciona como um suporte para o seu desenvolvimento e aplicação. A valorização de diferentes modos de resolução de problemas apresentados pelos alunos da mesma turma pode estimulá-los a pensarem mais demoradamente no problema e a melhorarem a sua compreensão e processo de resolução.

Os alunos resolvem problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, explicando ideias e processos e justificando resultados matemáticos evoluindo na forma de exprimirem as suas ideias e de descreverem os processos utilizados. Os contextos na resolução de problemas assumem um papel importante, em especial os que se relacionam com situações do quotidiano, pois servem de modelos de apoio ao pensamento dos alunos.

A capacidade de raciocinar matematicamente desenvolve-se através de experiências que proporcionem aos alunos oportunidades que estimulem o seu pensamento. As tarefas que são propostas em sala de aula, bem como os recursos (material manipulativo) que são disponibilizados influenciam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (Domingos et al.,2013). Ser capaz de formular e testar conjeturas constitui um aspeto importante do raciocínio matemático.

É recomendado que, neste ciclo, os alunos sejam incentivados a exprimir, partilhar e debater ideias, estratégias e raciocínios matemáticos com os colegas e com o professor. Além disso, a leitura e interpretação de enunciados matemáticos e a realização de tarefas que integrem a escrita de pequenos textos, incluindo descrições e explicações, também contribuem para o desenvolvimento desta capacidade.

O ambiente de sala de aula deve ser propício à comunicação, encorajando os alunos a verbalizar os seus raciocínios e, também, a expor dúvidas ou dificuldades, a colocar questões e a manifestar-se sobre erros seus ou dos seus colegas.

O professor assume um papel relevante na colocação de questões que estimulem o pensamento dos alunos, na condução do discurso e na organização e regulação da participação dos alunos.

No 2.º e 3.º ciclos, os objetivos gerais de aprendizagem são reajustados ao ciclo em questão e com uma maior exigência. Desenvolvem o seu raciocínio matemático, formulando e testando conjeturas, recorrendo a exemplos e contra-exemplos e à análise exaustiva de casos, fazendo deduções informais e generalizações.

Ao nível do 2.º ciclo, os alunos alargam o reportório de estratégias de resolução de problemas, aprofundam a análise da plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação dos processos utilizados.

Segundo as orientações metodológicas para este ciclo, a resolução de problemas deve ser tratada em todos os temas matemáticos, conferindo coerência à aprendizagem matemática. O aluno tem de ser capaz de compreender o problema e identificar a informação adequada e o objetivo pretendido; de definir um plano, selecionando estratégias e recursos apropriados; de aplicar o plano, pondo em prática as estratégias escolhidas e, finalmente, de verificar soluções e rever processos.

Neste ciclo de ensino, os alunos devem resolver, não só, problemas que correspondem a situações da vida quotidiana, mas também problemas que se relacionem com outras áreas disciplinares. Resolver problemas deve ser tanto um ponto de partida para novas aprendizagens como uma ocasião de aplicação de aprendizagens precedentes.

Para desenvolver o raciocínio matemático, os alunos devem ter experiências que lhes proporcionem momentos de partilha e debate de ideias, para que sejam capazes de explicar e justificar o seu raciocínio.

A comunicação matemática, neste ciclo, é considerada uma parte essencial da atividade dos alunos em aula, desempenhando um papel fundamental na aprendizagem da disciplina. A apresentação e avaliação de resultados, a expressão, a partilha e o confronto de ideias e a explicitação de processos de raciocínio constituem oportunidades para a clarificação e desenvolvimento do pensamento e para a construção do conhecimento matemático.

No 3.º ciclo, desenvolvem a sua capacidade de analisar as consequências para a solução de um problema resultante da alteração dos dados e das condições iniciais. A partir da sua experiência de argumentação matemática, no 2.º ciclo, os alunos desenvolvem o seu raciocínio indutivo e dedutivo, têm oportunidade de refletir sobre o papel das definições em Matemática e contactar com diversos métodos de demonstração matemática. Na sua argumentação, fundamentam melhor as ideias do ponto de vista matemático e rebatem argumentos inadequados. Também progridem na fluência e rigor com que se exprimem, usando a notação e a simbologia específica e desenvolvem a sua capacidade de interagir num grupo e na turma.

Segundo as orientações metodológicas para este ciclo, possuir a capacidade de resolver problemas matemáticos significa ser capaz de compreender o problema, identificando a incógnita e as condições; selecionar as estratégias e recursos apropriados e aplicá-los e verificar soluções e rever processos.

Neste ciclo de ensino tratam-se problemas que correspondem a situações próximas da vida quotidiana, problemas associados a outras áreas disciplinares com uma expressão mais forte do que nos outros ciclos.

Relativamente ao raciocínio matemático, refere que os alunos, ao realizarem explorações e investigações, raciocinam indutivamente quando procuram generalizar propriedades encontradas num determinado conjunto de dados. Os alunos realizam cadeias curtas de deduções quando resolvem problemas e quando fazem demonstrações simples.

Um outro aspeto do raciocínio matemático é a capacidade de argumentação, apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos que vão ajudar o aluno a fomentar as suas afirmações.

Através da comunicação, oral e escrita, os alunos exprimem e confrontam ideias, tanto com os colegas como com o professor. A comunicação oral é desenvolvida através do questionamento do professor, levando os alunos a interpretar e discutir informação, descrever regularidades, explicar e justificar conclusões, apresentar argumentos de um modo conciso, e avaliar a argumentação matemática. Para fomentar a comunicação escrita, o professor deve criar momentos em que os alunos tenham de elaborar pequenos textos e relatórios, usando a notação, a simbologia e o vocabulário específico da Matemática.

Além destas capacidades transversais são valorizadas também outras, nomeadamente, a capacidade de representação e de estabelecimento de conexões, dentro e fora da Matemática (Anexo 7, tabela 5). Apesar da importância atribuída à resolução de problemas, raciocínio e comunicação, verifica-se que as representações e as conexões estão interligadas e torna-se difícil falar de cada delas isoladamente.

Os padrões e as capacidades transversais

Abordaram-se os padrões e as capacidades transversais e sua importância em educação matemática. Daqui em diante, estabeleceremos uma relação entre estes dois aspetos.

O PMEB (ME, 2007) assume a necessidade de uma atenção permanente no ensino. Além dos temas matemáticos, apresenta três capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática – a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação. O propósito principal de ensino das capacidades transversais na educação básica é desenvolver a capacidade de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemáticos e de as usar na construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos. Não é fácil falar apenas de uma das capacidades transversais, uma vez que estas se encontram interligadas. Sabemos que para resolver um problema recorremos obrigatoriamente ao raciocínio e à comunicação, tanto oral como por escrito.

A resolução de problemas constitui a primeira capacidade transversal do PMEB (ME, 2007), assumindo um papel fundamental em todos os ciclos. De acordo com este programa, a resolução de problemas possibilita uma maior preparação dos alunos para resolverem tanto problemas matemáticos e problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia, como de outros domínios do saber. A resolução de problemas, além de um importante objetivo de aprendizagem, constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Resolver problemas é fundamental para a construção, consolidação e mobilização de conhecimentos matemáticos dos diversos temas, em conexão com o raciocínio e a comunicação.

Desde o 1.º ciclo, os alunos aprendem a resolver problemas do quotidiano, onde aplicam e analisam diferentes estratégias para os resolver. A explicação das ideias e processos, a justificação de resultados e a formulação e teste de conjeturas simples promovem o desenvolvimento do raciocínio. Neste ciclo resolver problemas constitui um ponto de partida para a abordagem de conceitos e ideias matemáticas. Ao resolverem problemas com regularidades, os alunos vão adquirindo experiência e confiança no modo de procurar os dados necessários, de os interpretar e de os relacionar entre si e com o que é pedido. Quando resolvem problemas de diversos tipos e em contextos variados, adquirem flexibilidade nos processos de resolução que utilizam, evoluindo de estratégias informais para estratégias formais. A valorização de diferentes modos de resolução apresentados pelos alunos da turma e a sua posterior discussão melhoram a compreensão e processo de resolução e proporcionam a sistematização de ideias matemáticas.

No 2.º ciclo, a resolução de problemas deve ser um ponto de partida para novas aprendizagens, permitindo o desenvolvimento do seu conhecimento matemático, bem como uma ocasião de aplicação de aprendizagens precedentes. No 3.º ciclo, tratam-se problemas que correspondem a situações próximas da vida quotidiana, problemas associados a outras áreas disciplinares e problemas relativos a situações matemáticas propriamente ditas. Proporcionar aos alunos uma experiência com diversos tipos de problemas, solicitando a utilização de diversas estratégias e a sua apreciação, favorece o desenvolvimento da autonomia dos alunos no trabalho com situações não familiares.

Procurando contrariar a noção da álgebra como um campo de simples manipulação simbólica, tem vindo a afirmar-se a noção de “pensamento algébrico”. A generalização e formalização de padrões bem como a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática, são aspetos importantes no pensamento algébrico (Kaput, 1999).

A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o “sentido de símbolo” (symbol sense) (Arcavi, 1994), que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas. Uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos (Ponte & Sousa, 2010).

Como indicam Ponte, Branco e Matos (2009), a valorização do pensamento algébrico implica ser capaz de pensar de modo abstrato numa diversidade de situações, envolvendo relações e regularidades. Estes autores referem que o pensamento algébrico inclui representar, raciocinar e resolver problemas. Representar refere-se à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, raciocinar envolve relacionar (propriedades dos objetos) e generalizar (estabelecendo relações), e resolver problemas inclui formular e concretizar estratégias de resolução envolvendo representações de objetos algébricos. É também esta a perspetiva subjacente ao PMEB (ME, 2007), ao referir que o grande objetivo do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

O raciocínio matemático é outra capacidade transversal fundamental, que envolve a explicação de ideias e processos, a justificação de resultados e a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração (PMEB, ME, 2007). Ser capaz de formular e testar conjeturas constitui um aspeto importante do raciocínio matemático.

A ideia de que a Matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio faz parte do senso comum da nossa sociedade. No entanto, o termo “raciocinar” nem sempre é claro e pode assumir vários significados. Um tipo de raciocínio fundamental em matemática é o raciocínio dedutivo (Ponte e Sousa, 2010).

No entanto, George Pólya (1990) mostrou que o raciocínio indutivo também ocupa um lugar importante em Matemática. Igualmente importante é saber que processos de raciocínio são usados na resolução dos diferentes problemas. Assim, pode afirmar-se que a resolução de problemas inclui a formulação de uma estratégia geral de resolução, a realização de um passo ou cálculo e sua justificação, e, finalmente, a formulação de uma estratégia geral de demonstração.

No 1.º ciclo, os dois subtópicos essenciais associados ao raciocínio matemático são a justificação e a formulação e teste de conjeturas. No 2.º ciclo, além de se aprofundar a capacidade de raciocínio matemático dos alunos, no que se refere à justificação, formulação e teste de conjeturas, assume também um lugar de destaque a argumentação. Finalmente, no 3.º ciclo, ao lado da formulação, teste e demonstração de conjeturas, e da argumentação, o programa indica que são também objeto de atenção a indução e a dedução.

Aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando os raciocínios realizados por nós e pelos outros (Ponte & Sousa, 2010).

Finalmente, a comunicação é a terceira capacidade transversal a que o PMEB (ME, 2007) realça. O desenvolvimento da capacidade de comunicação é considerado um importante objetivo curricular e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. Este programa refere que a comunicação envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da Matemática. A comunicação oral tem lugar tanto em situações de discussão na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita. A comunicação oral permite uma maior espontaneidade e interação entre os intervenientes, enquanto a comunicação escrita favorece a precisão das ideias e reflexão sobre elas (Ponte & Sousa, 2010). A comunicação oral e escrita complementam-se. No entanto, deve ter-se em atenção que é através do discurso oral que o professor regula o trabalho da sala de aula.

No 1.º ciclo, a comunicação desenvolve-se através da vivência de situações variadas que envolvem a interpretação de enunciados, a representação e expressão de ideias matemáticas, oralmente e por escrito, e a sua discussão na turma. No 2.º ciclo, os alunos exprimem as suas ideias e descrevem os processos matemáticos que utilizam de uma forma mais evoluída, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática, e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem. No 3.º ciclo, os alunos fundamentam melhor as suas argumentações no ponto de vista matemático e progridem na fluência e no rigor com que se exprimem, oralmente e por escrito, e desenvolvem a sua capacidade de interagir num grupo e na turma (PMEB, ME, 2007).

A Matemática não é apenas manipulação simbólica segundo determinadas regras arcaicas, mas sim a compreensão de padrões (Devlin, 1998).

Segundo Orton e Orton (1999), os padrões são um dos caminhos possíveis quando pensamos em introduzir a Álgebra e, consequentemente, desenvolver o pensamento algébrico. Antes de se avançar para a aplicação automática de regras, torna-se fundamental desenvolver o sentido do símbolo. A realização de tarefas que envolvam a exploração de padrões ajuda os alunos a perceber a noção de variável. É importante que, durante todo o seu percurso escolar, os alunos contactem com experiências algébricas informais, que envolvam a exploração de padrões, relações numéricas, e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos.

A utilização de tarefas que envolvam o estudo de padrões é um excelente meio para trabalhar a generalização, dando significado aos símbolos algébricos (Borralho & Barbosa, 2009).

Para que os alunos aprendam Álgebra é necessário que entendam os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Neste contexto, pode afirmar-se que a capacidade de manipular símbolos faz parte do pensamento algébrico. A exploração de padrões permite desenvolver a capacidade dos alunos, partindo de situações concretas, generalizarem regras, isto é, ajuda a pensar algebricamente.

Numa análise ao PMEB (ME, 2007) encontramos, de forma bem explícita, referências aos padrões, desde os quatro temas em que o programa está organizado às três capacidades transversais que atravessam o currículo. A procura de padrões familiariza os alunos com as relações, desenvolve a comunicação matemática e ajuda a criar hábitos de investigação (Chapin, 1998).

Os padrões e a resolução de problemas

A Declaração Mundial sobre Educação para Todos da UNESCO - 1990 indica explicitamente a resolução de problemas como um dos instrumentos de aprendizagem essenciais e refere que, além dos conhecimentos, também as capacidades, os valores e as atitudes constituem conteúdos básicos de aprendizagem. É, igualmente, esta a perspetiva dos programas de Matemática para todos os ciclos do ensino básico aprovados no âmbito da última reforma curricular, aliás em consonância com o que sucede na generalidade dos países e de acordo com as recomendações dos mais importantes documentos programáticos internacionais, sobre o ensino da Matemática (Abrantes et al., 1999).

Desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos podem criar padrões partindo de materiais que manipulam, em que se apercebem das relações existentes que descrevem e representam, usando esquemas e desenhos. Deste modo, estão a desenvolver o raciocínio analítico e espacial. A observação e a procura de regularidades em desenhos, em conjuntos de números ou em formas, bem como a sua descrição oralmente ou por escrito e, ainda, a descoberta da relação entre uma sequência de figuras geométricas e a respetiva sequência numérica, são consideradas atividades muito estimulantes para o estudante.

É com Pólya (1945) que se começa a falar de problemas, para todos os níveis de ensino da Matemática. Ele acreditava que a capacidade de descobrir e de inventar pode ser desenvolvida através do ensino.

Pólya descreve um plano de como resolvê-los (how to solve it), referindo que será necessário compreender o problema para posteriormente obter um plano que o irá realizar e examinar a solução obtida.

Outros investigadores desenvolveram as ideias de Pólya. A.H.Schoenfeld (1978) compilou os princípios heurísticos mais usados na Matemática, apontando primeiro para uma análise do problema, depois a exploração e posteriormente a verificação da solução. É notável que na heurística de análise do problema destaca o recurso à sequência e procura de padrão indutivo.

As primeiras experiências das crianças, mais novas, com a Matemática surgem através da resolução de problemas.

A resolução de problemas favorece o envolvimento do aluno na sua própria aprendizagem e proporciona a exploração de diferentes tópicos permitindo realizar conexões entre diferentes áreas da Matemática (Vale et al., 2009).

A nível internacional (NCTN, 2000), as recomendações também vão neste sentido referindo que, ao aprender a resolver problemas em matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática.

A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática. A resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, como tal, não deverá ser apresentada como uma unidade isolada do programa de Matemática (NCTM, 2000).

No contexto de resolução de problemas, a procura de regularidades (Abrantes et al., 1999) e a procura de padrões (Vale et al., 2009) são "fortes" estratégias a desenvolver. A resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formalização de padrões, levando-os a conjeturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar.

Resolver problemas que envolvam raciocínios com números requer compreensão da relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário; exige um conhecimento de um leque de possíveis estratégias para realizar o cálculo e selecionar a mais adequada; e a capacidade de rever a resposta e verificar tanto a sua correção como a sua relevância no contexto original do problema (Abrantes et al.,1999).

A competência matemática no domínio dos números implica utilizá-los como instrumentos de formulação e resolução de problemas e de comunicação de ideias.

As potencialidades dos padrões no desenvolvimento do conhecimento matemático vão muito mais além do que a exploração de padrões de repetição e além do campo da Geometria. A sua riqueza reside na transversalidade, tanto ao nível de conteúdos, como das capacidades, que promove em qualquer nível de escolaridade e também na forte ligação que tem com a resolução de problemas, como uma estratégia riquíssima que é a procura de padrões (Vale e Pimentel, 2008).

Segundo Threlfall (1999), os padrões de repetição servem de contexto para ensinar outros conteúdos matemáticos e constituem um contexto para desenvolver a capacidade de generalizar. A identificação da unidade de repetição e a compreensão da estrutura global do padrão possibilitam a generalização distante através da descoberta imediata do termo que ocupa uma dada ordem na sequência.

À medida que o aluno progride no seu ciclo de estudos, vai desenvolver o raciocínio e as ideias algébricas ao descobrir relações entre variáveis e sua representação por meio de tabelas.

Nos padrões visuais, os alunos podem identificar conjuntos de elementos disjuntos que são conjugados de forma a construir a figura inicial, dando assim lugar a uma generalização construtiva (Rivera & Becker, 2008). Por outro lado, podem observar a existência de subconfigurações que se sobrepõem, contando mais do que uma vez e que posteriormente são subtraídos, é uma generalização desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008).

Trabalhar a Álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões é uma possível abordagem ao desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico. Warren & Cooper, 2008, (citado em Vale et al., 2009) defendem a introdução precoce do pensamento algébrico através de padrões. Os autores apresentam quatro ações importantes que apoiam o desenvolvimento do pensamento algébrico na escolaridade básica através de atividades de padrões. A primeira envolve a decomposição dum padrão de repetição no motivo que se repete, para ajudar o aluno a distinguir os padrões de repetição dos de crescimento. Também apoia a evolução dos padrões de repetição para os de crescimento relacionando padrões de crescimento geométricos com padrões numéricos. A segunda ação inclui a representação física dos conjuntos de dados que estão em discussão em relação à expressão da generalização. A observação dos grupos de repetição sucessivos e a introdução de cartões com linguagem posicional, para colocar debaixo dos passos dos padrões de crescimento, ajudam os alunos a focarem-se nos elementos fundamentais em discussão que são os dois conjuntos de dados e a relação entre eles. A terceira ação abrange a continuação de padrões, registando os dados em tabelas de valores, usando discussões explícitas, linguagem e símbolos para ajudar os alunos a expressar generalizações. Em particular, o uso de regras “através”, regras de” posição”, regras “por baixo” e regras de “crescimento”, ajuda os alunos a distinguir entre pensamento co-variacional e variação numa só direção. A quarta ação envolve reconhecer a sinergia entre o padrão visual e as tabelas de valores e reconhecer a importância que cada um desempenha na expressão da generalização, e na criação de múltiplas representações da mesma relação.

O reconhecimento de regularidades, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular, permitem que a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração.

O campo dos números é propício para desenvolver atividades que envolvem padrões e regularidades, as quais contribuem para desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões nas diversas áreas da Matemática.

De acordo com o NCTM (2000), através da resolução de problemas os alunos podem explorar e consolidar a sua compreensão do número. O domínio de procedimentos e a compreensão concetual poderão ser desenvolvidos através da resolução de problemas, do raciocínio e da argumentação. As experiências matemáticas deverão incluir, em todos os níveis de ensino, oportunidades de aprender Matemática através da resolução de problemas emergentes de contextos exteriores à própria Matemática.

O papel da comunicação na exploração de padrões

A comunicação é uma parte essencial da Matemática e da Educação Matemática. É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática.

De acordo com o NCTM (2000), quando os alunos são desafiados a pensar e a raciocinar sobre a Matemática, e a comunicar as ideias daí resultantes, oralmente ou por escrito, aprendem a ser claros e convincentes. Através da comunicação as ideias tornam-se objetos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correção.

Como referem Abrantes et al., (1999), a comunicação é a capacidade de trocar ideias, negociar significados, desenvolver argumentos.

À medida que os alunos progridem ao longo da sua escolaridade, as formas de comunicação bem como o raciocínio matemático que suporta a sua comunicação, deverá tornar-se cada vez mais elaborado.

Os alunos enriquecem a perspicácia do seu pensamento quando justificam o seu raciocínio à turma, ou quando formulam uma pergunta acerca de qualquer assunto. A comunicação pode servir de suporte à aprendizagem de novos conceitos matemáticos, à medida que os alunos atuam sobre uma situação, desenham, utilizam objetos, relatam e apresentam explicações verbais, escrevem e usam símbolos.

A reflexão e a comunicação são processos intimamente relacionados na aprendizagem matemática.

Na Matemática, a comunicação escrita poderá também ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento. O processo de aprendizagem da escrita matemática é tão importante como a elaboração de argumentos matemáticos incluindo as representações e as regras de justificação e de demonstração. No 1.º ciclo, como os alunos entram para a escola com reduzidas capacidades escritas, poderão apoiar-se em outras formas de comunicação, como o desenho. Gradualmente começarão a escrever frases, mais tarde utilizar a linguagem comum, e posteriormente escrever argumentos matemáticos bem elaborados utilizando vocabulário formal.

À medida que praticam a comunicação, os alunos deverão adquirir e reconhecer os estilos matemáticos convencionais de diálogo e de argumentação. À medida que amadurecem, a sua comunicação deverá refletir uma estruturação crescente das formas de justificar os procedimentos e resultados. Ao ouvirem os argumentos dos colegas, e ao pensarem sobre eles, os alunos aprendem a tornar-se críticos no contexto da Matemática.

De acordo com Abrantes et al. (1999), a experiência dos alunos em comunicarem claramente o seu raciocínio geométrico prepara-os para a compreensão posterior das demonstrações formais.

A comunicação é importante por si própria, uma vez que, os alunos devem aprender a descrever os fenómenos através de várias formas escritas, orais e visuais. Esta norma sugere que a Matemática se aprende num contexto social, em que é dado valor à discussão das ideias, tanto entre os alunos como entre alunos e o professor.

A comunicação matemática pode ter lugar quando os alunos trabalham em pequeno grupo, quando um aluno explica um algoritmo para resolver equações, quando um aluno apresenta um método que descobriu para resolver um problema, quando um aluno constrói e explica uma representação gráfica de fenómenos da vida real, ou quando um aluno formula uma conjetura sobre figuras geométricas. O professor deve acompanhar com atenção a linguagem matemática que os alunos utilizam, com vista a ajudá-los a desenvolver a sua capacidade de comunicar em Matemática. Isto pode ser feito perguntando aos alunos se concordam com a explicação dada por um deles ou fazendo com que os alunos apresentem várias representações de ideias matemáticas ou de fenómenos do mundo real. A ênfase deve ser posta na comunicação matemática entre todos os alunos, e não apenas entre aqueles com maior facilidade de expressão. Com vista a maximizar a comunicação com os alunos, e entre eles, os professores devem reduzir ao mínimo o tempo durante o qual eles próprios dominam as discussões na aula.

Os padrões e o raciocínio matemático

O desenvolvimento do raciocínio matemático enquanto capacidade transversal a qualquer tema matemático ocupa um lugar de relevo, não só no currículo da matemática escolar em Portugal, mas também na generalidade dos países. Ensinar Matemática como um exercício de raciocínio deve ser um facto corrente na sala de aula. Conceder na sala de aula um lugar de destaque à argumentação em Matemática está intimamente associado à importância de os alunos desenvolverem a capacidade de raciocinar matematicamente e aprenderem Matemática com compreensão (Ponte et al. 2007). Os alunos devem ser estimulados a explicar os raciocínios que seguiram para chegar a determinada conclusão ou para justificar por que razão o seu modo de abordar um problema é apropriado.

O raciocínio tem um papel crucial na Matemática, sendo impossível dissociá-lo da aprendizagem, já que é a partir desta capacidade que os alunos vão adquirindo conhecimento (Thompson, 1996). Dar ênfase ao raciocínio no ensino da Matemática tem por objetivo desenvolver o poder matemático dos alunos, de modo que possam chegar a conclusões e justificar as suas afirmações por si próprios.

As atuais tendências curriculares dão ênfase ao raciocínio matemático, onde a explicação e a justificação são aspetos importantes no trabalho do aluno e na sala de aula. A comunicação, as conexões e as representações escolhidas pelos alunos servem de suporte ao raciocínio e este deve ser sempre empregue na tomada de decisões (Barbosa, 2010). Uma das caraterísticas da argumentação em Matemática é a natureza discursiva da argumentação, em que o aluno utiliza a linguagem natural na sua comunicação. Outra caraterística é o caráter justificativo do tipo diverso que os alunos utilizam para fundamentarem as suas descobertas. Certo é que nem sempre os raciocínios envolvidos na justificação de uma ideia conduzem a uma conclusão verdadeira. Daí entender-se que a argumentação matemática é uma tentativa de justificar uma ideia, ou conjunto de enunciados, a partir daquilo que se crê como verdadeiro.

Numa argumentação, os argumentos empíricos são possíveis e muitas vezes valiosos, pois sustentam a formulação de conjeturas, mas de validade provisória. A ideia de que se pode tirar conclusões acerca da validade geral de uma conjetura, a partir da sua verificação por alguns casos, é muito persistente nos alunos. Torna-se importante ajudar os alunos a entenderem que os argumentos empíricos não permitem fundamentar conclusões gerais.

Por vezes há argumentações convincentes e matematicamente corretas que mostram que a validade das conjeturas podem ser consideradas uma prova ainda que que seja pelo recurso ao exemplo generalizável. Deste modo, a prova pode surgir como um instrumento que serve não só para nos convencer sobre a validade das conjeturas, mas também como um meio de progredir na compreensão de uma ideia ou resultado matemático. Por vezes constata-se que os alunos fazem prova dos seus raciocínios por exaustão, analisando todas as possibilidades de solução e verificando que nenhuma refuta a conjetura.

Argumentar através de um contra-exemplo sensibiliza os alunos para as limitações do raciocínio indutivo, ajudando-os a compreender que correm "perigo" ao fazerem generalizações apressadas e com base na análise de um pequeno número de casos.

A generalização de um padrão baseia-se na identificação de uma regularidade que, posteriormente, é alargada a todos os termos da sequência (Radford, 2006). De acordo com Kaput (1999), generalizar é continuar a linha de raciocínio para além do caso considerado, identificando de forma explícita a regularidade. Nesta linha de pensamento Pólya (1981) considera que a generalização não é um processo imediato mas sim gradual. Uma das possíveis abordagens para ajudar os alunos a generalizar e a representar relações é através do estudo de padrões figurativos de crescimento (Vale et al., 2009).

De acordo com Stacey (1989), as tarefas de padrões, em contextos figurativos, podem envolver dois tipos de generalização: a generalização próxima, que se refere à descoberta do termo seguinte, que pode ser através da contagem, desenho ou por uma tabela, e a generalização distante, que implica a descoberta de termos distantes e que exige a compreensão da lei de formação, ou seja de uma regra geral.

Como refere Barbosa (2010), as tarefas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais surgem como facilitadoras do aparecimento de estratégias de generalização. O processo de generalização bem como a sua relação com as representações assumem grande importância no raciocínio matemático. A generalização de padrões pode levar à transição do pensamento numérico para o pensamento algébrico (Rivera & Becker, 2005).

A generalização é o centro da atividade matemática, sendo considerada uma ferramenta do pensamento que permite o desenvolvimento do conhecimento matemático. De acordo com Mason (1996), os professores que não têm por hábito propor que os alunos generalizem e expressem as suas generalizações, não proporcionam o desenvolvimento do pensamento matemático. A procura de padrões poderá conduzir naturalmente à expressão da generalidade, uma vez que surge associada à generalização (Orton & Orton, 1999). Este tipo de tarefas constitui uma forma concreta de os alunos, de anos elementares, começarem a familiarizar-se com as noções de generalização e abstração.

Destaca-se ainda a relevância atribuída à visualização na aprendizagem da matemática, uma vez que não se limita à mera ilustração, mas por ser reconhecida como uma componente do raciocínio (Vale, 2012). A visualização tem um papel importante no raciocínio do aluno e as tarefas com padrões figurativos desenvolvem a perceção visual (Rivera & Becker, 2005).

A identificação de padrões é considerada também uma componente essencial no raciocínio efetuado pelos alunos, atravessando todos os temas do currículo (e.g. ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2000). Os alunos podem ser encorajados a olhar e observar o que os rodeia no dia-a-dia, de modo a reconhecerem padrões.

A riqueza dos padrões reside na sua transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos estudantes de qualquer nível de escolaridade e, também, na forte ligação que tem com a resolução de problemas, com atividades de exploração e de investigação. Segundo alguns autores (e.g. APM, 1988; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008), a resolução de problemas deve permitir ao aluno compreender a Matemática no seu dia-a-dia de modo a ter um papel ativo na sua aprendizagem, ajudando-o na descoberta de novos conceitos. Deste modo, os alunos podem formular, investigar, argumentar e provar conjeturas realizando aprendizagens e construindo conhecimentos. Reforçando esta ideia, Boavida et al. (2008) afirmam que a resolução de problemas "proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a comunicação; permite estabelecer conexões entre os vários temas matemáticos (…); apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana.

Tendo em conta as ideias já referenciadas, este estudo pretende, através da resolução de problemas, onde a procura de padrões seja uma estratégia fundamental, não só desenvolver o conhecimento de novos conceitos, como contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais e estabelecer uma ligação entre a Matemática e o mundo que nos rodeia.

Uma proposta didática

A perceção que o ser humano tem sobre a realidade está de acordo com associações estabelecidas através da experiência, o que torna a interpretação de uma imagem subjetiva, daí a importância dos conhecimentos prévios. Por outro lado, a atenção pode ter diferentes formas: dirigir-se ao todo (observar); aos detalhes (atributos); reconhecimento de relações (parte-parte e parte-todo); interpretar propriedades; e deduzir a partir de definições (raciocinar sobre propriedades) (Pimentel & Vale 2011). No fundo, o processo de perceção visual humano procura, de certo modo, dar sentido ao que vê. Um primeiro passo na exploração de padrões é ver um padrão (Lee & Freiman,2006,citado em Vale, 2012, p.8). Contudo, os estudantes devem ser ágeis para "ver" vários padrões, permitindo-lhes escolher os que lhes são úteis.

Frobisher, Frobisher, Orton e Orton (2007) usam o termo visualização para significar o procedimento mental que permite passar de um objeto físico visível para a sua representação mental. De acordo com Arcavi (2003), a visualização é uma componente-chave do raciocínio e da resolução de problemas. Na mesma linha, Tripathi (2008) refere que a capacidade para usar várias formas de raciocínio pode ser desenvolvida através de experiências envolvendo a visualização. Deste modo, constatamos que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração mas também é reconhecida como uma componente do raciocínio e da resolução de problemas.

Numa análise cuidada ao Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) encontram-se várias referências aos padrões desde os quatro temas em que o programa está organizado, até às Capacidades Transversais a desenvolver, onde se recomenda a apresentação de problemas que diversifiquem as estratégias de resolução, no tópico de resolução de problemas.

Como referem Vale e Pimentel (2009), o trabalho com padrões permite o desenvolvimento de conceitos matemáticos, prepara os alunos para aprendizagens posteriores e desenvolve as capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. Estas autoras apresentam uma proposta para utilizar na aula de Matemática, onde reforçam que a exploração de padrões ajudam os alunos quer a desenvolver a sua competência matemática quer a apreciar as qualidades estéticas da disciplina. Realçam ainda a forte ligação dos padrões, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos alunos e, também, na forte ligação que tem com a resolução de problemas, com atividades de exploração e de investigação. As autoras apresentam várias tarefas de padrões a aplicar em contexto de sala de aula que privilegiam o contexto figurativo. Referem que cabe ao professor selecionar, implementar e apresentar tarefas motivadoras para os alunos, tendo em conta o seu nível de ensino, que promovam, tanto a aquisição de conteúdos, como o desenvolvimento das capacidades transversais, nomeadamente a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas.

Através da resolução de problemas de exploração de padrões, torna-se possível o desenvolvimento de outras capacidades matemáticas como a visualização, a representação, a argumentação, a generalização e conexões entre os diferentes temas (Vale e Pimentel, 2009). São evidentes os exemplos de reconhecimento do papel das tarefas com padrões no desenvolvimento do raciocínio e comunicação matemática.

Assim, tendo em conta a ideia destas autoras, a investigadora optou por uma sequência didática de natureza exploratória que inicia com tarefas de contagens com suporte visual que privilegiam a intuição visual acerca dos números e das suas relações. Inicialmente, foram propostas aos alunos tarefas para desenvolver a capacidade de contagem "rápida", com o objetivo de conseguir a flexibilidade de pensamento resultante de diferentes formas de ver. Muitas vezes o professor recorre a modelos, tanto manipuláveis como matemáticos, para ajudar os alunos a esclarecer e a representar matematicamente o problema, permitindo uma melhor visualização da atividade em causa. Os modelos matemáticos, que, em determinado contexto são tratados como sinónimo de representação, podem ser utilizados para esclarecer e interpretar fenómenos e para resolver problemas (APM, 2000).

Posteriormente, surgem as tarefas de sequências, cujo objetivo é reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões, recorrendo-se a material concreto. Por último são apresentados alguns problemas onde a sequência não é apresentada de modo explícito e os alunos terão de descobrir a sequência e explorá-la para chegar à solução. Nesta última fase, além de surgir padrões de repetição e de crescimento, surgem outros tipos de padrões, cuja descoberta conduz a invariantes que levam à descoberta de propriedades numéricas ou geométricas.

Para cada uma das fases desta proposta didática foi apresentado um conjunto de tarefas permitindo estabelecer relações e propriedades dos conteúdos matemáticos e conduzir à generalização, que é a base do pensamento algébrico.

Em todas as tarefas privilegia-se a comunicação como forma de explicitar o modo de pensar e justificar os raciocínios, assim como as diferentes representações utilizadas, sendo estes considerados fundamentais para que haja aprendizagem.

A forma pela qual as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como os alunos compreendem e utilizam essas ideias. Essas representações escritas, nas suas várias formas, constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção matemática (APM, 2000).

Estudos empíricos

Conforme já foi referido neste estudo, a abordagem e exploração de situações problemáticas de exploração de padrões, nos últimos anos, tornou-se uma prática comum nas salas de aula. Cabe ao professor, de acordo com o nível etário dos alunos e os diferentes temas matemáticos, selecionar e aplicar tarefas que sejam desafiadoras, motivando-os, de uma forma acessível, para a sua aprendizagem. É na escola que os alunos são encorajados a questionar, discutir, justificar, investigar.

Através de uma análise ao trabalho de investigação que tem sido feito no âmbito da educação matemática, pode constatar-se que, tal como acontece com a resolução de problemas, o estudo dos padrões continua a ser estudado e discutido e a despertar o interesse na investigação.

A nível nacional constata-se que a exploração de padrões surge, agora, de uma forma explícita nos programas curriculares e tornou-se uma prática comum nas salas de aula.

Com base nesta perspetiva e no sentido de verificar os resultados obtidos em estudos já realizados no âmbito da exploração de padrões, vejamos algumas ideias.

A investigação realizada por Alvarenga (2006), com os alunos do 2.º ciclo, incide sobre a exploração de padrões como parte da experiência matemática dos alunos. Tinha como objetivo analisar o trabalho dos alunos em tarefas de exploração de padrões, assim como as implicações que tais tarefas têm no desenvolvimento e consolidação de conceitos matemáticos ao nível do 5.º ano do ensino básico. As conclusões que a investigadora chegou foram que os alunos conseguiram realizar com sucesso as tarefas propostas, revelando grande entusiasmo durante o trabalho com padrões. Na sua resolução tiveram sempre em conta as caraterísticas iniciais do problema privilegiando tanto as abordagens numéricas como geométricas. Em nenhuma das situações os alunos recorreram a abordagens exclusivamente numéricas, evitando transformar os problemas em meras sequências numéricas. Os alunos conseguem compreender a natureza recursiva do padrão, no entanto, têm dificuldade em ir além desse reconhecimento, no sentido de descobrir a regra geral de formação do padrão. As situações que causaram mais dificuldade por parte dos alunos foram a recolha e a organização de dados bem como o seu registo. Ainda que os alunos compreendessem e descrevessem oralmente o padrão, tinham dificuldade em fazê-lo por escrito.

Um outro estudo foi realizado por Gonçalves (2008) com alunos do 1.º ciclo do ensino básico que se debruçou sobre o desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas. Tinha por objetivo compreender como os alunos do 1.º ano de escolaridade mobilizam aspetos do sentido de número na resolução de problemas numéricos. A investigadora concluiu que os alunos poderão ter desenvolvido aspetos do conhecimento e a destreza com os números e com as operações aplicando-os em contextos de cálculo. Os alunos recorrem ao raciocínio dedutivo sendo as contagens um dos aspetos mais significativos do trabalho realizado.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos foi a estruturação de quantidades na resolução de problemas que envolviam dinheiro, compras e vendas. Outras dificuldades estiveram associadas ao contexto das tarefas, no que diz respeito à interpretação dos problemas, ou à realização de cálculos ou contagens em que os "objetos" não estavam todos visíveis. A expressão oral tornou-se também por vezes difícil para comunicar os seus raciocínios.

Uma outra investigação realizada por Pinheiro (2013), numa turma do 6.º ano de escolaridade, incide sobre o pensamento algébrico em contextos visuais. Este estudo tem por base uma proposta didática com tarefas que envolvem contagens visuais, estudo de sequências de repetição e de crescimento em contextos figurativos, e problemas com padrões, cuja finalidade é promover a capacidade de generalizar desenvolvendo assim o pensamento algébrico. A investigadora optou por evidenciar a exploração de padrões e relações, a generalização e a simbolização. Concluiu que os alunos reconheceram a estrutura do padrão identificando a unidade de repetição e descobriram relações entre os vários termos. Também conseguiram identificar a estrutura do padrão apesar de terem visualizado as figuras de forma diferente e formulado expressões numéricas também diferentes. Revelaram flexibilidade de pensamento e maior capacidade de generalizar. Sempre que os alunos se sustentaram em abordagens visuais compreenderam a estrutura do padrão e apresentaram uma expressão algébrica que traduzia a generalização.

Ao longo deste capítulo foi possível verificar a importância da Matemática no desenvolvimento da sociedade e nos currículos escolares. A Matemática, enquanto disciplina, deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno para a sua plena realização na participação e desempenho social e na aprendizagem ao longo da vida.

A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e, em grande parte, é estruturado pelas tarefas usadas na sala de aula. Compete ao professor selecionar criteriosamente tarefas desafiadoras que tornem os alunos confiantes na capacidade de lidar com problemas difíceis, e flexíveis na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de caminhos alternativos.

O programa de Matemática (ME, 2007) destaca a necessidade da diversificação de tarefas na sala de aula, bem como o desenvolvimento das capacidades transversais na aprendizagem matemática dos alunos. Um dos objetivos gerais do ensino da Matemática é a compreensão, formulação e resolução de problemas.

A resolução de problemas, além de ser um objetivo de aprendizagem, constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos e procedimentos matemáticos.

O raciocínio matemático é outra capacidade fundamental na medida em que envolve a construção de cadeias argumentativas que começam por simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa evoluindo para argumentações mais complexas.

A comunicação é considerada um objetivo curricular importante, tanto na vertente oral como escrita, na medida em que cria oportunidades de se expressar e participar de forma construtiva em discussões de ideias, processos e resultados matemáticos. A capacidade de comunicar por parte do aluno é fundamental no trabalho que se realiza na sala de aula.

Neste estudo, apesar da importância atribuída às três grandes capacidades transversais, também serão abordadas as capacidades de representação e de estabelecimento de conexões por estarem contempladas no trabalho com as três capacidades principais e com os vários temas matemáticos.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentadas as opções metodológicas usadas nesta investigação, bem como a sua fundamentação. Referir-se-á o papel da investigadora, o modo como foram selecionados os participantes, serão apresentados os procedimentos efetuados, e os métodos de recolha de dados. Posteriormente será referido como foram selecionadas as tarefas, descrever-se-á cada tarefa, bem como as expetativas de resolução. Por último, será apresentada a explicitação do processo de análise de dados.

Opções metodológicas

O objetivo deste estudo é analisar o trabalho dos alunos em tarefas que envolvem a exploração de padrões, assim como entender de que modo tais tarefas podem contribuir para o desenvolvimento das suas capacidades transversais. Em torno deste propósito, foi planeada uma experiência de trabalho numa turma do 5.º ano de escolaridade, tendo a professora assumido o papel duplo de professora - investigadora. Atendendo à natureza do problema em estudo e ao tipo de questões para as quais se pretendia obter resposta, a metodologia qualitativa mostra-se como a opção mais adequada – trata-se de analisar o modo como os alunos trabalham com padrões e regularidades, bem como as estratégias que utilizam, e compreender qual o contributo que os padrões podem dar no desenvolvimento das capacidades transversais.

Na investigação qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), o objetivo do investigador é compreender o comportamento e experiências humanas, que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do processo de construção de significados, e descrever em que consistem estes mesmos significados. Deste modo, no sentido de melhor compreender as ações observadas, a fonte direta de dados é o ambiente natural uma vez que “divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado”. A recolha de dados é feita de uma forma descritiva, onde a palavra escrita assume particular importância, tentando, através do registo de dados, compreender o pormenor e a riqueza dos processos bem como do significado atribuído pelos participantes, que vão sendo construídos ao longo do estudo pois não se parte de hipóteses previamente construídas.

Através da observação direta o investigador vai-se familiarizando com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, utilizando estratégias baseadas no pressuposto de que muito pouco se sabe acerca dos intervenientes no estudo.

Os planos evoluem à medida que é feita a recolha de dados dando uma estrutura à investigação não havendo hipóteses formuladas previamente.

Face aos seus objetivos, o investigador observa detalhadamente o contexto, ou o indivíduo que possa ser objeto de estudo, selecionando as estratégias que considera mais adequadas e, após dar início à recolha de dados, vai tomando decisões acerca do objetivo do trabalho.

No âmbito da abordagem metodológica adotada, dado que o estudo pretende responder a questões de natureza explicativa, e o objetivo é obter uma descrição e interpretação das situações na unidade de análise, que é o aluno, justifica-se claramente a opção do estudo de caso. Trata-se de uma forma de investigação que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e caraterístico (Ponte, 1994).

Segundo Patton (1990), os estudos de caso são particularmente úteis quando se pretende compreender determinados indivíduos, determinado problema ou uma situação particular, em grande profundidade.

O estudo de caso apresenta contornos claramente definidos, em que o investigador procura manter-se atento aos novos elementos que podem emergir durante o estudo, e fundamenta-se no pressuposto de que o conhecimento não é algo acabado. Ao desenvolver o estudo de caso, o pesquisador recorre a uma variedade de dados, colhidos em diferentes momentos provenientes de fontes variadas, confirmando ou rejeitando hipóteses.

Os estudos de caso visam a descoberta e retratam a realidade de forma completa e profunda. O pressuposto que fundamenta essa orientação é o de que a realidade pode ser vista sob diferentes perspetivas, não havendo uma única que seja a mais verdadeira.

No desenvolvimento do seu trabalho, o pesquisador busca novas respostas para a apreensão mais completa do objeto tendo em conta o contexto em que ele se situa. O pesquisador procura revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação focalizando-o como um todo.

Cada caso é tratado como único, com contornos bem definidos, em que o pesquisador utiliza uma linguagem acessível e procura relatar as suas experiências durante o estudo, de modo que o leitor possa fazer as suas generalizações.

Uma vez que este estudo pretende ajudar a compreender o papel que os padrões assumem no currículo escolar, nas aprendizagens e no desenvolvimento das capacidades transversais, torna-se fundamental compreender que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas e perceber de que modo os padrões e a resolução de problemas podem contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais, tendo como suporte uma experiência de trabalho em que a professora assume também o papel de investigadora.

Papel da investigadora

Tendo em conta a natureza do problema em estudo e as questões colocadas, a investigadora optou por desempenhar o duplo papel de professora e de investigadora.

Os professores, ao agirem como investigadores, não só realizam o seu trabalho mas também se observam a si próprios, param e distanciam-se dos conflitos imediatos, são capazes de alargar as suas perspetivas sobre o que acontece (Bogdan e Biklen, 1994).

Deste modo, foi tida em conta a "realidade global", sendo estudado o passado e o presente dos alunos e estes vistos como um todo. Além disso, procurou-se conhecer os alunos como pessoas e compreender as suas perspetivas, tentando viver a realidade da mesma maneira que eles, demonstrando empatia e identificando-se com eles para tentar compreender como encaram a realidade.

Tendo em conta o papel de professora, tentou-se proporcionar situações que levassem os alunos a questionar, a conjeturar, a decidir e a argumentar os seus raciocínios na exploração de padrões. Além disso, procurou-se orientar os alunos nas suas discussões sem as conduzir em demasia. Atendendo ao papel de investigadora, assumiu-se que o principal instrumento na recolha, tratamento e análise de dados é feita pela investigadora. Assim, no decorrer da investigação estabeleceu-se uma interação entre a investigadora e os alunos de uma forma "natural" e, sobretudo, discreta até compreender a situação em estudo.

Procedimentos

Com o intuito de clarificar o modo como foi desenvolvido o estudo, são apresentados vários pontos onde é feita a descrição detalhada de todos os passos da recolha e análise de dados, bem como as dificuldades e as preocupações com a qualidade levadas a cabo pela investigadora durante a investigação.

O contexto e a seleção dos alunos-caso

Um dos aspetos a atender na decisão de conduzir um estudo de natureza qualitativa é a acessibilidade, não só em termos geográficos como também em relação ao contexto e de conseguir que os participantes cooperem com o investigador Erlandson, Harris, Skipper e Allen (1993).

Assim, optou-se por realizar o presente estudo na escola onde a investigadora lecionava. Esta escolha teve por base o facto de ser professora daquela escola, pertencendo ao quadro do Agrupamento, além de conhecer anteriormente os colegas de trabalho, bem como o Coordenador de Departamento, uma vez que já tinha lá lecionado em anos anteriores não consecutivos.

Este estudo realizou-se no ano letivo de 2010 / 2011, nesta escola básica e secundária do distrito de Braga, numa das turmas da investigadora, do 5.º ano de escolaridade, uma vez que nesse ano letivo não lhe foram atribuídas turmas de 6.º ano. Em julho de 2010 o Diretor do Agrupamento comunicou-lhe que nesse ano letivo iria trabalhar com alunos do 5.º ano de escolaridade, tendo desde logo elaborado o plano da investigação. Logo que se deu início ao ano letivo 2010/2011, foi apresentado ao Diretor do Agrupamento o projeto da investigação que pretendia levar a efeito, onde constava uma síntese do problema do estudo, o plano de trabalho e a metodologia de investigação.

O primeiro contacto estabelecido com a turma ocorreu logo nos primeiros dias de aulas, setembro de 2010, tendo a investigadora iniciado desde logo a recolha de dados relativamente ao contexto onde decorreu o estudo. Nesse momento, já tinha sido apresentado um pedido informal ao Diretor do Agrupamento, tendo esse pedido sido formalizado em janeiro de 2011 (Anexo 1). O Diretor alertou para alguns procedimentos a ter em conta na recolha e utilização de dados, tendo deferido a autorização para o desenvolvimento do estudo. Após o Diretor ter emitido um parecer favorável, a investigadora informou a turma, que designou por 5.º A, do trabalho que iria desenvolver. Para isso, além de ter explicado aos alunos os objetivos do trabalho que pretendia desenvolver com a turma, também forneceu um documento para os Encarregados de Educação (Anexo 2), onde os informou do desenvolvimento do estudo e solicitou autorização para o seu educando participar no mesmo. Tanto os Encarregados de Educação como os alunos se mostraram recetivos ao projeto.

A investigadora informou a turma e explicou-lhes o que se ia passar durante as aulas relativamente às gravações e também lhes disse que, após as aulas, teria de falar com alguns alunos para explicarem, em pormenor, os raciocínios usados na realização das tarefas. No sentido de evitar que a turma sentisse que os alunos-caso eram privilegiados relativamente aos restantes, por vezes, conversou também com outros alunos sobre as tarefas realizadas.

Durante o primeiro período, a investigadora procedeu à recolha de informações, no sentido de caraterizar a turma e cada aluno em particular, recorrendo ao Projeto Curricular da Turma, à observação das aulas de Matemática e à aplicação de um questionário sobre a relação que o aluno mantém com a Matemática (Anexo 3).

Durante as aulas de Matemática, foram privilegiados a resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio e a ligação entre os vários temas matemáticos. Os alunos eram encorajados a comunicar o seu raciocínio, tanto oralmente como escrito, criar situações de confronto de ideias e desenvolver o gosto pela Matemática.

Desta forma, atendendo aos critérios referenciados e às caraterísticas do estudo, procurou-se definir um número de casos que pudesse constituir uma dimensão de trabalho a que a investigadora conseguisse dar resposta. Atendendo a que cada aluno da turma representava um potencial caso a estudar foi necessário definir alguns critérios para selecionar os alunos-caso. A escolha dos alunos foi feita através da realização de uma tarefa prévia que tinha como objetivo fazer uma avaliação diagnóstica relativamente ao desenvolvimento das capacidades transversais, e analisar a capacidade de representar o processo de resolução utilizado. Após a resolução desta tarefa, procedeu-se à escolha dos alunos-caso, com base nos seguintes critérios: i) boa capacidade para expressar o seu raciocínio; ii) diferentes níveis de desempenho; iii) empenho e interesse na realização da tarefa prévia e iv) heterogeneidade relativamente ao sexo.

Decidiu-se então estudar dois casos individuais, tendo atribuído um pseudónimo aos alunos, selecionando o "insatisfeito" João e a "acanhada" Maria. A escolha dos alunos-caso foi feita no segundo período.

O contexto e a seleção

Com o intuito de escolher as tarefas a aplicar à turma, procedeu-se inicialmente à recolha de um conjunto diversificado de propostas que envolvessem a exploração de padrões e cuja resolução não fosse a aplicação de um processo rotineiro. Essa recolha foi feita com base em documentos onde a "resolução de problemas" e a "exploração de padrões" eram privilegiados (NCTM, 1993; NCTM, 2000; Vale et al., 2009). Tendo em conta o objetivo do estudo, procedeu-se à seleção das tarefas que fossem adequadas ao nível de ensino dos alunos e de acordo com os conceitos matemáticos abordados.

Após terem sido selecionadas as tarefas, estas foram analisadas por um painel de professores do ensino básico e de investigadores na área da Didática da Matemática, no sentido de recolher sugestões que pudessem melhorar as opções tomadas. As tarefas também foram testadas numa turma da escola, fornecendo, antecipadamente, informações sobre as dificuldades manifestadas pelos alunos sobretudo ao nível da compreensão dos enunciados e o tempo necessário à sua realização. Com base nos resultados obtidos fizeram-se algumas correções.

Foram aplicadas dez tarefas e todas foram analisadas. A apresentação de cada tarefa será feita num outro ponto bem como a sua descrição e análise.

As tarefas que constam da experiência didática foram apresentadas e realizadas por toda a turma na qual os alunos-caso estavam inseridos, embora o foco do estudo se tenha centrado nos dois alunos.

Foi durante o terceiro período que as tarefas foram aplicadas à turma, durante as aulas de Estudo Acompanhado de noventa minutos, sempre da parte da tarde. Procurou-se que as tarefas fossem concluídas no dia em que eram apresentadas, para que se pudesse proceder à entrevista dos alunos-caso.

As entrevistas foram realizadas após a realização de cada tarefa, no horário mais conveniente para os alunos, sem que fosse necessário permanecer mais tempo na escola. Assim, optou-se por entrevistar os alunos no tempo livre após o almoço e sempre após a aplicação de cada tarefa. Esta organização manteve-se da primeira à última tarefa, não se tendo verificado qualquer imprevisto.

Os alunos estavam informados que após a aplicação das tarefas se procederia à realização das entrevistas, e, só depois seria feita a discussão da tarefa na turma.

Como referem Bogdan e Biklen (1994), o investigador qualitativo recorre à observação empírica para compreender o processo mediante o qual os alunos constroem significados, e descrevem em que consistem estes mesmos significados.

Assim, a investigadora optou por aplicar a tarefa à turma, foi tirando notas durante a aplicação e procedeu à gravação da aula em vídeo. Posteriormente procedeu à visualização da gravação e à análise das tarefas, antes da realização das entrevistas. Após terminar as entrevistas procedeu à discussão da tarefa na turma, onde aproveitou para tomar as suas notas.

A investigadora optou por aplicar em todas as tarefas a mesma organização.

Todos os procedimentos efetuados durante o estudo encontram-se no Quadro 1.

Calendarização	Procedimentos
Setembro de 2010	• Apresentação da pretensão de realizar o estudo na escola, ao Diretor do Agrupamento.
Outubro de 2010 a janeiro de 2011	• Formalização da autorização ao Diretor do Agrupamento; • Pedido de autorização para a gravação de aulas e realização de entrevistas; • Recolha bibliográfica relativa ao percurso escolar do aluno; • Caraterização da turma; • Aplicação de tarefas básicas introdutórias de exploração de padrões.
Fevereiro / março de 2011	• Recolha e seleção de tarefas; • Apresentação das tarefas aos professores de Matemática da escola e investigadores desta área; • Melhoramento das tarefas.
Abril a junho de 2011	• Aplicação das tarefas à turma; • Gravação vídeo das aulas; • Realização das entrevistas; • Discussão da tarefa na turma; • Notas de campo.
Julho de 2011 a julho de 2014	• Redação da dissertação.

Quadro 1. Resumo dos procedimentos efetuados durante o estudo.

Recolha de dados: métodos e técnicas

Como referem Bogdan e Biklen (1994), os dados recolhidos em forma de palavras ou imagens incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais. Também Gomes (2004) refere como principais técnicas de recolha e tratamento de dados a entrevista, o inquérito por questionário, a observação e a análise de conteúdo.

Observação

Segundo Merriam (1988), o estudo de caso consiste na observação detalhada de um indivíduo ou de um acontecimento específico. Esta ideia também é partilhada por Bogdan e Biklen (1994), onde referem que no estudo de caso, a melhor técnica de recolha de dados consiste na observação participante e o foco do estudo centra-se numa organização particular ou nalgum aspeto particular dessa organização. Fernandes (1991) defende que a observação é o método provavelmente mais eficaz para nos apercebermos dos processos de pensamento dos alunos enquanto resolvem problemas.

Como refere Carmo e Ferreira (2008), a situação de observador participante é muito complexa, contendo em si dois papéis – o de observador e o de participante – exigindo por parte do investigador uma constante autovigilância para manter o equilíbrio pela sua dupla condição. Este autor refere ainda que numa observação no terreno, o critério da utilidade deve estar sempre presente, devendo construir-se um guião de observação com um conjunto de indicadores para retratar o objeto de estudo.

De entre as diferentes modalidades de observação, e consciente da dificuldade de tal equilíbrio, a investigadora adotou o método de observação participante, pois, sendo a mais adequada para estudar os comportamentos humanos, permitiu uma melhor compreensão dos processos e dificuldades que os alunos apresentavam durante o desenvolvimento das tarefas.

Atendendo a que a investigadora era a professora da turma, e durante o desenvolvimento das tarefas circulava pela sala apoiando os alunos nas suas dificuldades, tornou-se difícil o uso de guiões de observação durante as aulas. Contudo, feita a observação, a investigadora recorreu a outros elementos de registo, designadamente o bloco-notas, o diário de pesquisa e as gravações em áudio e vídeo.

O bloco-notas era usado pela investigadora para anotar as primeiras impressões sob a forma de tópicos, diagramas e memorandos que auxiliaram a sua memória no registo dos resultados da observação efetuada.

Considerando que estes apontamentos não eram suficientes, pois tinham de ser completados com o registo dos factos observados, interpretações, hipóteses que resultaram da observação, bem como outras informações a não esquecer, a investigadora elaborou um diário de pesquisa. Os registos foram feitos no mesmo dia da observação a fim de não perder as informações relevantes e por ordem cronológica, o que ajudou a investigadora a monitorizar a sua pesquisa.

O recurso à gravação das aulas permitiu complementar a observação bem como levantar algumas questões a utilizar durante a realização das entrevistas, ajudando a compreender melhor a forma como os alunos se empenham durante a aplicação da tarefa.

Entrevista

Em investigação qualitativa a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito (Gomes, 2004). Como referem Carmo e Ferreira (2008), é recomendável o uso da entrevista nos casos em que o investigador tem questões relevantes, cuja resposta não se encontra na documentação disponível. O objetivo da entrevista é a partilha de informação entre o investigador e o entrevistado reduzindo, por consequência, o pouco conhecimento que tem um sobre o outro. Para atingir tal meta a investigadora, apesar de já conhecer os alunos, optou pela estratégia da regra fundamental das relações humanas. Assim, procedeu à apresentação da investigadora, em seguida à apresentação do estudo a efetuar e à explicação do papel pedido ao entrevistado.

Durante as entrevistas a investigadora teve sempre em conta as experiências dos alunos e alguns cuidados na estruturação das questões.

No presente estudo, a investigadora forneceu aos alunos dados que lhes permitiram compreender a sua importância e utilidade como fornecedores de informação. Inicialmente era notável um nervosismo nos alunos que limitava um pouco a comunicação e os inibia de colaborar abertamente na entrevista. Contudo, após alguns minutos, os alunos já estavam à vontade e falavam livremente sobre os seus pontos de vista.

Neste estudo, realizaram-se entrevistas semiestruturadas (Anexo 8) que tiveram em conta as questões do estudo, o ambiente e a estrutura da tarefa realizada. As entrevistas foram realizadas após a aplicação de cada tarefa a cada um dos alunos-caso com a finalidade de compreender o raciocínio dos alunos. Todas as entrevistas foram realizadas durante a semana em que eram aplicadas as tarefas, tendo ficado a discussão da tarefa na turma para a semana seguinte. A duração da entrevista variava em função da tarefa aplicada e do aluno a ser entrevistado. Assim, antes de realizar as entrevistas, a investigadora dava a conhecer o conteúdo do relatório de observação, visualizava a gravação vídeo da aula e analisava a ficha com as respostas fornecidas pelos alunos. Desta forma, eram selecionados os tópicos da entrevista e elaboradas as questões que permitiriam compreender em profundidade o trabalho desenvolvido pelo aluno.

Ao iniciar a entrevista, foi feita uma síntese enquadradora informando os alunos que o principal objetivo era perceber o modo como tinham pensado durante a aplicação da tarefa, do tempo previsto de duração e do valor que as suas respostas podiam trazer à investigação.

Durante a realização da entrevista era disponibilizada ao aluno a ficha onde realizou a tarefa, para mais facilmente descrever o seu raciocínio. De modo a não influenciar as respostas a dar pelos alunos durante a entrevista, a investigadora optou por não fazer qualquer registo na ficha de respostas. A investigadora, durante as entrevistas, assumiu sempre uma atitude passiva, dando o tempo necessário para os alunos se exprimirem pelas suas próprias palavras e ao seu ritmo. Durante o discurso, sempre que surgiram os silêncios, estes foram respeitados uma vez que criavam a oportunidade para os alunos organizarem os seus pensamentos e dirigirem parte da conversa.

Após as entrevistas, eram registadas as observações sobre o comportamento dos alunos, bem como o ambiente em que a mesma decorreu.

Todas as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas, sendo uma mais-valia na análise de dados.

Gravações vídeo e áudio

Aparici e Mantilla (1987) referem que a importância na utilização do vídeo deve-se fundamentalmente às suas vantagens, nomeadamente: a possibilidade de visionamento das imagens, tal como foram captadas; a facilidade de visionamento; a facilidade de manipulação do equipamento e a possibilidade de se parar a imagem, avançar e retroceder. Não obstante estas vantagens, a utilização do vídeo pode levantar alguns problemas ao nível do efeito perturbador da câmara. A atmosfera natural da sala pode ser perturbada pela câmara, por isso este aparelho deve ser dissimulado ao ponto de se esquecer depressa dele.

Consciente das vantagens e dos problemas que esta técnica de recolha de dados poderia provocar no comportamento dos alunos, a investigadora optou por usá-la devido à sua importância neste estudo. Pretendia-se captar pormenores importantes para o estudo não só pela possibilidade de transcrição de toda a oralidade do processo de resolução da tarefa, bem como o registo de outros comportamentos dos alunos.

Garcia (1986) refere que dever-se-ia encarar o vídeo não só como meio de apresentação de situações – exemplares ou não – mas também como reprodutora da própria atuação.

Na mesma linha, Bautista (1994) destaca a utilização da gravação vídeo por ser um instrumento que permite recolher informação dos contextos e das comunicações verbal e não verbal e por permitir o visionamento por todas as pessoas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

A investigadora esperava uma boa aceitação das gravações por parte dos alunos tendo, previamente, estabelecido uma relação de confiança no sentido de diminuir as perturbações. Certo foi que durante a primeira gravação os alunos apresentavam-se “entusiasmados” com a presença da câmara, mas, por outro lado, com um comportamento mais irrequieto e um pouco perturbador.

Na turma também se verificou que a sua atuação melhorou muito à medida que decorriam as gravações tendo os alunos se afeiçoado à presença da câmara, sendo comprovado pelo ambiente de descontração durante as aulas.

Atendendo a que a investigadora não dispunha de muito tempo para dedicar à gravação e para evitar a perturbação do trabalho normal dos alunos, optou por colocar a câmara em “autogestão” captando sempre o mesmo tipo de plano (plano médio).

Desta forma, as gravações áudio e vídeo das aulas foram consideradas normais, tendo-se verificado o mesmo durante a gravação áudio das entrevistas.

Todas as gravações foram transcritas, no sentido de permitir uma análise mais cuidada de todos os comportamentos dos alunos, durante a realização das tarefas envolvendo a exploração de padrões.

Recolha documental

Como refere Gomes (2004), a recolha de informação a partir da análise documental pode ser considerada uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos. Neste estudo a recolha documental foi utilizada como uma técnica complementar de informações à observação e à entrevista, constituindo uma fonte poderosa num determinado contexto, de onde podem ser retiradas evidências que fundamentem afirmações da investigadora. Representa ainda uma fonte "natural de informação".

Assim, durante este estudo foram analisados vários documentos, nomeadamente:

- questionário aplicado pela investigadora no início do ano letivo, com o objetivo de fornecer informações no âmbito pessoal, relativamente ao modo como os alunos se relacionam com a Matemática (Anexo 3);

- registo biográfico dos alunos da turma que ajudaram a caraterizá-la, relativamente ao percurso escolar dos alunos em anos anteriores;

- registo escrito das resoluções das tarefas desenvolvidas pelos alunos, no sentido de se tentar perceber os processos de resolução utilizados bem como a explanação dos seus raciocínios;

- documentos pessoais que a investigadora usou durante o estudo, nomeadamente diário de pesquisa, notas de campo e registos efetuados durante a visualização das gravações.

Como já foi referido anteriormente, durante as primeiras aulas do primeiro período, foi aplicado o questionário aos alunos e analisados os seus registos biográficos.

Durante o terceiro período, nos meses de abril, maio e junho foram aplicadas as tarefas envolvendo a exploração de padrões. Como também já foi referido, a investigadora aplicou duas tarefas mensais para permitir a realização das entrevistas e a discussão das mesmas na turma. As tarefas constituíram o documento privilegiado neste estudo, e serão descritas no ponto seguinte.

Durante o ano letivo 2010/2011, a investigadora procedeu a registos pessoais para alicerçar o seu estudo, evitando a perda de informação.

As tarefas e a experiência didática

Uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas desafiadoras e envolventes, onde o professor consegue estimular os alunos para a aprendizagem e criar oportunidades de discussão e de reflexão (Vale & Pimentel, 2009).

Através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões, pode-se desenvolver uma aula de Matemática que potencia as Capacidades Transversais, nomeadamente a comunicação, as representações, as conexões e o raciocínio. Além disso este tema permite construir e ampliar conceitos matemáticos e permite sobretudo resolver problemas dentro e fora da Matemática (Vale, Pimentel, Alvarenga e Fão, 2011).

Para apoiar o desenvolvimento do pensamento algébrico na escolaridade básica através de atividades de padrões, alguns autores (e.g. Warren & Cooper, 2008, citado em Vale & Pimentel, 2009) consideram que é necessário que seja realizado um trabalho por fases. A primeira envolve a decomposição de um padrão de repetição no motivo que se repete para ajudar o aluno a distinguir os padrões de repetição dos de crescimento e apoia a evolução dos padrões de repetição para os de crescimento. Uma segunda fase é que o aluno chegue à expressão da generalização e posteriormente continue o padrão, usando linguagem e símbolos para expressar generalizações. Por último deve reconhecer a importância que o padrão visual e as tabelas de valores assumem na expressão da generalização e criação de múltiplas representações.

Conforme já foi referido anteriormente, optou-se por uma sequência didática de natureza exploratória e investigativa que inicia com tarefas de contagens em contextos visuais como requisito para o trabalho posterior com sequências, que privilegiam a intuição visual acerca dos números e suas relações.

Inicialmente foram propostas experiências prévias para o desenvolvimento do pensamento algébrico, assentes num conjunto de tarefas que permitissem desenvolver a capacidade de contagem "rápida" para que adquirissem a flexibilidade de pensamento necessária para escolher a melhor maneira de *ver*. Assim, no sentido de desenvolver essa capacidade de ver instantaneamente (*subitizing*), iniciou-se com o reconhecimento de padrões. Numa primeira atividade, foi sugerido um jogo com um dado. Em seguida, foi utilizada a moldura do 10 para trabalhar relações numéricas que utiliza como números de referência o 5 e o 10, permitindo um reconhecimento visual dos números. Estas tarefas permitiram um avanço para tarefas de contagem em contextos figurativos diversificados e uma flexibilidade de pensamento ao nível de estratégias de contagem, que conduziram a diversas expressões numéricas equivalentes.

Com as experiências apresentadas pretendia-se estimular a procura de diferentes modos de *ver*, optando pelo modo de contagem mais eficaz e a escrita da expressão numérica correspondente. Nesta fase da proposta didática foram aplicadas três tarefas que foram objeto de análise pela ordem indicada: *Peixinhos*, *Bolinhas em Quadrado* e *As Palmeiras.*

Seguidamente, foram apresentadas tarefas de sequências que envolvem quer padrões de repetição quer de crescimento e tinham como principal objetivo reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões.

Nesta fase, foram apresentadas quatro tarefas, *Comboio dos cubos*, *Rapazes e Raparigas, Carrinhos de Quadrados* e *Discos em Y*.

Por fim, apresentou-se um conjunto de problemas em que a sequência não era explícita, tendo que ser construída de modo a chegar à solução do problema.

Fizeram parte desta fase da proposta didática três problemas: *Brincando com Cubos*, *A Moldura* e o *Campeonato de Badmington.*

O quadro 2 sintetiza as tarefas utilizadas neste estudo.

Fases	**Objetivos**		**Tarefas**
Contagens	Visuais básicas	Reconhecimento de padrões para desenvolver a capacidade de *ver* instantaneamente (*subitizing*).	*Peixinhos;* *Bolinhas em Quadrado;* *As Palmeiras.*
	Visuais	Reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem.	
Sequências	Descoberta de padrões recorrendo a padrões figurativos de repetição e de crescimento	Reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem.	*Comboio dos Cubos;* *Rapazes e Raparigas;* *Carrinhos de Quadrados;* *Discos em Y.*

Problemas	Construção de sequências e/ou descobrir o padrão	Generalizar para estabelecer relações de modo a responder às questões.	*Brincando com Cubos;* *A Moldura;* *Campeonato de Badminton.*

Quadro 2. Resumo das fases da proposta didática (Vale & Pimentel, 2009).

Durante a aplicação da cadeia de tarefas da experiência didática, a investigadora tomou algumas notas do modo como a atividade decorria, as questões que suscitaram mais dificuldade, o ambiente na sala de aula e o tipo de interações que iam surgindo, com um foco particular nos alunos caso. Estas notas serão reapreciadas aquando da análise de dados.

De acordo com os propósitos pretendidos, foram aplicadas várias tarefas neste estudo: as tarefas elementares introdutórias que foram objeto de ensino e as tarefas que foram objeto de análise (Anexos 4, 5 e 6). Os aspetos específicos de cada uma das tarefas bem como os seus objetivos e alguns processos de resolução são apresentados de seguida. Os pormenores sobre a aplicação das tarefas na sala de aula serão descritos no capítulo relativo à turma.

Uma descrição mais pormenorizada da dinâmica de sala de aula será desenvolvida no capítulo da turma.

Tarefas - experiências prévias

Como já foi referido anteriormente, foram desenvolvidas algumas experiências prévias com os alunos ajudando-os a reconhecer um conjunto de objetos numa disposição-padrão. Para os primeiros números naturais, foram usados padrões facilmente reconhecíveis num dado.

Como referem Vale et al. (2011), os alunos através do reconhecimento de padrões desenvolvem o ver instantaneamente (*subitizing*) como uma capacidade fundamental para a compreensão do número, apoiados na conservação, na compreensão, nas contagens e na composição e decomposição de números.

Para facilitar a identificação de padrões, permitindo desenvolver o reconhecimento visual dos números e a construção da compreensão do valor posicional, foi usada a moldura do 10. Como os números até 10 são muito importantes e servem de referência para outras contagens, foram apresentados vários padrões que os identificam e que foram descobertos, reconhecidos e discutidos. A sua exploração permitiu também desenvolver capacidades a nível da adição, subtração, multiplicação e divisão incluindo o cálculo mental.

Como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), o trabalho com regularidades, já considerado como uma forma de pensamento matemático para os primeiros anos, ajuda a desenvolver a capacidade de abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Como referem Vale, Fão, Alvarenga, Geraldes, Sousa e Pimentel (2008), o pensamento algébrico é muito importante quer para preparar os alunos para aprendizagens posteriores quer no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na primeira atividade das experiências prévias, o aluno deveria indicar o número de pintas que tinha observado na face do dado, sem as contar, e apresentar à turma como tinha contado. Em seguida, eram questionados os outros alunos sobre diferentes formas de contagem e eram apresentadas à turma. Por último, os alunos eram levados a escrever a respetiva expressão numérica do seu raciocínio.

Uma segunda atividade consistiu em utilizar a moldura do 10, em que o aluno deveria indicar o número de círculos por ele observados, o modo como viu os círculos na moldura e o número de círculos que faltavam para completar 5 e depois 10. Numa fase final, o aluno deveria dispor o mesmo número de círculos noutras posições e escrever as expressões numéricas.

Na terceira e quarta atividades, era pedida a contagem do número de pintainhos que nasceram e do número de flores de um arranjo, pois pretendia-se que o aluno descobrisse a forma mais rápida de contar o número de pintainhos e descrevesse os diferentes modos de contagem do número de flores no arranjo.

As tarefas e expetativas de resolução

Em seguida serão apresentadas as tarefas aplicadas neste estudo e para as quais se faz uma descrição assim como as expetativas de resolução para cada uma delas. Em cada tarefa é também sugerido ao aluno que acompanhe com um desenho a forma de pensamento do modo de contagem.

Primeira cadeia de tarefas – contagens

Nesta primeira cadeia, são apresentadas três tarefas de contagens em contextos figurativos. Nestas tarefas apenas a sequência de contagem é um procedimento rotineiro. É fundamental o reconhecimento do arranjo visual na descoberta de estratégias de cálculo mais intuitivas que ajudem na descoberta de outros modos de contagem.

Estas tarefas permitem trabalhar as expressões numéricas de modo compreensivo e reconhecer a equivalência de expressões diferentes, dando sentido às operações e suas relações e propriedades. São consideradas um bom ponto de partida para o pensamento algébrico baseado na generalização de padrões contribuindo para a construção de conhecimentos matemáticos.

Peixinhos

Nesta tarefa (Anexo 4), devem ser aplicados conhecimentos sobre as operações e propriedades, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, para efetuar a contagem. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos fizessem mais que uma descoberta e encontrassem vários modos de contagem.

A última questão da tarefa pretende estimular a reflexão sobre as diferentes expressões numéricas encontradas, bem como a exposição à turma sobre o modo como pensou.

A tarefa *Peixinhos* envolve alguns tópicos matemáticos, nomeadamente a decomposição de números; relações numéricas, operações e propriedades; expressões numéricas; orientação espacial; simetria e figuras geométricas.

Alguns processos de resolução

A capacidade de orientação espacial, assim como a noção de simetria e propriedades das figuras geométricas, podem influenciar o modo de contagem nesta tarefa. Tendo em conta que o objetivo é representar o número total de peixes através de uma expressão numérica, que pode envolver somas, diferenças e produtos, são levados a trabalhar com as operações e propriedades.

Nesta tarefa há várias hipóteses de resolução. Apresentamos algumas que pensamos que podem ser utilizadas pelos alunos.

Processo 1- A contagem poderá ser feita recorrendo a uma expressão numérica ou às figuras, agrupando-as em linha ou em coluna de modo a obter uma expressão numérica simples com adições sucessivas, 1+2+3+4+5+4+3+2+1.

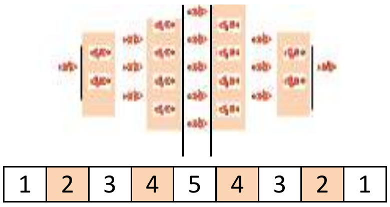
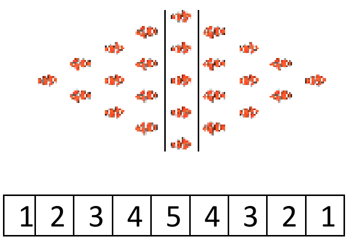


Fig.1. Proposta de resolução 1 da tarefa *Peixinhos*.

Processo 2- Outra alternativa seria a contagem através de uma expressão numérica que envolva somas, diferenças e produtos e as propriedades das expressões numéricas. Este exemplo envolve conceitos de simetria de reflexão muito fortes. Através da abordagem numérica podemos proceder a diferentes modos de contagem agrupando em linha ou coluna.

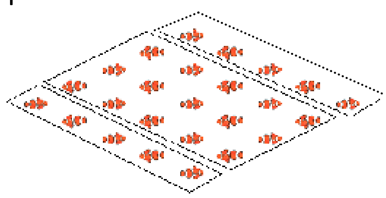
Exemplo 1



5 + 2 x (1 + 2 + 3 + 4)

Fig.2. Proposta de resolução 2 da tarefa *Peixinhos*.

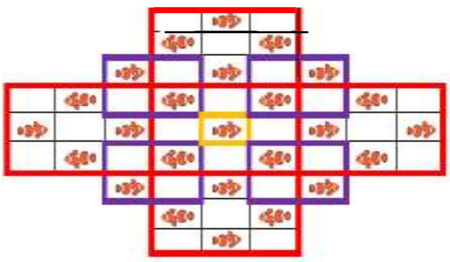
Exemplo 2



3 x 5 + 2 x 5

Fig.3. Proposta de resolução 3 da tarefa *Peixinhos*.

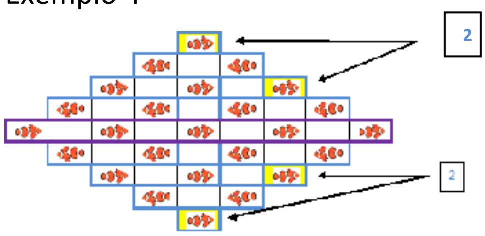
Exemplo 3



1 + 4 x 4 + 4 x 2

Fig.4. Proposta de resolução 4 da tarefa *Peixinhos.*

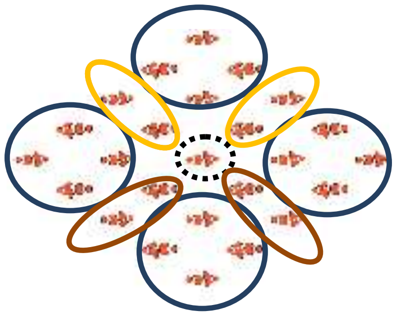
Exemplo 4



5 + 5 x 2 + 5 x 2

Fig.5. Proposta de resolução 5 da tarefa *Peixinhos.*

Exemplo 5



4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 ou 4 x 4 + 4 x 2 + 1

Fig. 6. Proposta de resolução 6 da tarefa *Peixinhos*.

Bolinhas em Quadrado

Nesta tarefa (Anexo 4), devem ser aplicados conhecimentos sobre as operações e suas propriedades assim como atender às propriedades específicas do quadrado, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, para efetuar a contagem. Com esta tarefa, pretende-se que os alunos façam mais que uma descoberta e encontrem vários modos de contagem.

A última questão da tarefa pretende estimular a reflexão sobre as diferentes expressões numéricas encontradas, bem como a exposição à turma sobre o modo como cada aluno pensou.

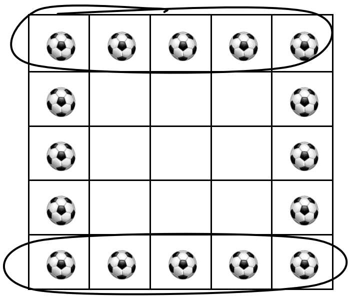
A tarefa *Bolinhas em Quadrado* envolve alguns tópicos matemáticos, nomeadamente a decomposição de números; relações numéricas, operações e propriedades; expressões numéricas; orientação espacial; simetria e figuras geométricas.

Alguns processos de resolução

A capacidade de orientação espacial, assim como a noção de simetria num quadrado, podem influenciar o modo de contagem nesta tarefa. Tendo em conta que o objetivo é representar o número total de bolinhas através de uma expressão numérica, são levados a trabalhar com as operações e suas propriedades.

Apresentam-se algumas das hipóteses de resolução.

Processo 1- Contar o número de bolinhas em cada linha ou em cada coluna, chegando a uma expressão numérica simples com adições sucessivas.



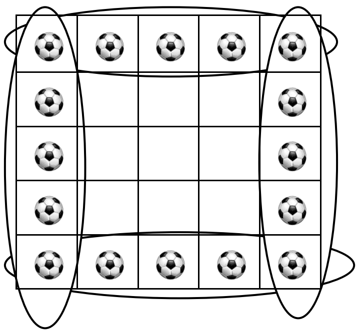
5 + 3 + 5 + 3

5 + 5 + 6

Fig. 7. Proposta de resolução 1 da tarefa *Bolinhas em Quadrado.*

Processo 2- Outro modo de efetuar a contagem é através de expressões numéricas que envolvam adições, subtrações ou multiplicações, algumas propriedades geométricas, simetria de rotação e conceito de área.

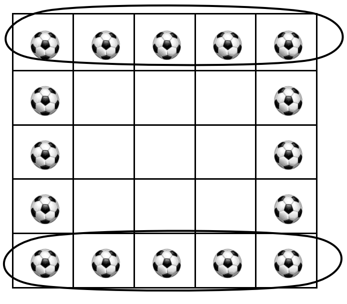
Exemplo 1



4 x 5 - 4

Fig.8. Proposta de resolução 2 da tarefa *Bolinhas em Quadrado.*

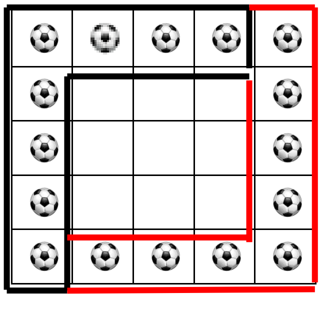
Exemplo 2



(2 x 5) + (2 x 3)

Fig.9. Proposta de resolução 3 da tarefa *Bolinhas em Quadrado.*

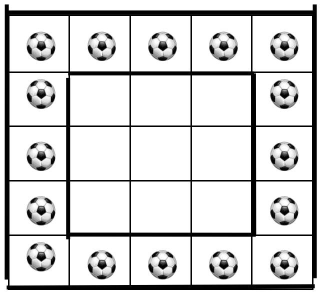
Exemplo 3



2 x (5 + 3)

Fig.10. Proposta de resolução 4 da tarefa *Bolinhas em Quadrado.*

Exemplo 4



(5 x 5) - (3 x 3)

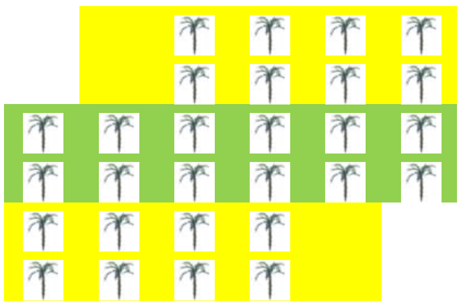
Fig.11. Proposta de resolução 5 da tarefa *Bolinhas em Quadrado.*

As Palmeiras

Esta tarefa (Anexo 4), foi a terceira a aplicar da primeira cadeia e, também relativa a contagens visuais, privilegia o contexto figurativo. Com esta tarefa, pretende-se que o aluno proceda à contagem do número de palmeiras do jardim, apelando à descoberta de um modo rápido de contagem. Os tópicos matemáticos a desenvolver são os mesmos da tarefa dos *Peixinhos* e *Bolinhas em quadrado*. Na última questão é apresentada a expressão numérica de um modo de contagem, onde é solicitado ao aluno que acompanhe com um desenho essa forma de pensamento.

Alguns processos de resolução

Processo 1- O aluno faz a contagem recorrendo a uma expressão numérica simples com adições sucessivas vendo em linha ou coluna.

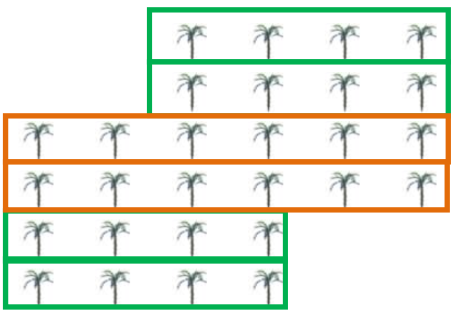


8 + 12 + 8

Fig.12. Proposta de resolução 1 da tarefa *As Palmeiras*.

Processo 2- Outro modo de fazer a contagem é através de expressões numéricas que envolvam adições, subtrações, multiplicações e as propriedades das expressões numéricas.

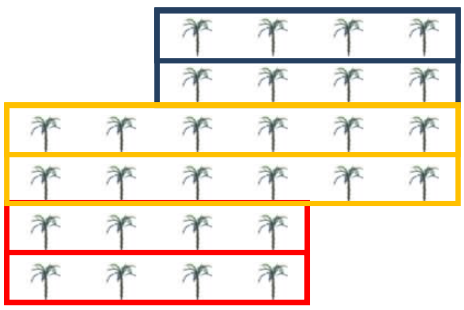
Exemplo 1



4 x 4 + 2 x 6

Fig.13. Proposta de resolução 2 da tarefa *As Palmeiras*.

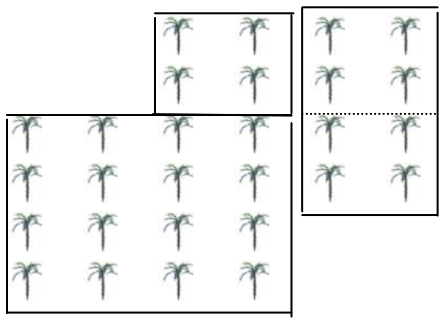
Exemplo 2



2 x 4 + 2 x 6 + 2 x 4

Fig. 14. Proposta de resolução 3 da tarefa *As Palmeiras.*

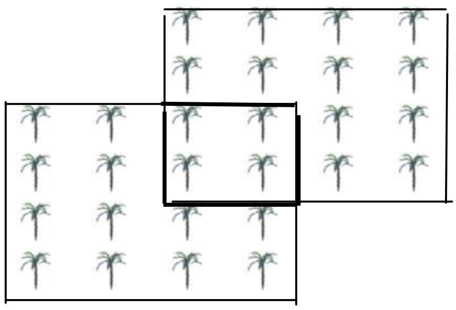
Exemplo 3



(4 x 4) + (2 x 4) + 4

Fig. 15. Proposta de resolução 4 da tarefa *As Palmeiras*.

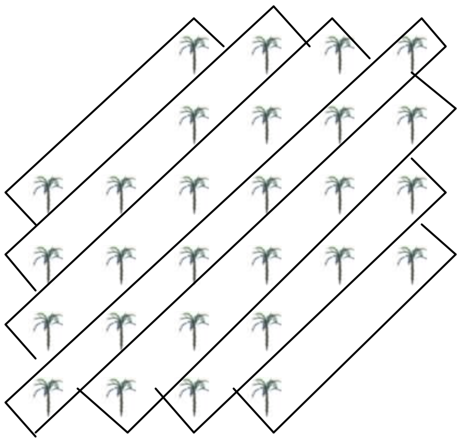
Exemplo 4



(4 x 4) + (4 X 4) - 4

Fig. 16. Proposta de resolução 5 da tarefa *As Palmeiras.*

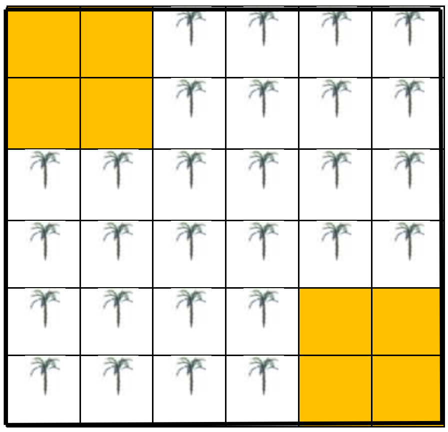
Exemplo 5



2 x (5 + 4 + 2) + 6

Fig.17. Proposta de resolução 6 da tarefa *As Palmeiras*.

Exemplo 6



6 x 6 - 2 x 4

Fig.18. Proposta de resolução 7 da tarefa *As Palmeiras.*

Para que o aluno respondesse à última questão seria fundamental a compreensão da expressão dada, bem como a capacidade de visualizar no desenho esse modo de contagem.

Todas as expressões numéricas poderiam ser trabalhadas recorrendo às propriedades numéricas (e.g. definição de multiplicação, uso de parênteses, propriedade comutativa, prioridade das expressões, equivalência de expressões), em que cada modo de *ver* dá origem a uma expressão diferente mas com o mesmo resultado, ou seja, são todas equivalentes.

A visualização é de extrema importância na aprendizagem da Matemática não só no campo geométrico como no campo numérico.

Segunda cadeia de tarefas - Sequências

Nesta segunda cadeia, são apresentadas quatro tarefas, sendo as duas primeiras relativas a padrões de repetição – *Comboio de Cubos* e *Rapazes e Raparigas* e as duas últimas sobre padrões de crescimento - *Carrinhos Quadrados* e *Discos em Y*, cuja descoberta através de figuras, conduz a invariantes que permitem o estabelecimento de propriedades numéricas ou geométricas.

A ideia de repetição ou mudança é muito forte no conceito de padrão.

Um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica e indefinidamente. A sua exploração abrange processos de generalização onde o pensamento algébrico é fulcral.

No padrão de repetição, o raciocínio usado envolve, normalmente, pensar num conjunto de figuras que se alternam, mas também se pode ver o padrão como a junção contínua de duas figuras formando um motivo. A identificação do motivo de repetição permite a organização do pensamento do aluno bem como a distinção entre os padrões de repetição e os de crescimento.

Nos padrões de crescimento, cada termo, muda de forma previsível em relação ao anterior. Estes padrões têm uma importância significativa na transição da aritmética para a álgebra (Vale et al., 2009).

A procura de padrões em sequências, tanto figurativas como numéricas, permitem introduzir ou relembrar números e relações numéricas (números pares e ímpares; múltiplos; potências).

As sequências com figuras cuja construção depende da anterior, levam à generalização próxima permitindo o desenvolvimento do raciocínio recursivo. Se se relaciona a construção da figura com a ordem que esta ocupa na sequência dá-se um passo para a generalização distante, que pode conduzir ao raciocínio funcional. Quando os alunos procuram uma lei de formação relacionando a posição do termo na sequência com o seu valor, estão a trabalhar o conceito de função.

O reconhecimento de padrões em sequências, quer de repetição quer de crescimento e a generalização, permitem a aprendizagem gradual da álgebra e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração.

Comboio de Cubos

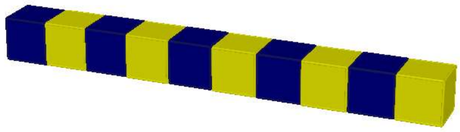


Fig.19. Tarefa 1 da segunda cadeia.

Nesta tarefa (Anexo 5), é apresentado um padrão de repetição muito simples que os alunos fazem sem dificuldade, podendo usar cubos fixáveis. O aluno pode raciocinar pensando num conjunto de figuras que se alternam e rapidamente se vai apercebendo que ter "vermelho azul vermelho azul", "A B A B" ou "tic tac tic tac" são equivalentes. É fundamental saber que números, letras, outros símbolos e expressões matemáticas podem ser manipulados com vista a reorganizar ou simplificar expressões matemáticas. No entanto, este padrão também pode ser visto como a junção contínua de duas figuras " AB AB AB", o que corresponde à identificação do motivo que se repete. Esta identificação do motivo de repetição permite que os alunos organizem o seu pensamento e façam a distinção entre os padrões de repetição e os de crescimento.

Com esta tarefa, é possível explorar aspetos relacionados com a ordem que dado objeto ocupa na sequência e induzir a processos de generalização que só poderá ocorrer se for identificado o motivo que se repete.

Nesta tarefa, para responder às duas primeiras questões, o aluno poderá recorrer ao modelo concreto, mas para responder à quarta questão, já não tem material suficiente, por isso terá de arranjar outra estratégia.

Para ajudar à generalização que permitirá tirar a conclusão de que os cubos de ordem ímpar são vermelhos e os de ordem par são azuis, poderá questionar-se "Quais são os vermelhos? E quais são os azuis?". Espera-se levar os alunos à expressão geral por palavras e, eventualmente, se os alunos proporcionarem levar à expressão algébrica.

Este tipo de questões, para além de induzirem processos de generalização, permitem mobilizar tópicos matemáticos, tais como a divisão com resto, associada aos números pares e ímpares.

Nesta fase é essencial a comunicação do modo de pensar.

Rapazes e Raparigas

Fig.20. Tarefa 2 da segunda cadeia.

Nesta tarefa (Anexo 5), a segunda desta cadeia, é apresentado um padrão de repetição em que o aluno pode raciocinar usando um conjunto de figuras que se alternam, deparando-se com um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente. No entanto, este padrão também pode ser visto como a junção contínua de duas figuras o que corresponde à identificação do motivo que se repete. A identificação do motivo de repetição permite a organização do pensamento dos alunos e a distinção entre os padrões de repetição e os de crescimento.

Embora nas três primeiras questões os alunos possam utilizar materiais, a partir da quarta questão, como já não têm material suficiente devem compreender a estrutura do padrão, independentemente dos referentes originais por proporcionar um caminho para a abstração e para a generalização.

A descoberta do motivo de repetição, rapaz rapaz rapariga é simples, sendo esta descoberta apenas uma pequena parte da tarefa e a fase de arranque para questões ligadas a ideias matemáticas fortes que lhe estão subjacentes.

Um último objetivo desta tarefa é que os alunos generalizem relações a partir de um pequeno número contável de repetições, de um motivo para a continuação do padrão a um número de repetições que já não é possível contar. O aluno numa fase inicial de concretização toma contacto com a tarefa, envolve-se nela e inicia a sua compreensão.

Na questão 4, ainda que implicitamente, já apela ao conceito de razão, exigindo um maior grau de abstração uma vez que pode tornar-se pouco prática a continuação da sequência.

A questão 5 é um pouco mais complexa pois exige a divisão de 90 por 3, ou esta forma através de uma estratégia multiplicativa: “Qual o número que multiplicado por 3 dá 90?”. Os alunos poderão também recorrer a uma estratégia aditiva de tentativa erro, formando grupos - rapaz, rapaz, rapariga, até perfazer 90, o que se consegue com trinta grupos, já que 30 + 30 + 30 = 90.

As conclusões da questão 6 devem incluir os seguintes pontos: o número de raparigas é igual ao número de grupos que se repetem; o número de rapazes é o dobro de qualquer um desses números; o número total de crianças é o triplo do número de grupos que se repetem ou do número de raparigas.

Uma outra conclusão que poderá ser tirada neste nível de ensino é que a razão entre o número de rapazes e o de raparigas é de 2 : 1, ou por outras razões tendo por base as restantes conclusões.

Num padrão deste tipo, em que se poderá representar por ABB ABB ABB, colocar-se-á em evidência a divisão por 3 e os respetivos restos possíveis, o que só será possível com a descoberta do motivo que se repete e consequentemente verificação de que é constituído por 3 elementos.

Com esta tarefa, podem explorar-se aspetos relacionados com a ordem que cada figura ocupa na sequência e induzir, assim, processos de generalização, o que só poderá ocorrer nesta condição de identificação do motivo que se repete.

Esta tarefa envolve alguns tópicos matemáticos na sua realização: relações numéricas; números pares e ímpares; operações; múltiplos e divisores; operadores multiplicativos; frações, razão e proporção.

Nesta fase a comunicação do modo de pensar assume também um papel essencial.

Carrinhos de quadrados

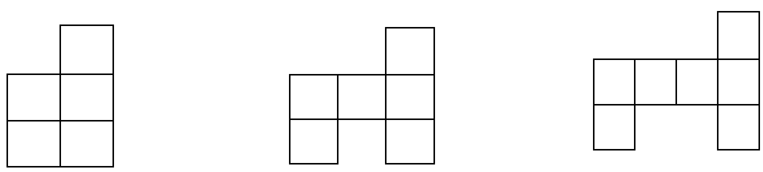


Fig.21. Tarefa 3 da segunda cadeia.

Nesta tarefa (Anexo 5), é apresentado um padrão de crescimento através de figuras, em que cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Neste tipo de tarefa já é possível falar na primeira figura da sequência, no primeiro termo, na posição 1...

As representações pitagóricas, nos padrões numéricos de crescimento, funcionam como poderosos suportes na análise destes padrões.

Numa fase inicial, é apresentado este padrão de crescimento simples podendo o professor propor tarefas com outros tipos de crescimento. Neste exemplo a sequência numérica poderá ser 5, 6, 7...verificando-se que cada termo se obtém adicionando ao anterior a mesma quantidade – neste caso 1, ou seja, decorre da visualização de que cada figura tem mais um quadrado que a anterior.

Nas primeiras três questões, o aluno pode recorrer ao modelo concreto respondendo facilmente. Na última questão, o aluno é levado à generalização que esteja relacionada com a forma de ver esse padrão, proporcionando assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Deve incentivar-se o recurso a uma tabela para a organização dos dados que traduzam o modo de ver dos alunos.

Discos em Y

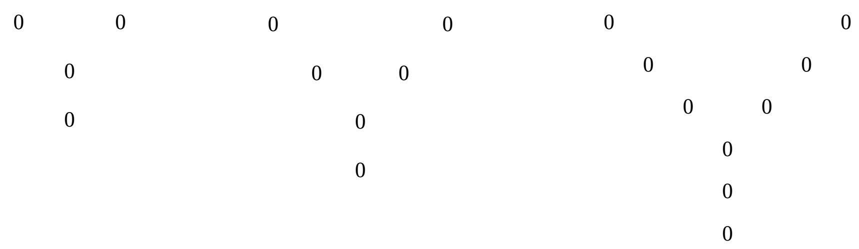


Fig.22. Tarefa 4 da segunda cadeia.

Esta tarefa (Anexo 5), envolve também um padrão de crescimento com figuras ou símbolos.

A sequência numérica associada a esta tarefa poderá ser 4, 7, 10...verificando-se que cada termo se obtém adicionando ao anterior a mesma quantidade – neste caso 3.

Para saber quantos discos tem o quarto termo, basta analisar os discos anteriores, desenhar o quarto termo e contar os discos. Descobrir o número de discos do centésimo termo por contagem um a um já não é prático. Para esta tarefa, sugere-se fazer uma tabela em que se colocam as variáveis, a ordem, o termo da figura e o respetivo número de discos para verem que cada Y tem mais 3 discos do que o anterior.

Ordem	Nº de discos
1	4
2	7
3	10
4	13
…	…

Fig. 23. Proposta de resolução 1 da tarefa *Discos em Y.*

Atendendo ao nível de escolaridade em que os alunos se encontram (5.ºano), e considerando que eles têm apenas conhecimentos elementares, a abordagem a utilizar deve basear-se num raciocínio já trabalhado anteriormente através de contagens visuais. Depois da descoberta de um modo de contagem baseado num suporte visual, utilizando um raciocínio por analogia, o aluno poderá facilmente responder à questão de quantos discos tem o centésimo termo.

Este procedimento abre a porta para identificar e escrever várias expressões do mesmo padrão, ao mesmo tempo que permite simplificar expressões e mostrar a equivalência de expressões.

A forma de ver que se apresenta de seguida traduz-se nas expressões numéricas da tabela, ou seja, recursivamente identifica-se que cada termo se obtém adicionando três discos ao anterior, mas não permite chegar à descoberta do centésimo termo.

Ordem	Nº de discos
1	4
2	4+3
3	7+3
4	10+3
…	…

Fig.24. Proposta de resolução 2 da tarefa *Discos em Y.*

A sequência de discos pode ser vista de diferentes modos dando origem, também, a diferentes expressões numéricas e algébricas. É possível decompor a figura em diferentes partes onde identificam o que se mantém e o que varia. Descobrir o que varia é a parte mais complicada e vai depender do modo de decompor a figura, pois é necessário relacionar esses elementos com a posição da figura.

Exemplo 1

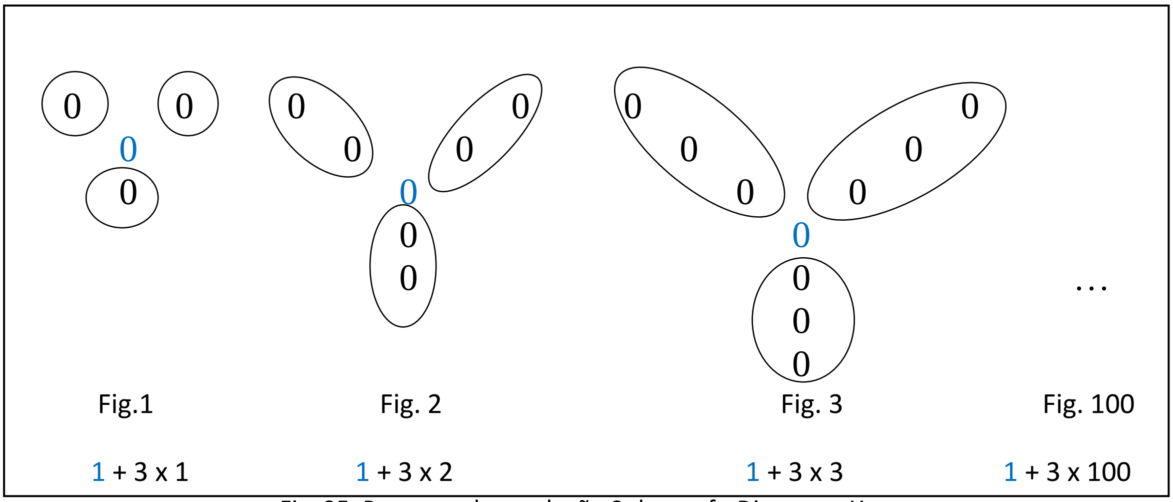


Fig. 25. Proposta de resolução 3 da tarefa *Discos em Y.*

Exemplo 2

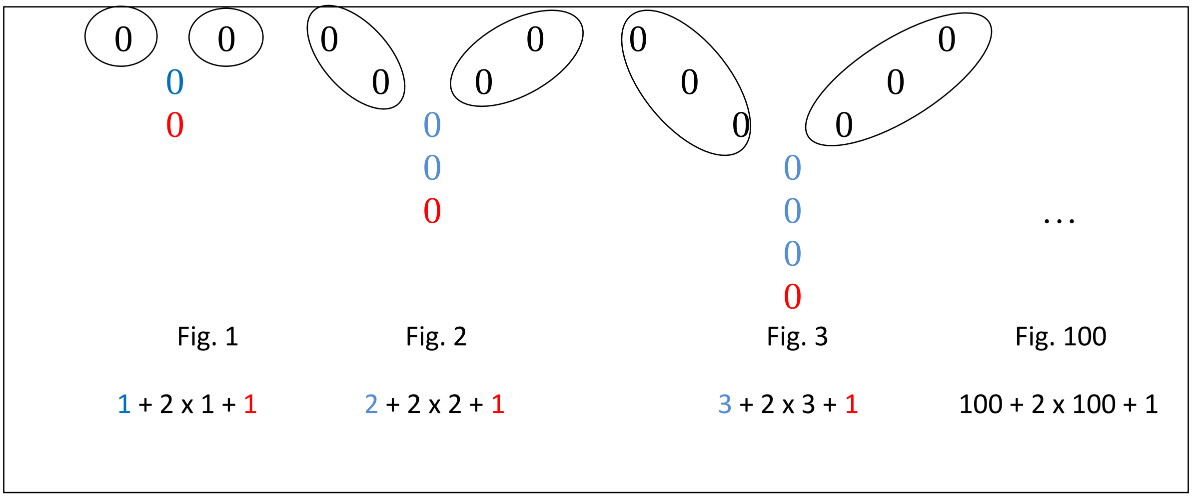


Fig. 26. Proposta de resolução 4 da tarefa *Discos em Y.*

Exemplo 3

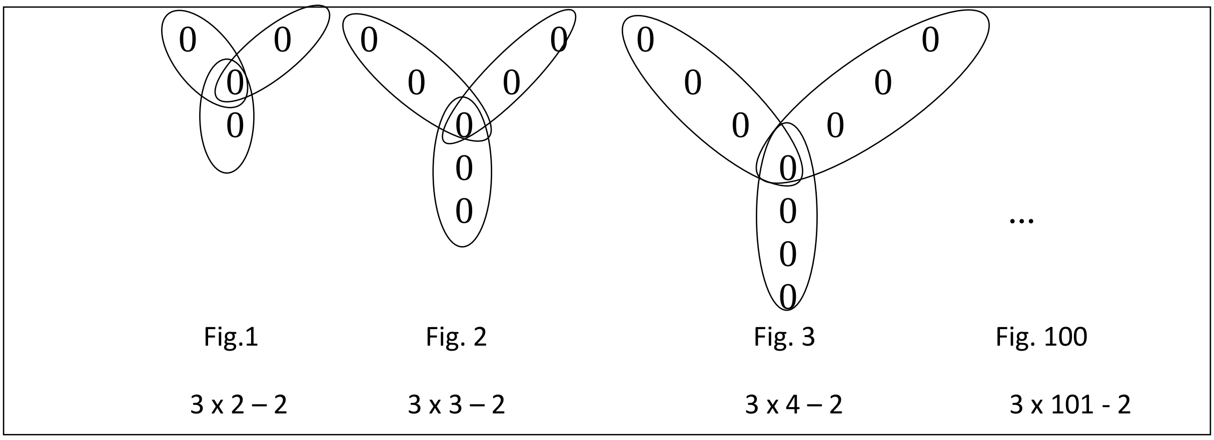


Fig. 27. Proposta de resolução 5 da tarefa *Discos em Y.*

Mesmo com os alunos de níveis iniciais é possível chegar à expressão algébrica, ainda que possam exprimir a generalização em linguagem corrente. Por exemplo, a expressão 1 + 3 x n pode ser verbalmente traduzida num dos seguintes modos ou equivalente: “qualquer termo obtém-se adicionando 1 ao triplo da ordem da figura” ou “ é como se tivesse 1 berlinde ao meio e 3 traços com tantos berlindes quanto o número da figura”.

Terceira cadeia de tarefas – Problemas de Padrão

Como já foi referido, uma das principais finalidades da Matemática é a capacidade de resolver problemas.

Sendo a procura de padrões uma estratégia poderosa de resolução de problemas, é importante propor tarefas desta natureza.

A maior parte dos alunos acha difícil a manipulação visual de padrões para representar a generalização com diferentes expressões. As atividades centradas na desconstrução e reconstrução do próprio padrão facilitam este processo (Vale et al.,2009).

Nesta cadeia incluem-se, quer as tarefas cuja resolução implica que os estudantes construam as suas próprias sequências de modo a descobrir o padrão que os leve à generalização, quer, ainda, aquelas que, sem recorrer a sequências, envolvem a procura de invariantes que dão origem a conceitos e propriedades.

No entanto, para os alunos conseguirem resolver problemas, explorar padrões, fazer conjeturas, ou seja, desenvolver o pensamento algébrico, é necessário tempo, paciência, energia e perseverança.

Brincando com Cubos

Fig. 28. Tarefa 1 da terceira cadeia.

Esta tarefa (Anexo 6), envolve o trabalho com sequências numéricas e a descoberta de padrões. A primeira figura é formada apenas por um cubo e cada uma das figuras seguintes tem mais duas peças que a figura anterior.

Para responder à primeira questão, o aluno poderia usar cubos e fazer a construção, o que lhe permitiria descobrir o número de cubos para construir a quinta figura da sequência.

Os alunos, ao observarem a sequência de sólidos geométricos construídos com cubos, deveriam indicar o número necessário de cubos para construir um determinado sólido. Pretendia-se que determinassem a ordem de um sólido na sequência, conhecido o número de cubos que continha, e que verificassem se algum sólido podia ser construído com um número par de cubos.

Um modo de chegar às respostas podia ser através da construção de uma tabela com a ordem da figura e o respetivo número de cubos, recorrendo ao raciocínio recursivo, em que, para descobrir o número de cubos do sólido seguinte era necessário acrescentar dois ao anterior.

Ordem	**Nº de cubos**	
1	1	+2
2	3	+2
3	5	
...	...	

Fig.29. Proposta de resolução 1 da tarefa *Brincando com Cubos*.

Não será difícil para os alunos chegar à expressão algébrica, ainda que possam exprimir a generalização em linguagem corrente. Por exemplo o aluno pode dizer que "é a tabuada do 2 e tiramos uma unidade", ou então, "qualquer termo obtém-se subtraindo 1 ao dobro da ordem da figura", o que traduz a seguinte expressão algébrica 2 x n – 1.

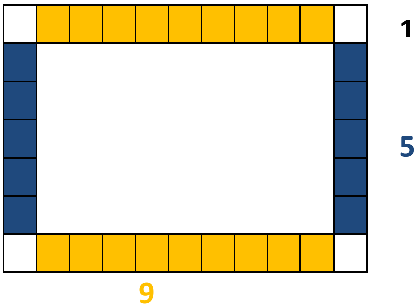
Em relação à questão de existir uma figura com 36 cubos, facilmente se pode verificar que na sequência aparecem apenas números ímpares e, como tal, o 36 não podia fazer parte da sequência.

A Moldura

Nesta tarefa (Anexo 6), que é semelhante às *Bolinhas em Quadrado*, os alunos organizaram-se em pequeno grupo. Para facilitar a descoberta do padrão, utilizaram material manipulativo para construir molduras de diferentes dimensões. A professora intervinha junto dos grupos de trabalho, sempre que se justificasse, com o objetivo de os ajudar a "construir" o raciocínio.

Esta tarefa envolvia alguns tópicos matemáticos na sua realização: termos de uma sequência; termo geral; representação; expressões numéricas; variável; expressões algébricas; propriedades das operações e expressões equivalentes.

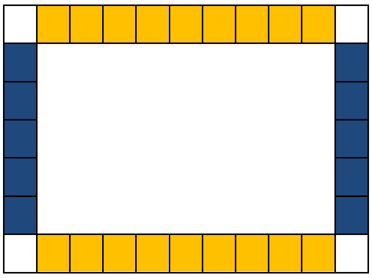
Uma das estratégias que os alunos poderiam utilizar era ver expressões numéricas relacionadas com o perímetro da figura. Um desses modos de ver seria 4 + (**9**+**9**) + (**5**+**5**) = 32. Contudo, poderiam ver de outros modos que são apresentados em seguida.



4 + (**9** + **9**) + (**5** + **5**) ou 4 + 2 x 9 + 2 x 5

Fig.30. Proposta de resolução 1 da tarefa *A Moldura*.

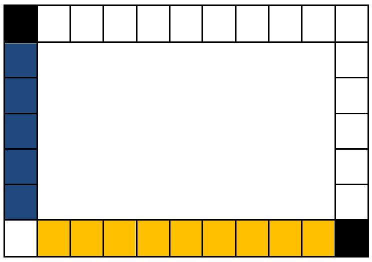
Exemplo 1



4 + 2 x (9 + 5)

Fig.31. Proposta de resolução 2 da tarefa *A Moldura.*

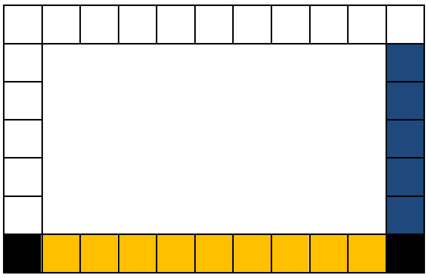
Exemplo 2



2 x (9 + 1) + 2 x (5 + 1)

Fig.32. Proposta de resolução 3 da tarefa A *Moldura*.

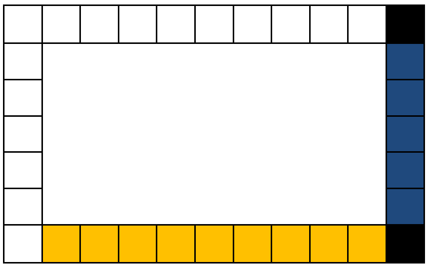
Exemplo 3



2 x (9 + 2) + 2 x 5

Fig.33. Proposta de resolução 4 da tarefa *A Moldura.*

Exemplo 4



2 x 9 + 2 x (5 + 2)

Fig.34. Proposta de resolução 5 da tarefa *A Moldura.*

A partir daqui, os alunos devem descobrir o que há em comum nas várias figuras chegando à generalização, ou seja, a alguma das expressões:

$$4 + 2 \times (c + \ell)$$

$$2 \times (c + 1) + 2 \times (\ell + 1)$$

$$2 \times (c + 2) + 2 \times \ell$$

$$2 \times c + 2 \times (\ell + 2)$$

Outra resolução consiste em analisar o problema do ponto de vista geométrico e calcular a área do retângulo maior, subtraindo-lhe a área do retângulo menor, de modo a obter a expressão $(c + 2) \times (\ell + 2) - c \times \ell$.

Campeonato de Badminton

Nesta tarefa (Anexo 6), os alunos estão perante um problema que nem precisam de reduzir a um mais simples, uma vez que o número de jogos a disputar é pequeno. Caso o número de jogos fosse elevado, uma estratégia possível de resolução seria reduzir o problema a um mais simples, supondo que só há dois, três ou quatro participantes e determinar o número de jogos em cada caso.

Nesta tarefa em concreto, o aluno, através de uma representação icónica, responde facilmente à primeira questão.

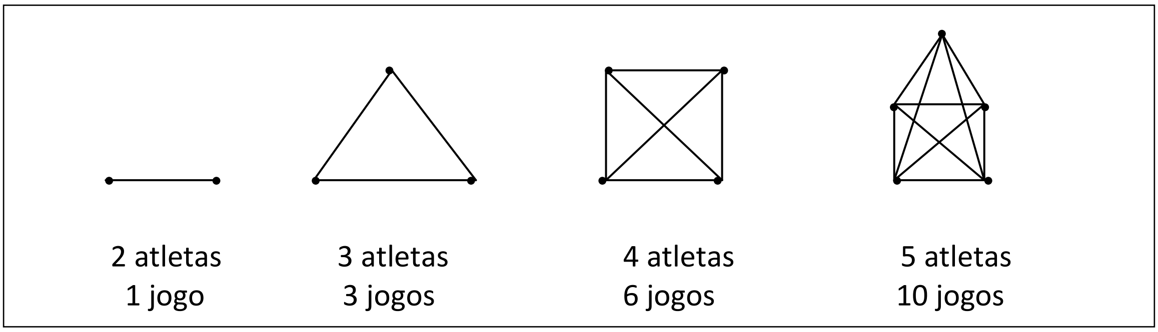


Fig.35. Proposta de resolução 1 da tarefa *Campeonato de Badminton.*

Pode, ainda, fazer-se uma tabela que relacione o aumento do número de jogos com o número de atletas. Será importante que os alunos não necessitem de fazer todas as experiências até ao número pedido, mas que descubram um padrão que relacione o número de jogos com o número de participantes.

N.º de participantes	N.º de jogos
2	1
3	3 = 1 + 2
4	6 = 1 + 2 + 3
5	10 = 1 + 2 + 3 + 4

Fig.36. Proposta de resolução 2 da tarefa *Campeonato de Badminton.*

A descoberta de uma relação deste tipo permite estabelecer a seguinte conjetura: o número de jogos a disputar com um número qualquer de participantes obtém-se adicionando os sucessivos números naturais desde o 1 até ao número anterior de participantes.

Para responder à segunda questão, se o aluno observar a representação que fez na primeira questão e posteriormente a tabela, facilmente se apercebe que pode aplicar a mesma estratégia, sendo agora 14 jogadores, menos um para os jogos e assim sucessivamente.

Se são 8 jogadores e vai ser jogado apenas numa mão, os alunos facilmente se dão conta que em cada linha de jogadores, vai ser disputado sempre menos um jogo, uma vez que para realizar um jogo são necessários dois jogadores.

Este problema pode, ainda, ser resolvido utilizando outra estratégia: fazer uma lista organizada.

Designando os oito participantes por A, B, C, D, E, F, G, H ter-se-á:

AB	BC	CD	DE	EF	FG	GH
AC	BD	CE	DF	EG	FH	
AD	BE	CF	DG	EH		
AE	BF	CG	DH			
AF	BG	CH				
AG	BH					
AH						

Fig.37. Proposta de resolução 3 da tarefa *Campeonato de Badminton.*

A cada par de participantes corresponde um jogo, donde se conclui que vão ser disputados 28 jogos.

Esta tarefa envolve os tópicos matemáticos contagens, relações numéricas e representação.

Existem outros modos de resolução que os alunos podem utilizar, contudo, foram apenas apresentados alguns possíveis.

Análise de dados

Como referem Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é o processo de busca e organização sistemática de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais sobre a situação em estudo e apresentá-la aos outros.

Segundo Merriam (1988), o primeiro nível da análise de dados refere-se à organização dos dados, das transcrições, dos documentos e das notas de campo. O segundo nível refere-se ao estabelecimento de categorias, temas ou classes que transmitam uma primeira interpretação de dados. O terceiro nível visa explicar o significado dos dados e contribuir para a compreensão da problemática em estudo.

Nesta investigação seguiu-se a orientação e modelo de análise de Merriam (1988), tendo-se procedido a uma análise sistemática dos dados, tentando captar evidências e relações que possibilitassem interpretar e compreender os dados recolhidos, com base no enquadramento teórico e nas questões de investigação em estudo.

A análise de dados começou a ser realizada durante a recolha de dados, que teve início com a recolha de registos de natureza biográfica, que permitiram a caraterização da turma e de cada aluno em particular. A análise de dados, nesta fase, foi fundamental na preparação das entrevistas. Atendendo à importância que as entrevistas desempenharam neste estudo no sentido de melhor compreender o raciocínio e modo de pensar dos alunos, no decorrer do seu trabalho, antes da sua realização, a investigadora lia os relatórios que resultaram da observação, visualizava a gravação vídeo das aulas e analisava as respostas dos alunos na ficha de cada tarefa. Este procedimento foi considerado em todas as entrevistas.

Durante esta fase de recolha de dados, à medida que eram realizadas as entrevistas, estas eram transcritas, tendo estas transcrições contribuído no aperfeiçoamento das questões a colocar aos alunos, no sentido de facilitar as suas explicações.

Após terem sido realizadas todas as entrevistas e as suas transcrições, foi feita a leitura de todos os dados recolhidos no sentido de os aperfeiçoar e enriquecer. Assim, optou-se por analisar cada tarefa de um modo global do conteúdo, no sentido de se dar início à análise, propriamente dita, de cada uma.

Procedeu-se a uma leitura atenta das entrevistas tendo sempre em conta as questões às quais se pretendia responder: processos de resolução, papel das diferentes representações, raciocínios, comunicação dos procedimentos e relação entre a descoberta do padrão e os conceitos matemáticos envolvidos.

Para facilitar a interpretação procurou-se aspetos comuns nos dados, tanto nas transcrições das entrevistas como anotações baseadas na observação bem como na visualização das gravações vídeo das aulas e resoluções das tarefas pelos alunos.

Após esta primeira análise, optou-se, como referido, por considerar dois casos de alunos e dez tarefas. Procedeu-se então, novamente, à leitura de todos os dados recolhidos focando toda a atenção nos alunos em questão, tendo-se desenvolvido todo o trabalho relativo aos alunos-caso. Após ter concluído este trabalho de construção de cada caso e, tendo em conta as questões do estudo e o enquadramento teórico, foi efetuada a descrição e a análise dos casos, contribuindo deste modo para a compreensão e interpretação de todos os dados recolhidos.

Ao longo deste trabalho, tendo em conta as questões e propósito do estudo e os meios disponíveis, também foram considerados alguns critérios que garantiram a qualidade do estudo. Através do reconhecimento de pistas que foram surgindo durante as observações, as entrevistas e os documentos, foi possível a recolha de dados e posteriormente a sua análise permitindo efetuar a triangulação de grande parte da informação. Esta recolha resultou das ocorrências e acontecimentos normais em ambiente de sala de aula recolhidos durante o tempo em que decorreu o estudo.

No sentido de confirmar externamente os procedimentos, foram fornecidos registos, documentos e processos usados a professores do ensino básico e investigadores na área da Didática da Matemática.

Relativamente às tarefas na sala de aula foram construídas três cadeias de tarefas de padrões que englobaram um total de dez tarefas (Anexos 4 a 6): três respeitantes a tarefas de contagens, quatro relativas a tarefas de sequências e três referem-se a problemas.

Para a análise das produções dos alunos-caso optou-se, como já foi referido, pelas seguintes grandes categorias de análise: contagens visuais, sequências e problemas, de acordo com o Quadro 3.

Tarefas de padrão	Aspetos a analisar
Contagens	• Utilização do *subitizing*; • Decomposição do número; • Utilização das propriedades das operações; • Utilização das propriedades geométricas; • Identificação de subconjuntos; • Escrita de expressões numéricas; • Equivalência de expressões.
Sequências	• Utilização de números e relações numéricas; • Relaciona conceitos numéricos e geométricos; • Decomposição da figura em diferentes partes; • Generalização próxima (raciocínio recursivo) ou generalização distante (raciocínio funcional) com recurso ao contexto figurativo e/ou ao contexto numérico; • Generalização em linguagem corrente; • Expressão algébrica do padrão.
Problemas	• Desenha uma tabela; • Recorre a um desenho ou esquema; • Faz uma lista organizada; • Reduz a um problema mais simples; • Construção de uma sequência; • Descobre uma lei de formação.

Quadro 3. Categorias de análise.

As resoluções apresentadas pelos alunos foram ainda categorizadas em função da estratégia ou procedimento utilizado em descritivas, figurativas, esquemáticas e simplistas. Na resposta descritiva, é explicado o raciocínio por palavras através da lei de formação da sequência. Na resposta figurativa ou esquemática, é elaborado um desenho, um esquema ou uma tabela para fundamentar o seu pensamento, e, na resposta simplista, há uma solução para a questão mas não é apresentada qualquer justificação.

Em cada uma das cadeias, e por tarefa, foi realizado um resumo das produções escritas dos alunos que exemplifica a categorização das respostas efetuada, com a inclusão de digitalizações de resoluções.

O quadro 4 mostra as tarefas deste estudo e a respetiva categorização das respostas efetuada.

Tarefas \ Categorização de resposta		Descritivas	Figurativas	Esquemáticas	Simplistas
Contagens (primeira cadeia)	*Peixinhos*	X	X		X
	Bolinhas em Quadrado	X			X
	As Palmeiras	X	X		X
Sequências (segunda cadeia)	*Comboio de Cubo*	X	X		
	Rapazes e Raparigas		X	X	X
	Carrinhos Quadrados	X	X		
	Discos em Y	X	X		
Problemas (terceira cadeia)	*Brincando com Cubos*	X	X		X
	A Moldura	X	X		X
	Campeonato de Badminton		X	X	

Quadro 4. Categorização das respostas.

CAPÍTULO IV – OS CASOS

Neste capítulo será efetuada uma caraterização do contexto onde decorreu o estudo, ou seja, da turma do qual fazem parte os dois alunos-caso. Em seguida descrever-se-ão de forma sucinta as dificuldades sentidas pelos alunos e o desempenho realizado pela turma. Identificar-se-ão os processos de resolução e raciocínios utilizados, o papel das diferentes representações, a comunicação dos procedimentos efetuados, assim como o contributo que a exploração de padrões pode dar no desenvolvimento das capacidades transversais.

A Turma

Caraterização

Este estudo foi realizado numa turma de 5.º ano de escolaridade, de uma escola do 2.º e 3.º ciclos do distrito de Braga. O nível socioeconómico da população em geral é considerado médio/baixo. Grande parte dos encarregados de educação frequentou a escolaridade básica até ao 6.º ano de escolaridade, conforme se pode constatar no Anexo 9.

A turma é formada por 24 alunos, sendo 12 rapazes e 12 raparigas, com idades compreendidas entre os 10 e os 11 anos. Encontra-se inscrito na turma um aluno do sexo masculino, que nunca compareceu à escola, uma vez que foi transferido para outra escola fora do país. Quanto ao número de retenções, verifica-se que apenas três alunos sofreram uma retenção durante o primeiro ciclo. Um dos meninos com uma retenção era o tal aluno que nunca compareceu à escola, e as outras duas retenções verificam-se nos dois alunos abrangidos pela Educação Especial, Decreto-lei nº 3 /2008 de 7 de janeiro.

Todos os alunos participaram nas aulas de Matemática, à exceção do que nunca compareceu à escola, perfazendo um total de 23. Os alunos eram provenientes de duas freguesias, tendo frequentado o 1.º ciclo em duas escolas diferentes.

A turma apresentou sempre um bom comportamento, não se verificando casos de indisciplina. No entanto, constatou-se uma certa imaturidade dos alunos face às suas responsabilidades para o ciclo em questão. O aproveitamento também foi considerado bastante satisfatório.

Os alunos mostraram-se sempre entusiasmados com as tarefas propostas empenhando-se na sua realização de modo a ultrapassar as suas dificuldades. Contudo, verificou-se um certo "medo" relativamente à metodologia adotada, quer nas aulas de Matemática, quer durante a realização das tarefas, uma vez que nunca tinham trabalhado segundo esta metodologia, recomendada pelo Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). No início do ano, este "medo" era mais visível uma vez que os alunos vinham de escolas diferentes, houve uma mudança de escola, de ciclo, de professores e de colegas, sendo ultrapassado ao longo do ano.

A maioria dos alunos gosta da escola, mas nem todos referem gostar de Matemática como se descreve no ponto seguinte.

A relação com a Matemática

Ao longo dos tempos a Matemática nem sempre foi encarada da mesma forma. Numa determinada altura, foi considerada a existência de objetos matemáticos reais. Mais tarde, surge a ideia de que um matemático não pode inventar nada, ele só pode descobrir. Mais recentemente, a Matemática passa a ser vista como uma atividade feita por seres humanos marcada pelo seu modo de ser e pelas suas experiências. Também nos nossos dias a Matemática tem espoletado vários tipos de sentimentos nos alunos. Uns adoram-na, outros veem-na como um "pesadelo".

É do conhecimento geral que a Matemática nem sempre é vista com os mesmos olhos pela população em geral. Há aqueles que gostam muito de Matemática, outros "vão se safando" com nível para passar e há, ainda, aqueles que a "detestam". Nesta turma, manifestam um sentimento de nervosismo e medo no que respeita aos conteúdos a abordar. Verifica-se, contudo, algumas respostas que são merecedoras de atenção, nomeadamente quando os alunos referem " sinto-me bem", " sinto-me curioso", "contente" e "entusiasmado" (Anexo 3).

A Matemática é a disciplina que os alunos referem ter mais dificuldade, uma vez que consideram ser uma disciplina difícil. A maioria dos alunos atribui essa dificuldade aos conteúdos abordados anteriormente, destacando o cálculo numérico e a resolução de problemas. Apesar de todos os alunos referirem ter dificuldades na disciplina, consideram-se alunos médios e, na sua maioria, admitem que com algum esforço vão superar as suas dificuldades.

Quando inquiridos sobre as estratégias para melhorar a sua aprendizagem, alguns referem a atribuição de mais tempo para a área da Matemática e outros simplesmente não respondem.

À medida que as aulas iam decorrendo ao longo do primeiro período, os alunos manifestavam atitudes mais positivas relativamente aos conteúdos lecionados bem como à própria disciplina. Começaram a ver a Matemática com outros olhos e de outra forma.

Durante as aulas, os alunos, através da descoberta, eram levados a formular questões, refletir, fazer conjeturas, testar e validar essas conjeturas. A aula iniciava com uma tarefa, que encaminhava os alunos para as suas descobertas e aprendizagens. Posteriormente era feita a análise com a turma em grande grupo, levando os alunos a comunicar os seus pensamentos e raciocínios aos restantes colegas.

Além do trabalho realizado durante as aulas de Matemática, todas as semanas os alunos realizavam tarefas matemáticas nas aulas de Estudo Acompanhado, privilegiando sempre a resolução de problemas que envolviam a descoberta de padrões. Assim, foi possível incutir nos alunos, uma participação mais ativa e mais reflexiva durante as aulas e dotá-los de poderosas estratégias na resolução de problemas. Em todas as aulas foi seguida esta metodologia, incentivando os alunos para a resolução de problemas, para a comunicação dos seus raciocínios e para a reflexão do trabalho realizado.

A turma e as tarefas

A escola adotou uma organização de sala de aula que se manteve durante todo o ano em todas as disciplinas. Os alunos mantiveram os mesmos lugares em todas as disciplinas. Nas aulas de Matemática, os alunos trabalharam sempre em par ou em pequeno grupo tendo-se verificado casos pontuais onde os alunos, por dificuldade de integração e relacionamento com os colegas, acabaram por trabalhar individualmente. Durante a realização das tarefas, tanto as experiências prévias como as que foram alvo de análise, os alunos trabalharam individualmente ou em pequeno grupo à exceção das tarefas que envolviam a utilização de material concreto que foram resolvidas em par.

No decorrer deste trabalho foram propostas, como já referido, três cadeias de tarefas, de exploração e problemas, que permitiram abordar e interligar diversos tópicos matemáticos, apelando também ao desenvolvimento das várias capacidades transversais contemplados no programa de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico (ME, 2007).

Será feita uma descrição do trabalho realizado nas aulas, para cada uma das tarefas, uma breve análise dos diferentes tipos de resolução produzidos pelos alunos, bem como uma descrição das interações e diálogos em sala de aula.

Como já referido anteriormente, neste estudo, optou-se por uma sequência didática que inicia com tarefas de contagens com suporte visual, que privilegia a intuição visual do número e suas relações. Nesta primeira cadeia (Anexo 4), foram apresentadas três tarefas (T1 - *Peixinhos*, T2- *Bolinhas em Quadrado* e T3- *As Palmeiras*). Posteriormente surgem as tarefas de sequências, cujo objetivo é descobrir, completar e generalizar padrões com recurso a material manipulativo. Na segunda cadeia (Anexo 5), foram apresentadas quatro tarefas (T4- *Comboio de Cubos*, T5- *Rapazes e Raparigas*, T6- *Carrinhos de Quadrados* e T7- *Discos em Y*). Por último (Anexo 6), são apresentados aos alunos problemas, onde têm de descobrir e explorá-los para chegar à solução, fazendo parte desta última cadeia três problemas (T8- *Brincando com Cubos*, T9- *A Moldura* e T10- *Campeonato de Badminton).*

Primeira Cadeia - Contagens visuais – reconhecer padrões que facilitam a contagem

As três tarefas apresentadas aos alunos na primeira cadeia surgem num contexto figurativo, permitindo a adoção de estratégias que facilitam o cálculo e o trabalho com expressões numéricas diferentes, dando sentido às operações, suas relações e propriedades.

Estas tarefas, permitem desenvolver o pensamento algébrico baseado na generalização de padrões, e contribuem para a construção de conhecimentos matemáticos: contagens, cálculo mental, propriedades e relações das operações, escrita de expressões numéricas e equivalência de expressões.

As três tarefas da primeira cadeia foram apresentadas aos alunos durante o mês de maio de 2011. Como já referido, todas as tarefas desta cadeia apresentavam um arranjo visual diferente sendo solicitado aos alunos que calculassem o número de elementos em cada figura e encontrassem diferentes modos de contagem, bem como, que escrevessem as respetivas expressões numéricas. Nas tarefas *Peixinhos* (T1) e *Bolinhas em Quadrado* (T2), foi ainda solicitado aos alunos que tirassem uma conclusão relativamente a cada contexto figurativo. Na tarefa *As Palmeiras* (T3), foi fornecido um modo de contagem, sendo solicitado que o aluno mostrasse no desenho como foi feita a contagem.

Peixinhos

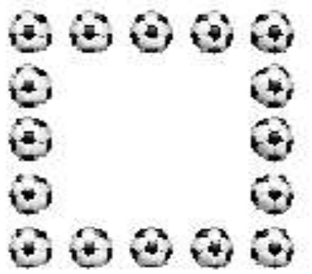
1- Quantos peixinhos estão na figura?
2- Descobre diferentes modos de contagem.
3- Escreve as expressões numéricas respetivas.
4- O que podes concluir?

Fig. 38. Tarefa 1 da primeira cadeia *Peixinhos*.

As questões propostas nas T1, T2 e T3 foram facilmente resolvidas pelos alunos. Das suas produções escritas resultaram três categorias de resposta: 1- Descritivas – os alunos explicaram o seu raciocínio, por palavras, através de estratégias de cálculo diversificadas; 2- Figurativas- Os alunos elaboraram um desenho ou um esquema para fundamentar a resposta e 3- Simplistas- limitaram-se a responder às questões sem apresentar qualquer justificação.

Numa análise global desta primeira cadeia de tarefas, pode-se constatar que em todas as tarefas os alunos respondem, acertadamente, à primeira questão de uma forma simplista.

Na segunda questão da T1, a maioria dos alunos apresenta dois modos de contagem diferentes. Uns apresentam a resposta de uma forma descritiva sugerindo a formação de subconjuntos de três ou de seis e juntando um, ou então, formando filas com 5 peixinhos. Contudo, a maioria dos alunos dá uma resposta figurativa, pois verificam que há 5 filas com 5 peixinhos cada. Verifica-se, também, que os alunos com mais dificuldade de visualização referem a contagem um a um.



Bolinhas em Quadrado

1- Determina o número de bolas que formam a figura junta.
2- Como é que calculaste?
3- Descobre modos diferentes de as contar.
4- Descreve as expressões numéricas que traduzem esse modo de contagem.

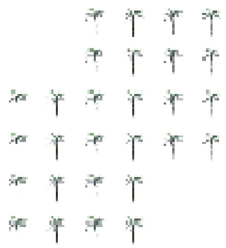
Fig. 39. Tarefa 2 da primeira cadeia *Bolinhas em Quadrado*.

Na segunda tarefa da primeira cadeia, relativamente à terceira questão, a maioria dos alunos refere apenas um modo de contagem. Todos os alunos deram uma resposta descritiva, escrevendo expressões numéricas e usando as propriedades e relações das operações. Uma parte dos alunos recorre a adições sucessivas mas, a maioria, recorre a expressões com multiplicação e adição. Contudo, verifica-se, um número significativo de alunos que recorre à formação de subconjuntos de dois, quatro ou oito.

No que respeita à terceira questão da T1, e à quarta questão da T2, todos os alunos conseguem escrever pelo menos uma expressão numérica representativa do seu raciocínio.

Por último, na questão 4 da T1 e na questão 5 da T2, todos os alunos responderam de uma forma descritiva, apresentando a sua opinião sobre o modo de contagem que consideraram mais fácil para cada uma das tarefas.

As Palmeiras



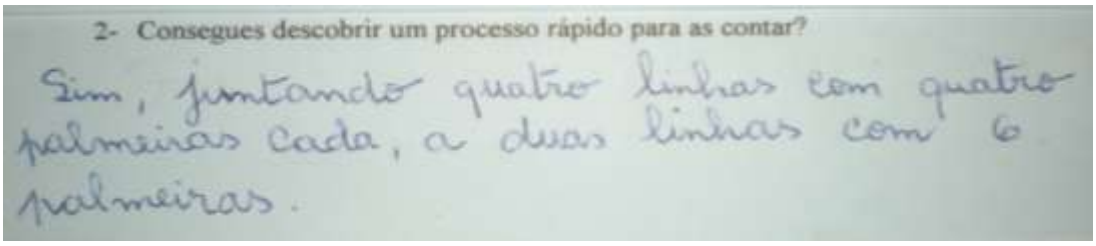
1- Quantas palmeiras tem o Ricardo no seu jardim?
2- Consegues descobrir um processo rápido para as contar?
3- Escreve a expressão numérica respetiva.
4- O modo de contagem que eu vi é dado pela expressão 6 x 6 – 2 x 4. Consegues mostrar no desenho como é que eu vi para fazer a contagem?

Fig. 40. Tarefa 3 da primeira cadeia *As Palmeiras*.

Na segunda questão da T3, os alunos responderam de uma forma descritiva. Constata-se, que todos os alunos recorrem a expressões numéricas, que envolvem sempre produtos e adições, verificando-se que nesta fase de resolução da tarefa, nenhum aluno recorre a expressões com diferenças.

As produções escritas apresentadas pelos alunos são variadas verificando-se que a formação de subconjuntos de quatro, seis e oito é muito frequente.

Pela originalidade na sua resposta, foi destacado um aluno, que observou a figura de um modo distinto dos restantes.



2- Consegues descobrir um processo rápido para as contar?

Sim, juntando quatro linhas com quatro palmeiras cada, a duas linhas com 6 palmeiras.

Fig. 41. Resposta descritiva da segunda questão da tarefa 3 da primeira cadeia.

A grande maioria dos alunos forma subconjuntos de quatro e determina o seu produto.

A última questão da T3, apresentou alguma dificuldade aos alunos, porque agruparam as palmeiras em subconjuntos de seis, ou em alguns casos de quatro, criando alguma dificuldade no seu raciocínio porque não entenderam como poderiam tirar os dois subconjuntos de quatro.

Apenas metade dos alunos consegue mostrar no desenho o modo de contagem solicitado, destacando-se dois alunos, que respondem de forma figurativa, ilustrando o modo de contagem pretendido mas não o fazem no desenho como era solicitado.

Fig. 42. Resposta figurativa da questão 4 da tarefa 3 da primeira cadeia.

Verifica-se também, alguns casos, em que o aluno entendeu o modo de contagem, porque escreve a expressão corretamente, mas, não consegue fazer a respetiva correspondência no desenho.

Numa breve análise efetuada ao desempenho dos alunos, nesta primeira cadeia de tarefas sobre contagens onde privilegia o contexto figurativo, verifica-se que, todas as atividades despertaram um grande interesse e empenho dos alunos, no entanto, nem todos conseguiram responder acertadamente a todas as questões, conforme as expetativas propostas. No geral, a turma recorreu às operações e suas propriedades sendo o modo de contagem influenciado pela sua capacidade de *ver*. Apresentaram mais dificuldade nas questões onde tinham de tirar a conclusão, uma vez que exigia uma reflexão sobre as expressões numéricas utilizadas. Nem todos os alunos apresentaram essa conclusão, verificando-se dificuldades no registo que iniciam mas que não o concluem. Verifica-se também, que os alunos não recorrem a expressões numéricas que envolvam subtrações e, poucos usam o conceito de área do quadrado.

Segunda Cadeia - Sequências – descobrir e generalizar padrões

Nesta cadeia são apresentadas quatro tarefas, sendo as duas primeiras relativas a padrões de repetição (T4- *Comboio de Cubos* e T5-*Rapazes e Raparigas*), e as duas últimas sobre padrões de crescimento (T6- *Carrinhos de Quadrados* e T7- *Discos em Y*).

Nas tarefas relativas a padrões de repetição, o raciocínio usado envolve pensar num conjunto de figuras que se alternam, mas também se pode ver o padrão como a junção contínua de duas figuras formando um motivo, permitindo deste modo, que o aluno organize o seu pensamento.

Nos padrões de crescimento, cada termo, muda de forma previsível em relação ao anterior. As sequências com figuras cuja construção depende da anterior, levam à generalização próxima, permitindo desenvolver o raciocínio recursivo e a aprendizagem gradual da Álgebra.

Para a realização da tarefa T4, os alunos foram convidados a recorrer aos cubos, num total de 11, que se encontravam na sua mesa de trabalho, caso sentissem necessidade.

Nas duas últimas tarefas desta cadeia, T6 e T7, foi proporcionado aos alunos a utilização de material manipulativo, de modo a poderem fazer a construção dos primeiros termos da sequência.

Na T4, nas três primeiras questões, os alunos continuam a sequência corretamente e identificam o grupo que se repete. Na quarta questão, todos os alunos conseguem identificar que o quinto e o décimo primeiro cubo têm cor azul, à exceção de dois que referem amarelo.

Na última questão, os alunos respondem de uma forma descritiva, apresentando dificuldades na comunicação do raciocínio efetuado. A maioria dos alunos consegue responder, acertadamente, justificando que os cubos com número ímpar são azuis e os de número par são amarelos.

Verifica-se que alguns alunos respondem corretamente azul, mas não conseguem comunicar o seu raciocínio nas suas produções escritas limitando a sua resposta à construção que fizeram na sua mesa de trabalho com o material disponibilizado.

Na tarefa T5, foi colocado à disposição dos alunos material manipulativo, em que os alunos poderiam utilizar caso sentissem necessidade.

Nas duas primeiras questões os alunos continuaram a sequência e identificaram o grupo que se repete com facilidade.

A terceira e quarta questões já apresentaram alguma dificuldade, uma vez que o aluno é levado a descobrir a lei de formação da sequência. Contudo todos os alunos responderam corretamente à exceção de dois.

Na questão 3, os alunos responderam através do prolongamento da sequência e contagem do número de raparigas.

Na questão 4, era exigido um maior grau de abstração, uma vez que apelava ao conceito de razão e a continuação da sequência tornava-se pouco prática. Contudo, todos os alunos responderam corretamente a ambas as questões, à exceção de dois e cinco, respetivamente.

A quinta questão tornou-se um pouco mais complexa para os alunos, pois, exigia a divisão 90 : 3, ou através de uma estratégia multiplicativa, descobrindo qual é o número que multiplicado por 3 dava 90. A maioria dos alunos responde corretamente, verificando-se que nove alunos são levados a determinar a metade do número total de crianças, e respondem de acordo com esse cálculo.

As conclusões da questão 6 incluem os seguintes aspetos: o número total de crianças é o triplo do número de grupos que se repetem, ou do número de raparigas; o número de raparigas é igual ao número de grupos que se repetem; o número de rapazes é o dobro do número de raparigas.

De um modo geral, nas conclusões dos alunos, verifica-se uma grande dificuldade em comunicar o seu raciocínio, tornando-se por vezes pouco legível a linguagem utilizada.

Na T6, as três primeiras questões foram facilmente resolvidas pelos alunos, tendo estes recorrido ao material manipulativo. Todos os alunos responderam corretamente.

Na quarta questão, os alunos são levados a descobrir o padrão, referindo que na parte central do carrinho o número de quadrados é igual ao número da figura mais 1, e juntam sempre 3 quadrados. Outros referem que ao número da figura juntam sempre 4 quadrados.

Verifica-se que todos os alunos respondem corretamente a esta questão, e que as explicações são mais objetivas e com uma linguagem mais acessível.

Na T7, os alunos respondem facilmente à primeira e segunda questão, verificando-se que apenas três não conseguiram, por falta de atenção. Na questão 2, os alunos sentiram alguma dificuldade em representar a sequência de forma diferente, porque centraram a sua atenção apenas numa figura e aí representaram-na de maneira diferente. Outros recorreram a somas, de modo a obterem o número total de discos de cada figura. Contudo, a grande maioria dos alunos consegue identificar o padrão, e apresenta a generalização já na sua fase simbólica, usando a letra n para representar o número de discos de uma figura qualquer.

As produções escritas dos alunos na terceira questão revelam que a maioria responde corretamente, apresentando uma resposta descritiva e noutros casos figurativa.

Por último, a maioria dos alunos, usando uma linguagem corrente, afirma que para construir uma figura de qualquer ordem adiciona-se o triplo do número da figura com uma unidade. Contudo, um número considerável de alunos recorre à expressão algébrica utilizando a variável n de modo intuitivo e que surgiu naturalmente.

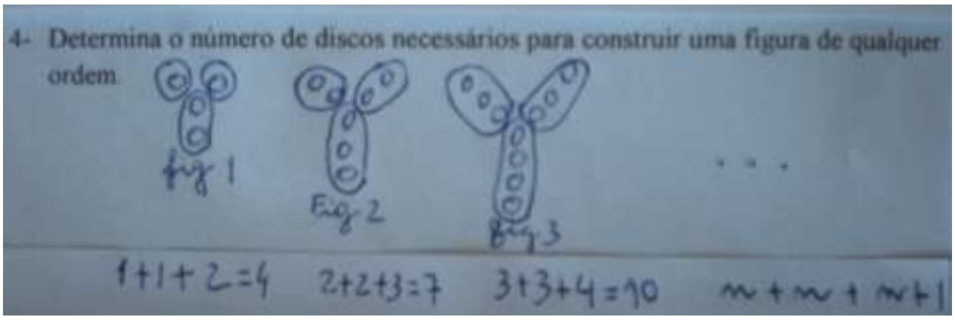


Fig.43. Resposta figurativa da quarta questão da tarefa 7 da segunda cadeia.

Em síntese, pode-se referir que todos os alunos identificaram a sequência e o padrão. A maioria dos alunos utiliza uma linguagem informal na sua explicação, verificando-se que, embora identifiquem o padrão, têm muita dificuldade em transmitir o seu raciocínio, e nem sempre estão evidentes as propriedades numéricas ou geométricas.

Nas tarefas relativas a padrões de repetição, o desempenho dos alunos foi considerado satisfatório, contudo, continuam a revelar dificuldade no registo das conclusões da sequência. No entanto, a maioria dos alunos consegue identificar o motivo de repetição da sequência e chega à generalização distante, desenvolvendo o raciocínio funcional.

Nas tarefas de padrões de crescimento, os alunos revelaram-se mais confiantes e conseguem, com alguma facilidade, chegar à generalização distante. O desempenho dos alunos na segunda tarefa foi bastante mais satisfatório que na primeira, pois permitiu que os alunos chegassem à generalização distante e encontrassem a expressão algébrica correspondente à sequência.

Terceira Cadeia - Problemas de padrão

Desta cadeia fazem parte três tarefas. Na primeira tarefa (T8- *Brincando com Cubos*), o aluno constrói a sua própria sequência, de modo, a descobrir o padrão que leva à generalização, enquanto, na segunda e terceira tarefas (T9- *A Moldura* e T10- *Campeonato de Badminton*), sem recorrer a sequências, o aluno procura invariantes que dão origem a conceitos e propriedades.

Para realizar a primeira tarefa T8, foi disponibilizado aos alunos cubos para utilizarem, caso considerassem necessário.

A primeira questão foi facilmente resolvida por todos os alunos verificando-se três categorias de resposta: 1) Descritivas - os alunos explicam o seu raciocínio, por palavras, através da lei de formação da sequência n+n+1; 2) Figurativas - elaboram um desenho ou um esquema para fundamentar a sua resposta e 3) Simplistas - respondem à questão sem apresentar qualquer justificação.

Na segunda questão, todos os alunos responderam corretamente, à exceção de três.

Na última questão, os alunos sentiram dificuldade em explicar o seu raciocínio, verificando-se que apenas metade identifica corretamente que o número de cubos da sequência é sempre um número ímpar, e 36 é número par.

Na T9, os alunos foram distribuídos em pequenos grupos de trabalho, tendo-se disponibilizado material manipulativo, caso achassem necessário. A investigadora e professora da turma intervinha junto dos grupos de trabalho sempre que se justificasse, com o objetivo de os ajudar a "construírem" o raciocínio.

Para responder à primeira questão, os alunos utilizaram a estratégia de *ver* expressões numéricas relacionadas com o perímetro da figura. Os modos mais comuns de ver foram (2x7)+(2x9) e (2x11)+(2x5). Todos os grupos apresentaram uma resposta descritiva à exceção de um que foi simplista.

A segunda questão foi considerada difícil para os alunos. Todos os grupos apresentaram uma resposta figurativa mas, apenas um grupo respeitou o modelo do espelho apresentado.

Na última questão, todos os grupos chegam à generalização, embora com falhas, pois referem a expressão (2xc)+(2xℓ), esquecendo-se dos quatro quadrados que se encontram nos vértices da moldura. Apenas um grupo chega à generalização através da expressão $(2xc)+(2x\ell)+4$.

Na última tarefa desta cadeia (T10), os alunos apresentam uma resposta esquemática, elaborando um esquema com oito e catorze jogadores, para fundamentar as suas respostas.

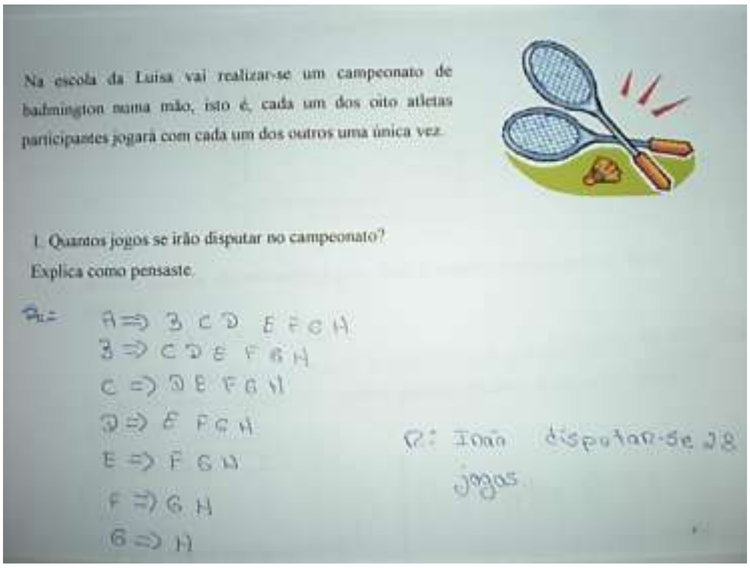


Fig.44. Resposta esquemática da segunda questão da tarefa 10 da terceira cadeia.

Nesta tarefa, os alunos chegaram à descoberta do padrão não numérico, verificando que o número total de jogos disputados se obtinha através de adições sucessivas, em função do número de jogadores.

Os problemas foram de todas as tarefas as que os alunos apresentaram mais dificuldade. No problema dos cubos, os alunos utilizaram material manipulativo durante a sua exploração, tendo respondido corretamente a todas as questões. A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi desenhar a sequência dos cubos seguindo a orientação dada. A maioria desenhou a sequência com quadrados o que não os impediu de chegarem à generalização.

O desempenho dos alunos no segundo e terceiro problemas foi melhor, uma vez que trabalharam em grupo, o que lhes permitiu a partilha e enriquecimento das opiniões. No problema *A Moldura,* todos os grupos utilizaram expressões numéricas relacionadas com o perímetro, contudo, nem todos conseguem chegar à generalização. No problema do *Campeonato de Badminton,* todos os alunos descobrem o padrão não numérico, através de uma resposta esquemática.

Para finalizar, constatou-se que houve uma evolução no desenvolvimento das várias tarefas pelos alunos, tendo-se verificado que, apesar da sua diversidade e o grau de exigência aumentar de cadeia para cadeia, os alunos corresponderam sempre de uma forma bastante positiva. Foi notório neste trabalho que a utilização de material manipulativo, e posteriormente as representações pictóricas, desenvolveram nos alunos a capacidade de recorrer tanto a contextos figurativos como numéricos. Verificou-se também, que alguns alunos usaram o raciocínio indutivo para fazer a generalização na observação de padrões, tendo tirado as suas conclusões a partir dos dados recolhidos, contudo, não conseguiram fazer novas descobertas.

O João

Um dos participantes neste estudo é o João. Neste ponto, será apresentado este aluno, referindo as principais caraterísticas pessoais, bem como a relação que este mantém com a escola e, principalmente, com a Matemática. Posteriormente será analisado o seu trabalho durante a realização das tarefas que envolvem a exploração de padrões. Por último, será apresentada uma síntese dos aspetos mais positivos do seu trabalho.

O João enquanto aluno e pessoa

O João é um menino que vive com os seus pais e uma irmã mais nova, numa freguesia que dista 8 km da escola. Os seus pais possuem uma drogaria onde ambos trabalham. No futuro, quer ser cientista para descobrir coisas novas. Os seus tempos livres são passados a jogar playstation e futebol com os amigos. Não gosta de estar na loja dos pais, porque "é uma seca" estar à espera dos clientes. Na escola, sempre que surge um tempinho livre, dedica-o aos jogos no computador e ao futebol. Não é um menino de muitos amigos, porque os outros preferem ocupar o seu tempo livre com outras atividades, acabando por se afastar deles. Em relação às suas colegas, raramente se relaciona com elas porque elas não jogam futebol. Sente-se envergonhado perante as colegas da turma e com os meninos que não fazem parte do seu grupo de amigos, tendo como consequências a rejeição dos seus colegas.

Enquanto aluno, é responsável e inteligente embora um pouco reivindicativo. É um aluno pouco participativo apresentando, com alguma frequência, momentos que "desliga" por completo do trabalho que está a ser realizado na aula. Quando solicitado a participar, quer nas tarefas, quer oralmente, fá-lo com empenho e dedicação. Apesar de apresentar momentos de alheamento do trabalho que está a ser desenvolvido na aula, facilmente se integra na tarefa e consegue responder acertadamente. É um aluno inteligente, por isso não sente necessidade de se empenhar demasiado no seu trabalho. Gosta de participar na aula quando solicitado, contudo, sente muita dificuldade em transmitir o seu modo de pensar, tanto oralmente, como por escrito. Apresenta uma caligrafia pouco legível, é pouco organizado e apresenta, com alguma frequência, erros ortográficos.

Na turma, os colegas veem-no como "o complicado", por não acompanharem o seu raciocínio quando justifica a sua resposta.

Mesmo não sendo um aluno muito dedicado ao estudo, o João gosta da escola e de aprender, destacando a disciplina de Ciências da Natureza como a sua favorita.

Tem consciência das suas capacidades e que se dedicasse mais tempo ao estudo obteria melhores resultados. Mesmo assim acompanha facilmente os conteúdos abordados nas aulas.

Sendo um menino com dificuldade em estar atento nas aulas e com tendência para conversar com o colega de carteira, e outros, o João estava só num lugar ao fundo da sala.

Nas aulas de Matemática, o aluno deixava o seu lugar e trabalhava em par com outro colega, que também estava só, apresentando um desempenho bastante satisfatório.

Quanto à Matemática enquanto disciplina, considera ser "chata" porque tem dificuldade em expressar o seu modo de pensar tanto por escrito como oralmente.

Sente-se bem e entusiasmado quando é colocado perante uma tarefa referindo que as atividades preferidas são os cálculos e sente alguma dificuldade na resolução de problemas.

Além de se poder considerar um bom aluno a Matemática, o João considera-se um aluno médio porque tem muitas dúvidas. Quando lhe foram pedidas sugestões para uma melhor aprendizagem não fala de si mas manifesta uma preocupação com os colegas que têm dificuldade em acompanhar o ritmo da turma.

Com uma personalidade bem demarcada, o João é muito reservado nas suas intervenções. Quando interrogado sobre um episódio que o tivesse marcado pela negativa no 1.º ciclo, o João refere a resolução de um problema no quadro. Ainda hoje o aluno não gosta muito de ir ao quadro porque tem de se expor perante os colegas. Refere como uma marca positiva o dia que dominou pela primeira vez o cálculo das quatro operações, e o facto de conseguir a nota Excelente nas fichas de avaliação.

Ao longo do ano o aluno teve sempre um comportamento satisfatório, não se envolvendo em confusões. Embora tentasse passar despercebido na sala, com as solicitações permanentes do professor foi percebendo que para ter um bom desempenho era necessário estar atento ao trabalho da sala. Em relação aos amigos mostrou-se satisfeito com o número reduzido de colegas que alinhavam nos jogos de computador e de futebol. Por outro lado tinha sempre a possibilidade de encontrar algum colega de outra turma que alinhasse nas suas brincadeiras.

O desempenho do aluno em tarefas de exploração de padrões

Numa análise ao trabalho desenvolvido pelo João durante as dez tarefas, sobre a exploração de padrões, constata-se que este responde com sucesso a todas as questões, ainda que as respostas nem sempre estejam completas. As suas resoluções vão de encontro às expetativas propostas, contudo, verifica-se que comunicar oralmente o seu pensamento aos colegas não foi tarefa fácil, mas, mais difícil foi organizar as suas ideias nos registos efetuados.

O trabalho do João, bem como dos restantes colegas da turma, teve início com as experiências prévias de contagens visuais na moldura do 5 e 10, com o objetivo de facilitar a identificação de padrões, desenvolver o reconhecimento visual dos números e capacidades a nível da adição, subtração, multiplicação e divisão, incluindo o cálculo mental.

Contagens - A tarefa *Peixinhos* não trouxe dificuldades para o João tendo respondido corretamente a todas as questões. De todas as tarefas realizadas constata-se que esta foi a que mais o encantou, tendo-a considerado muito fácil.

O arranjo visual que o aluno descobriu, de uma forma intuitiva e mais simples, foi importante na descoberta de estratégias de cálculo tendo, nas suas produções escritas, referido dois modos de contagem. Na primeira contagem, recorre ao *subitizing* e verifica que há 5 filas com 5 peixinhos cada, então aplica de imediato o conhecimento do arranjo quadrangular da multiplicação ou a área do quadrado.

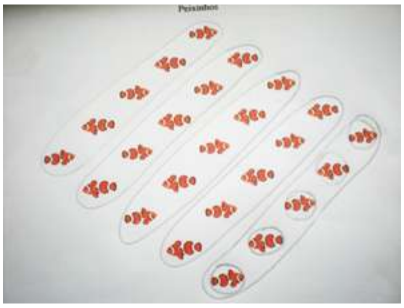
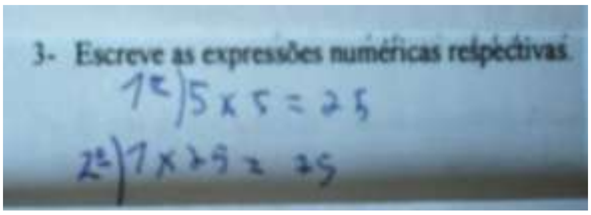


Fig. 45. Resposta do João à primeira questão da tarefa *Peixinhos*.

O segundo modo de contagem apresentado é aquele que maior número de alunos refere, que é a contagem um a um. Para cada modo de contagem o aluno apresenta, de modo compreensivo, a expressão numérica correspondente acompanhada de uma descrição onde refere que fez um arranjo de 5 por 5 e 1 por 25, o que traduz o seu pensamento.

Cada modo de ver dá origem a expressões diferentes em que o aluno recorre às propriedades numéricas, nomeadamente à definição de multiplicação e equivalência de expressões, obtendo o mesmo resultado. O João escreve a expressão numérica correspondente a este modo de contagem através do arranjo retangular da multiplicação



3- Escreve as expressões numéricas respectivas.

1ª) 5 x 5 = 25

2ª) 1 x 25 = 25

Fig. 46. Resposta do João à terceira questão da tarefa *Peixinhos*.

A tarefa *Bolinhas em Quadrado* (Anexo 5), apresentou um pouco de dificuldade ao João.

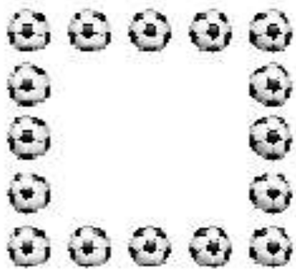


Fig. 47. Tarefa 2 da primeira cadeia.

Nesta tarefa, responde corretamente a todas as questões, mas apresenta alguma dificuldade em traduzir o seu modo de ver nas suas produções escritas. Durante a realização da tarefa nunca solicitou qualquer explicação da professora, mantendo-se concentrado no seu trabalho.

A maioria dos colegas do João recorre à figura inicial para registar as suas observações enquanto este não acha necessário. Observando a figura inicial, o João decompõe-na em partes que tenham significado para ele, proporcionando-lhe um entendimento mais consistente das propriedades e relações numéricas.

Ao responder à primeira questão, fá-lo de uma forma simplista, explicando na segunda questão que fez dois arranjos de 5 bolas e três arranjos de 2 bolas.

Uma vez que o aluno se manteve concentrado no seu trabalho, e não solicitou qualquer explicação à professora, o aluno terminou a tarefa bastante confiante do seu desempenho. Só durante a realização da entrevista o João tomou consciência que havia inconsistência entre o modo de ver e a expressão que utilizou. A expressão que ele escreveu não traduziu o seu modo de ver.

À medida que decorria a entrevista, o aluno percebeu que, apesar de estar perante 6 bolas na parte central, o arranjo que ele escreve nas suas produções escritas não corresponde ao arranjo que surge no seu pensamento quando determina o número de bolas.

Professora: Como calculaste o número de bolas que formam a figura?
João: Vi que tinha duas linhas, uma em cima e outra em baixo de 5 bolas. Depois vi que aqui no meio tinha 3 filas com 2 bolas cada...
Professora: Mas eu não vejo três filas, João!
João: Assim professora (apontando com o dedo paras as três bolas do centro no lado direito e depois no lado esquerdo).
Professora: Mas aí vejo 2 filas com 3 bolas cada!

João: Mas eu vi assim (deslizando novamente com o dedo na horizontal), nesta linha tem 2, nesta mais 2 e na de baixo mais 2.
Professora: Ah! Acho que já entendi! Tu viste 3 linhas com duas bolas cada!
João: Pois...

Desta forma, o João percebeu que a escrita desempenha um papel muito importante na comunicação. De facto, foi muito mais fácil para o João comunicar oralmente o seu pensamento do que passá-lo ao formato escrito. Ele entendeu que comunicar oralmente o seu pensamento exige um esforço de organização de ideias enquanto um registo escrito obriga a refletir sobre o próprio trabalho e a clarificar pensamentos sobre as ideias desenvolvidas.

Na terceira questão refere outro modo diferente de contar as bolas: reconhece quatro conjuntos de 4 bolas cada, numa disposição padrão de modo a tornar os cálculos mais fáceis. Ao mesmo tempo aprendeu a simplificar a situação procurando padrões e simetrias.

Fig. 48. Resposta do João à terceira questão da tarefa *Bolinhas em Quadrado*.

Por último, o João descreve as expressões numéricas que traduzem os dois modos de contagem e conclui que contar bolas é fácil!

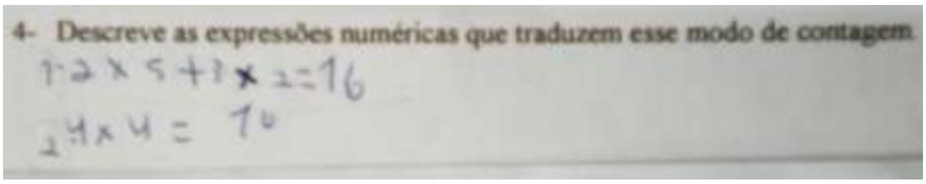

4- Descreve as expressões numéricas que traduzem esse modo de contagem
1-2×5+3×2=16
2 4×4 = 16

Fig. 49. Resposta do João à quarta questão da tarefa *Bolinhas em Quadrado*.

Assim como alguns dos seus colegas, o João terminou a tarefa um pouco antes de terminar a aula. No tempo que restou, ficou sossegado no seu lugar, com um ar vitorioso, porque foi dos primeiros a concluir a tarefa.

A tarefa *As Palmeiras* não trouxe dificuldade para o João. Após a distribuição da mesma, de imediato o aluno põe mãos ao trabalho.

Na primeira questão, o João responde de uma forma simplista. De imediato, e sem hesitação, avança para a questão seguinte. O processo rápido que ele descobriu para contar o número de palmeiras, foi reconhecer sete conjuntos de 4 palmeiras numa disposição padrão e responder que são 28. Acrescenta, ainda, que também dava para fazer quatro arranjos com 7 palmeiras cada. Assim, o João reforça o conhecimento sólido sobre factos básicos relacionados com a adição ou multiplicação, que são uma componente importante no cálculo.

Na terceira questão, sem qualquer dificuldade, escreve a respetiva expressão numérica, que traduz perfeitamente o seu modo de ver.

Na última questão desta tarefa foi proposto o inverso: foi apresentada uma expressão numérica e pedido aos alunos o modo de ver que traduzisse visualmente essa expressão numérica.

Sem abrandar o ritmo de trabalho, o João visualiza de novo a figura inicial e decompõe-na em partes que têm significado para ele, permitindo-lhe mais facilmente identificar uma relação entre a expressão numérica apresentada e o modo de ver. Mais uma vez o João mostra-se muito seguro do seu pensamento. Primeiro, desenha na figura inicial as palmeiras que faltam para fazer seis arranjos de 6 palmeiras. Depois, no arranjo que faz, delimita os dois arranjos de 4 palmeiras cada, excluindo-os da figura inicial.

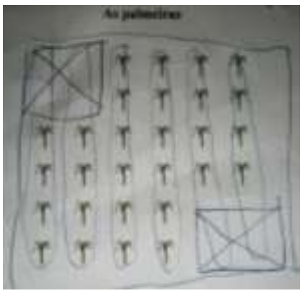


Fig. 50. Resposta do João à quarta questão da tarefa *As Palmeiras*.

Verifica-se que, mais uma vez, o João consegue contornar muito bem esta situação revelando-se seguro na generalização que faz daquele modo de ver.

Professora: Quando olhaste para a expressão, o que viste?
João: Que precisava de arranjar 6 filas com 6 palmeiras cada.
Professora: Porquê?
João: Porque na expressão aparece 6x6.
Professora: E então?
João: Desenhei na figura as 4 palmeiras em baixo e outras 4 em cima para que todas as filas tivessem 6.
Professora: E depois?

João: Vi que tinha de tirar dois grupos de 4 palmeiras.
Professora: Como fizeste?
João: Risquei as palmeiras que tinha desenhado, 4 em cima e 4 em baixo.
Professora: Riscaste 8 palmeiras, certo?
João: Sim.
Professora: Porquê?
João: Porque na expressão dizia que tinha de tirar dois conjuntos de 4.
Professora: Então tinhas de tirar 8 palmeiras?
João: Sim.

Durante a aula de discussão da tarefa, o João mostrou-se bastante entusiasmado com a apresentação do seu trabalho à turma. Grande parte dos colegas teve dificuldade nesta questão e não conseguiu mostrar na figura aquele modo de ver, deixando o João ainda mais orgulhoso do seu desempenho. Foi um momento bastante positivo para o aluno, porque fez uma boa apresentação no quadro e conseguiu, de certo modo, ultrapassar algumas marcas negativas durante o primeiro ciclo.

A turma ficou surpreendida com a apresentação do João e, a partir desse momento, começaram a dar mais atenção às suas explicações porque, apesar de ser um menino reivindicativo, também é inteligente.

Na generalidade, a turma sentiu dificuldades na última questão, por surgir pela primeira vez uma situação inversa à que já pareciam habituados.

Sequências - A tarefa *Comboio de Cubos* também não trouxe dificuldade para o João.

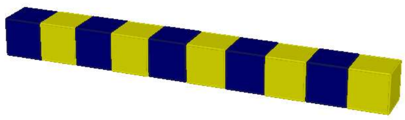


Fig. 51. Tarefa 1 da segunda cadeia.

Mesmo depois de ser informado de que podia utilizar cubos unitários fixáveis, caso sentisse necessidade, optou por não utilizar o material disponibilizado. Logo que lhe foi entregue a tarefa, com um ar muito calmo, João começa a ler e identifica de imediato uma mudança ou repetição de cubos. Esta ideia de repetição, apesar de não ser a única, é muito forte no conceito de padrão.

Como já foi referido anteriormente, um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente.

Quando se pediu ao João para continuar a sequência de cubos, ele fá-lo sem dificuldade, mesmo sem utilizar o material disponibilizado. Nessa explicação que dá ao colega, já na segunda questão, explica que tem de usar pequenos cubos pela ordem azul-amarelo-azul-amarelo...

O raciocínio usado pelo João permitiu-lhe pensar num conjunto de figuras que se alternam azul-amarelo-azul-amarelo-azul-amarelo...

A terceira questão aponta para outro modo de ver o padrão, como a junção contínua de duas figuras azul amarelo, azul amarelo, azul amarelo...o que corresponde à identificação do motivo que se repete.

O João identifica, e bem, o motivo de repetição, o que o levou a pensar que estava perante um padrão de repetição.

Na quarta questão, o João responde que o quinto e o décimo primeiro cubo terão cor azul. Quando questionado sobre a cor do vigésimo quarto cubo responde com toda a certeza que será amarelo, explicando que os cubos de ordem ímpar são azuis e os de ordem par são amarelos.

Apesar do João não sentir necessidade em utilizar o material concreto em nenhuma questão, o mesmo não se verificou com os restantes colegas. Para responder às duas primeiras questões, a maioria dos alunos recorre ao modelo concreto tendo arranjado outra estratégia para a última questão, por já não terem material suficiente.

Embora inicialmente tenham utilizado material concreto, os alunos ficaram sensibilizados para a estrutura do padrão proporcionando o caminho para a abstração e para a generalização. Além disso, esta tarefa permitiu mobilizar tópicos matemáticos tais como a divisão com resto associada aos números pares e ímpares.

Na tarefa *Rapazes e Raparigas* o desempenho do João continuou bastante satisfatório. Continua a sequência com facilidade, identifica corretamente o grupo que se repete e, na terceira questão, indica o número de grupos e de raparigas sem dificuldade.

Neste tipo de padrão rapaz rapaz rapariga, rapaz rapaz rapariga, rapaz rapaz rapariga...coloca-se em evidência a divisão por três e os respetivos restos possíveis, o que só será possível com a descoberta do motivo que se repete e de que é constituído por três elementos.

No final desta tarefa, o João concluiu que na sequência três crianças formam um grupo e cada grupo é formado por dois rapazes e uma rapariga.

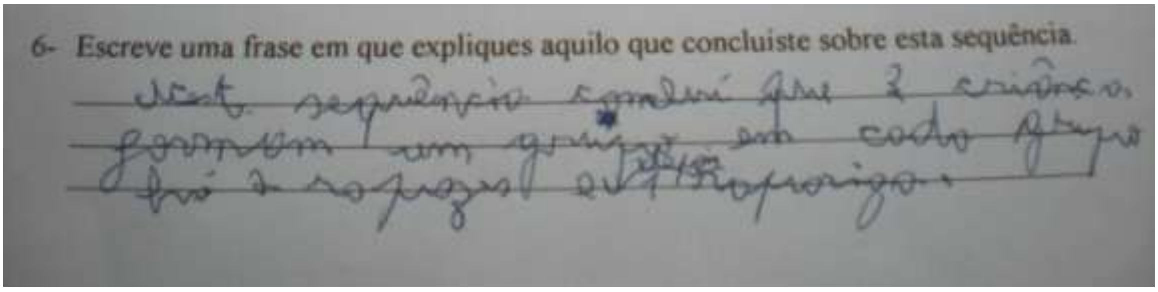


Fig. 52. Resposta do João à questão 6 da tarefa *Rapazes e Raparigas*.

Quando é questionado sobre o número de rapazes e de raparigas num grupo maior de crianças responde, sem qualquer dificuldade.

A turma sentiu alguma dificuldade na realização desta tarefa, tendo grande parte dos alunos assumido a divisão por dois e não por três. Só na apresentação da tarefa em grande grupo, foi possível verificar que estávamos perante um grupo de repetição de 3 elementos, tornando-se evidente a divisão por três.

Na tarefa *Carrinhos de Quadrados,* os alunos podiam recorrer à utilização de material manipulativo (quadrados), caso sentissem necessidade.

O João não achou necessária a utilização dos quadrados e, uma vez mais, o seu desempenho nesta tarefa foi excelente.

Para saber o número necessário de quadrados para construir o quarto carrinho, analisa os termos anteriores e, continuando a sequência, desenha sem qualquer dificuldade a figura.

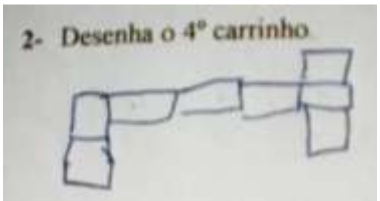


Fig. 53. Resposta do João à segunda questão da tarefa *Carrinhos de Quadrados.*

Na quarta questão, o João explica o seu raciocínio de uma forma descritiva, onde estabelece a relação entre o número da figura e o número de quadrados correspondentes, fazendo assim a generalização distante o que confirma a compreensão do padrão.

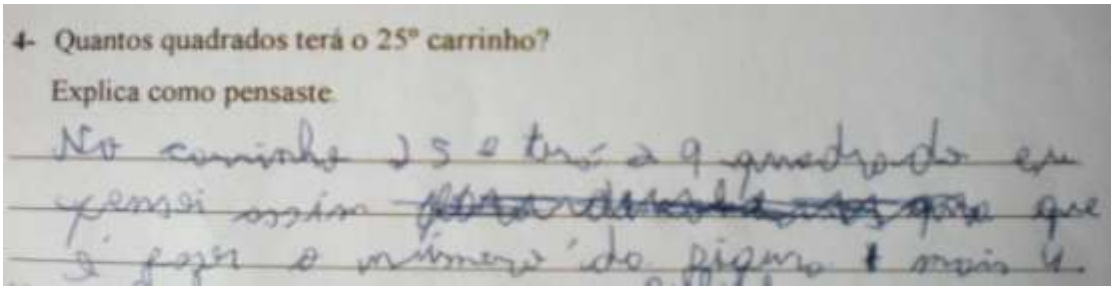


Fig. 54. Resposta do João à quarta questão da tarefa *Carrinhos de Quadrados.*

Na tarefa *Discos em Y,* os alunos podiam recorrer à utilização de blocos lógicos (círculos), caso sentissem necessidade.

Para não quebrar a regra adotada pelo João desde o início da realização das tarefas, este não achou necessária a utilização dos círculos. O seu desempenho nesta tarefa, mais uma vez, foi surpreendente.

Para saber quantos discos tem a segunda e a quarta figura, o João analisa os termos anteriores, desenha o quarto termo e conta os discos.

Na segunda questão, o João escreve apenas uma forma de ver a sequência. As representações que ele utiliza no processo de resolução, tanto na organização, como no registo e na comunicação das ideias matemáticas, desempenham um papel extremamente importante.

Nesta questão, João recorre a representações icónicas e simbólicas.

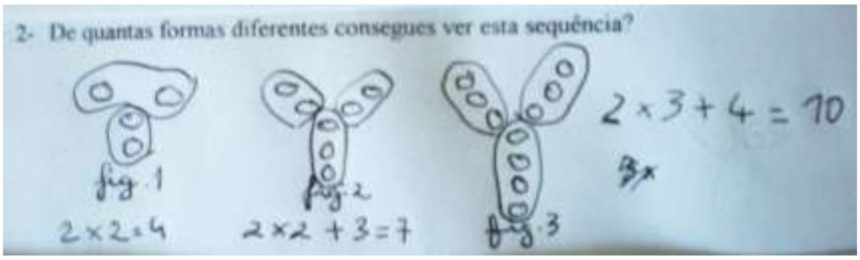
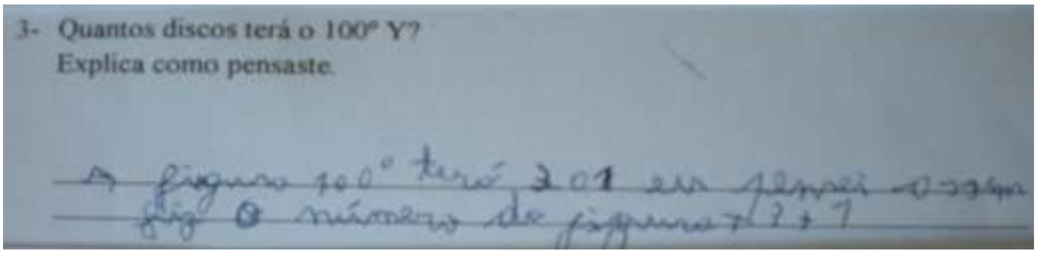


Fig.55. Resolução do João à segunda questão da tarefa *Discos em Y*.

Verifica-se que o João utiliza uma abordagem baseada no raciocínio que já tinha sido trabalhado através das contagens visuais. Ele decompõe a figura em diferentes partes e identifica o que se mantém constante, e o que varia, verificando que nesta sequência com figuras a construção depende da anterior.

Para cada termo representado, apresenta a respetiva expressão numérica que traduz o modo de ver.

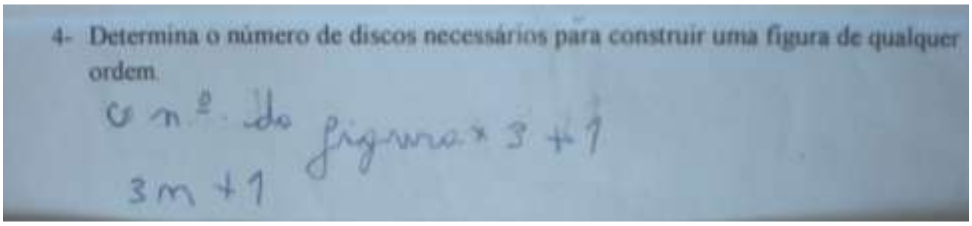
Nesta fase de resolução da tarefa o aluno recorre à generalização construtiva. Para descobrir o número de discos do centésimo termo por contagem um a um já não é prático nem desejável. Para explicar o seu pensamento o João dá um passo para a generalização distante relacionando a construção da figura com a ordem que esta ocupa na sequência.


3- Quantos discos terá o 100º Y?
Explica como pensaste.

A figura 100º terá 301 [illegible]
fiz o número da figura x 3 + 1

Fig.56. Resposta do João à questão 3 da tarefa *Discos em Y*.

Depois da descoberta de um modo de contagem baseado num suporte visual, utilizando um raciocínio por analogia, o aluno poderá facilmente responder à última questão e indicar o número de discos do termo de ordem n. João recorre a representações icónicas e simbólicas para traduzir o seu pensamento.


4- Determina o número de discos necessários para construir uma figura de qualquer ordem.

o nº. da figura x 3 + 1
3n + 1

Fig.57. Resposta do João à quarta questão da tarefa *Discos em Y*.

No sentido de reforçar o seu pensamento, João surpreende de novo e exprime a generalização através da escrita da respetiva expressão algébrica 3 n + 1.

A turma apresenta algumas dificuldades na realização desta tarefa, tendo-se verificado que alguns alunos não conseguem dar o salto da generalização próxima para a generalização distante. Conseguem um desempenho razoável nas três primeiras questões recorrendo à representação simbólica, mas não conseguem escrever a expressão algébrica.

Na apresentação à turma, os alunos ficaram surpreendidos pela facilidade com que o João explicou o seu modo de pensar.

Problemas - Na tarefa *Brincando com Cubos* os alunos podiam recorrer à utilização de cubos unitários fixáveis, caso sentissem necessidade.

Fig.58. Tarefa 1 da terceira cadeia.

A produção escrita do João revela que esta tarefa foi a que apresentou maior dificuldade. Na primeira questão, o aluno não consegue desenhar a construção corretamente, revelando dificuldades no contexto geométrico, nomeadamente, nas figuras a três dimensões. Ele responde corretamente a esta questão de uma forma figurativa, mas a sua construção é abstrata.

A segunda questão é a que o João entende melhor e responde corretamente. Refere que é a figura de ordem 8 e que vai necessitar de 15 cubos, recorrendo ao raciocínio recursivo.

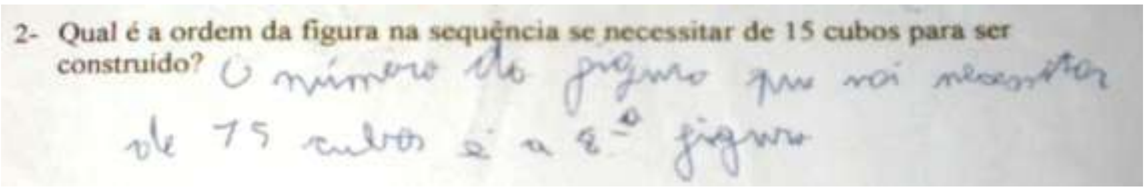

2- Qual é a ordem da figura na sequência se necessitar de 15 cubos para ser construido? O número da figura que vai necessitar de 15 cubos é a 8.ª figura

Fig.59. Resposta do João à segunda questão da tarefa *Brincando com Cubos*.

Relativamente à questão de existir uma figura com 36 cubos o João não consegue responder corretamente à questão. Apresenta a divisão de 36 por 2 e subtrai uma unidade, mas comete um erro de cálculo e responde de acordo com o erro cometido.

A turma teve um bom desempenho nesta tarefa, tendo a maioria dos alunos respondido corretamente a todas as questões. Contudo, verifica-se alguma dificuldade ao desenhar a quinta figura da sequência. A maioria dos alunos justificou a impossibilidade, dizendo que a sequência apresentada era a dos números ímpares e o 36 não podia ser termo desta sequência, por ser um número par.

Na apresentação dos diferentes processos de resolução pelos alunos, foram, mais uma vez, reforçadas as diferentes estratégias de resolução de problemas, nomeadamente fazer uma tabela, um desenho ou esquema, uma lista organizada ou mesmo a procura de um padrão.

Na tarefa *A Moldura,* os alunos foram organizados em pequenos grupos e podiam utilizar material manipulativo.

A professora intervinha junto dos grupos de trabalho sempre que se justificasse, com o objetivo de ajudar os alunos no seu raciocínio.

O grupo onde se encontrava o João era formado por três alunos.

Na primeira questão, o grupo do João explicou o seu raciocínio por um processo recursivo, referindo que eram necessários 32 azulejos para construir o espelho representado na figura.

Verifica-se que o grupo recorreu a uma expressão numérica relacionada com o perímetro da figura.

Fig.60. Resolução da questão 1 do grupo do João da tarefa *A Moldura.*

Na segunda questão, o grupo do João desenhou apenas um espelho de dimensão diferente do modelo apresentado. Usando a mesma estratégia da primeira questão desenha um espelho de dimensão menor.

Por último, a sua explicação sobre o número de azulejos necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões, é pouco explícita e incompleta. O grupo descobre o que há em comum nos vários espelhos, e chega à generalização através da expressão $2 \times (c \times \ell) + 4$. Os restantes grupos sentiram dificuldade nesta última questão apresentando a expressão $2 \times (c \times \ell)$, que está incompleta, e que não exprime uma regra geral.

Na generalidade, verifica-se que esta tarefa apresentou dificuldades em todos os grupos, tendo a maioria respondido corretamente apenas à primeira questão, de identificar o número de azulejos do espelho representado na figura.

Na tarefa *Campeonato de Badminton* os alunos continuaram organizados em grupos, encontrando-se o João no mesmo grupo da atividade anterior.

Esta tarefa foi realizada sem qualquer dificuldade, verificando-se que todos os grupos responderam corretamente, à exceção de dois.

O grupo do João respondeu às duas questões de uma forma rápida e sem hesitação.

Na primeira questão, os alunos descobrem um padrão que relaciona o número de jogos com o número de participantes. A descoberta desta relação permite aos alunos verificar que o número de jogos a disputar, com um número qualquer de participantes, obtém-se adicionando os sucessivos números naturais desde o 1 até ao número anterior de participantes.

Para responder à segunda questão, se os alunos observarem a representação simbólica que realizaram na primeira, facilmente se apercebem que podem aplicar a mesma estratégia.

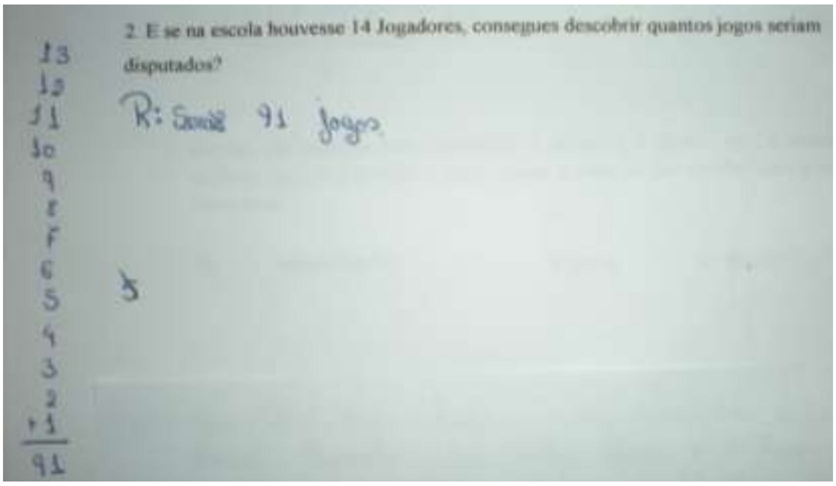


Fig.61. Resolução do grupo do João à segunda questão da tarefa *Campeonato de Badminton*.

Se são 14 jogadores e vai ser jogado apenas numa mão, os alunos facilmente se dão conta que em cada linha de jogadores, vai ser disputado sempre menos um jogo, uma vez que para realizar um jogo são necessários dois jogadores.

Dificuldades manifestadas na descoberta do padrão

Depois de analisar as resoluções apresentadas pelo João, ao longo das diferentes tarefas, verifica-se que as experiências prévias de contagens visuais na moldura do 5 e do 10, e as tarefas elementares introdutórias, facilitaram a identificação de padrões, permitindo desenvolver o reconhecimento visual dos números, capacidades ao nível das operações básicas e cálculo mental.

É notável que o João, na resolução das tarefas, sentiu necessidade de ler e compreender o problema, traduzindo a informação em linguagem matemática e efetuando, posteriormente, os procedimentos necessários à sua resolução.

A principal dificuldade manifestada pelo João, na fase da resolução de algumas tarefas, foi não verificar a resposta obtida de modo a constatar a sua plausibilidade. Também se verifica que o João nem sempre conseguiu estruturar o seu pensamento, de modo a ser capaz de o comunicar por escrito. Para comunicar, por escrito, o seu raciocínio de uma forma clara, seria necessário uma organização e clarificação do seu pensamento, o que nem sempre aconteceu. A comunicação, tanto na dimensão escrita como na dimensão oral, remete para a representação das ideias matemáticas. Na verdade, as ideias do João ficavam mais claras quando as articulava oralmente, uma vez que permitia a interação de estratégias e pensamentos, tornando as suas ideias objeto de reflexão, discussão e eventual reformulação.

Apesar de ser mais exigente comunicar oralmente o nosso pensamento a terceiros, porque exige um esforço de organização de ideias, os registos escritos do João nem sempre clarificaram os seus pensamentos sobre as ideias desenvolvidas.

Verifica-se que, o João nem sempre foi capaz de escrever argumentos matematicamente válidos bem construídos e com recurso a vocabulário formal, uma vez que durante o 1.º ciclo, o hábito da escrita a partir da Matemática e sobre a Matemática, não foi suficientemente promovido.

Surge, então, a necessidade de implementar um trabalho de preparação dos alunos para a escrita, tendo-se procedido ao confronto de um registo escrito revelador do pensamento, e outro nada revelador. Começou-se a promover a comunicação escrita como uma parte integrante das tarefas desenvolvidas na sala de aula.

Após a realização das tarefas, durante a entrevista, foi possível voltar aos registos escritos do João e retomar as ideias que traduzem, contribuindo para a compreensão da situação ou conceito que possibilitou um entendimento mais profundo.

Neste sentido, a familiaridade com o uso de estratégias aplicadas nas tarefas, permitiram ao aluno passar de uma situação fechada para outra mais aberta.

Observando as suas produções escritas constata-se que o João aplica diferentes estratégias de resolução. Numas tarefas o aluno recorre a tentativas, noutras descobre o padrão ou faz uma lista organizada. Em combinação com estas estratégias o João recorre a diferentes representações das suas ideias matemáticas, tanto nos processos observados externamente como nos processos que ocorrem internamente na sua mente.

As formas que o João encontrou para representar as suas ideias matemáticas, não foram muito diferentes nas várias tarefas, tendo evitado as representações ativas, privilegiando as representações icónicas e representações simbólicas.

Quando era sugerido aos alunos o recurso ao material concreto disponibilizado, o João nunca recorria à sua utilização, considerando não ser necessária a criação de modelos ilustrativos para a construção de conceitos.

Em todas as tarefas, o João recorre a representações icónicas baseando-se na organização visual, no uso de figuras, imagens, esquemas e desenhos para ilustrar conceitos e procedimentos.

Verifica-se, também, o recurso a representações simbólicas com bastante frequência, traduzindo as ideias matemáticas, não apenas aos símbolos mas a outras linguagens.

A Maria

O outro participante deste estudo é a Maria. Irão apresentar-se, neste ponto, as principais caraterísticas pessoais da aluna assim como a relação que ela mantém com a escola e com a Matemática. Em seguida, será analisado o seu trabalho durante a exploração de tarefas, e por último, uma síntese sobre o seu trabalho.

A Maria enquanto aluna e pessoa

A Maria é uma menina que vive com os pais e uma irmã mais velha, numa freguesia a 5 km da escola. O seu pai trabalha na construção civil e a mãe é doméstica. No futuro, quer ser Educadora de Infância para estar com as crianças que é aquilo que mais gosta de fazer.

Na escola, ocupa os seus tempos livres a brincar com as bonecas e a conversar com as amigas. É uma menina muito calma, meiga, dócil e muito sociável. Está bem integrada na turma e, devido ao seu empenho e bom comportamento, foi eleita a delegada da turma. É uma aluna atenta, inteligente e cumpridora das regras de conduta na sala de aula, sendo, também muito amiga dos colegas, estando sempre disponível para ajudar aqueles que apresentam mais dificuldade. É tímida e envergonhada, corando com uma certa facilidade quando é solicitada a explicar o seu raciocínio à turma, contudo, as suas intervenções são bastante positivas. Faz sempre os trabalhos de casa e prefere trabalhar em grupo do que individualmente. Nunca se mete em confusões, pelo contrário, tenta sempre apaziguar as situações que surgem. A Maria gosta da escola, é organizada, apresenta uma caligrafia legível embora apresente alguns erros ortográficos.

Na turma os colegas veem-na como uma boa aluna, boa amiga e dizem que se parece com uma "boneca de porcelana".

Quanto à Matemática, a Maria gosta desta disciplina referindo que, apesar de alguns problemas serem "difíceis", gosta de os resolver. Quando é colocada perante uma tarefa, sente-se bem e entusiasmada, referindo que as atividades preferidas são os problemas, embora sinta dificuldades em resolver os mais complicados.

Apesar de se poder considerar a Maria uma boa aluna a Matemática, a própria vê-se como uma aluna média, porque, de vez em quando, não sabe algumas coisas. Quando lhe foram pedidas sugestões para uma melhor aprendizagem, refere que o professor devia ter mais tempo para explicar a matéria e assim "aprendiam mais rápido". Interrogada sobre um episódio do 1.º ciclo que a tivesse marcado pela positiva, refere o dia em que foi ao quadro e conseguiu resolver um problema sozinha. Refere como uma marca negativa o dia em que teve de ir ao quadro "fazer uma conta" e não a conseguiu resolver, justificando que ainda tinham "aprendido as contas" há pouco tempo.

O desempenho da aluna em tarefas de exploração de padrões

Ao longo das dez tarefas, a Maria mostrou-se um pouco insegura, mas muito cautelosa na sua realização. Verificou-se, maior insegurança e nervosismo nas primeiras tarefas, pois, à medida que o número de tarefas ia avançando, a Maria revelava maior confiança nas suas capacidades, estando mais à vontade com este tipo de trabalho. Ela realizou todas as tarefas na sua totalidade, tendo o seu desempenho melhorado de tarefa para tarefa.

Uma vez que a aluna revelou nunca ter tido experienciado este tipo de tarefas durante o 1.º ciclo, nas suas resoluções não apresentou grande variedade de estratégias.

Como já foi referido, o trabalho da Maria teve início com experiências prévias de contagem visuais na moldura do 5 e 10, com o objetivo de facilitar a identificação de padrões, desenvolver a capacidade visual dos números e capacidades de cálculo, incluindo o cálculo mental.

Contagens – A tarefa dos *Peixinhos* foi considerada fácil para a Maria, tendo respondido corretamente a todas as questões. Na primeira contagem, recorre ao *subitizing,* onde verifica que há 5 filas com 5 peixinhos cada, usando de imediato o conhecimento do arranjo quadrangular da multiplicação para responder 25 peixinhos. No segundo modo de contagem, recorre às propriedades das operações referindo que se temos 5 filas com 5 peixinhos cada fila, então, juntamos 5 peixes cinco vezes que dá 25.

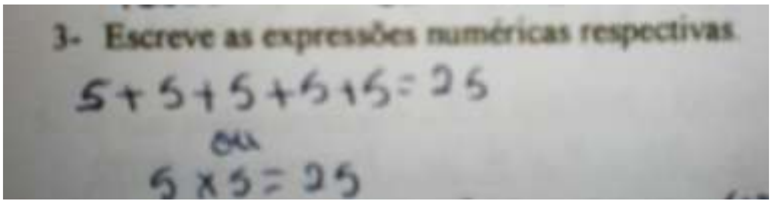


Fig. 62. Resolução da Maria à questão 3 da tarefa *Peixinhos*.

A tarefa *Bolinhas em Quadrado* também foi considerada fácil para a Maria. Efetua uma primeira contagem, usando os seus conhecimentos sobre as operações e suas propriedades, destacando-se o recurso a adições sucessivas, mas tendo também presente a noção de linha e coluna.

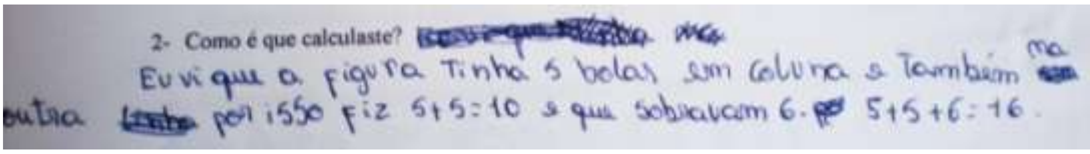


Fig. 63. Resolução da Maria à questão 2 da tarefa *Bolinhas em Quadrado*.

No segundo modo de contagem, a Maria considera-o mais fácil porque forma subconjuntos de 4 bolas e recorre aos múltiplos de 4 para responder 16 bolas.

A tarefa *As Palmeiras* foi considerada um pouco mais difícil para a Maria.

Fig. 64. Tarefa 3 da primeira cadeia.

Ela responde acertadamente às primeiras questões recorrendo, novamente, a expressões numéricas simples com adições sucessivas, formando subconjuntos de 4 palmeiras e, recorrendo aos múltiplos de 4 responde 28. Através do seu registo, verifica-se que a Maria recorre às propriedades numéricas e consegue trabalhar com expressões equivalentes.

Para a Maria, a maior dificuldade desta tarefa centrou-se na última questão, onde tinha que acompanhar com um desenho a forma de pensamento já dada. Depois de várias tentativas, agrupa as palmeiras em subconjuntos de 6, mas verifica que o último subconjunto fica só com 4. Então, desenha mais dois elementos para ficar com 6.

Também não consegue identificar os dois subconjuntos de 4 palmeiras. Faz o desenho das 4 palmeiras, nos respetivos lugares, mas num dos grupos, inclui as 2 palmeiras desenhadas, num dos subconjuntos de 6.

Verifica-se que a Maria não compreendeu a expressão dada, nem conseguiu visualizar no desenho esse modo de contagem.

Sequências - O desempenho da Maria na segunda cadeia de tarefas foi bastante positivo, tendo respondido acertadamente a todas as questões. Na tarefa

Comboio de Cubos, a Maria numa primeira questão, identifica com facilidade o padrão de repetição, pensando num conjunto de figuras que se alternam e repetem de forma cíclica. Só a partir da terceira questão, quando se pede para identificar o grupo de repetição, é que verifica que também pode ver o mesmo padrão como a junção contínua de duas figuras, formando um motivo. Para responder à última questão, recorre ao desenho da sequência figurativa até formar uma sequência com 14 cubos, e sem dar conta, utiliza as relações numéricas (números pares e ímpares) para responder que o vigésimo quarto cubo será amarelo.

Fig. 65. Resposta da Maria à questão 5 da tarefa *Comboio de Cubos.*

Pode afirmar-se que a Maria, apesar de ter encontrado o padrão nesta sequência figurativa, não chega à expressão geral.

Na tarefa *Rapazes e Raparigas,* a aluna vê mais facilmente o padrão como a junção contínua de 3 crianças que formam um motivo.

Fig. 66. Resposta da Maria ás questões 1 e 2 da tarefa *Rapazes e Raparigas.*

A última questão, onde se pede que tire uma conclusão sobre a sequência, voltou a dificultar o trabalho da Maria, pois, apesar de ter encontrado o padrão, e ter chegado à expressão geral, não consegue comunicá-la por escrito. A aluna, recorrendo à estratégia multiplicativa (3x30=90 e 30x2=60), responde que em 90 crianças há 60 rapazes e 30 raparigas. A Maria, em contexto numérico, reconhece, que o número total de crianças é o triplo do número de grupos; que o número de raparigas é igual ao número de grupos; e que o número de rapazes é o dobro do número das raparigas. Contudo, não consegue comunicar o seu pensamento num outro contexto (lei geral de formação).

Na tarefa *Carrinhos de Quadrados,* nas três primeiras questões, a Maria utiliza o material manipulativo e, através da visualização, verifica que cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior, e que se obtém adicionando mais um quadrado que o anterior.

Fig. 67. Resposta da Maria à questão 2 da tarefa *Carrinhos de Quadrados.*

Na última questão, a aluna faz a generalização de acordo com a forma como viu este padrão, referindo, que ao número da figura acrescentou mais um quadrado, e juntou três quadrados que chamou de "pernas".

Uma vez que a Maria se manteve concentrada no seu trabalho, e não solicitou a ajuda da professora, terminou a tarefa muito confiante do seu desempenho.

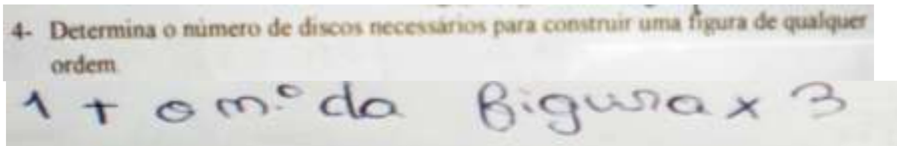
Durante a análise efetuada ao trabalho da aluna, a professora estrutura algumas questões a colocar à Maria, aquando da realização da entrevista para esclarecer o seu pensamento.

Professora: Como calculaste o número de quadrados necessários para construir o quarto carrinho?
Maria: Vi que nesta figura (apontando para a figura 3) eram precisos 7 quadrados e como de figura para figura é mais um quadrado, então vi que são 8.
Professora: Tens a certeza?
Maria: (Ficou em silêncio a olhar novamente para a sua resposta).
Professora: Tens ou não certeza?
Maria: Tenho.
Professora: Consegues explicar como pensaste?
Maria: Vi que no meio do carrinho tinha que acrescentar mais um quadrado e depois juntar as três pernas!
Professora: Três pernas? Como assim?
Maria: Este quadrado deste lado (esquerdo) e dois deste (direito).
Professora: Mas…não podes considerar quatro pernas?
Maria: Posso, mas assim já não junto mais um quadrado no meio do carrinho…
Professora: Claro. E consegues dizer quantos quadrados são precisos para uma figura qualquer?
Maria: (Fica em silêncio a pensar). Acho que é o número da figura mais quatro quadrados.
Professora: Muito bem! E se eu te pedir para escrever uma expressão com essa conclusão que tiraste, serias capaz?
Maria: n+4.
Professora: Estás de parabéns, Maria!

Através da entrevista, a Maria teve uma maior facilidade em expressar o seu raciocínio o que proporcionou que ela tenha chegado à expressão algébrica.

Na tarefa *Discos em Y,* a Maria, concentrada no seu trabalho e sem recorrer à professora, põe em prática o conhecimento da tarefa anterior e realiza com sucesso esta atividade.

Para responder à primeira questão analisou os discos anteriores, desenhou-os, e contou o número de discos. Para mostrar como viu a sequência, num primeiro modo, forma dois subconjuntos de 2 discos, na parte superior, e forma novo subconjunto de 3 discos com os restantes. No segundo modo, agrupa os discos da parte superior em 4, e forma um subconjunto de 3 discos com os restantes, da parte inferior. Na terceira questão, vê o padrão de outro modo, utilizando um raciocínio por analogia, reconhece que é o triplo do número da figura, mais um disco no centro. Na última questão, é visível que a Maria, sem hesitação, faz a generalização e chega à expressão algébrica.

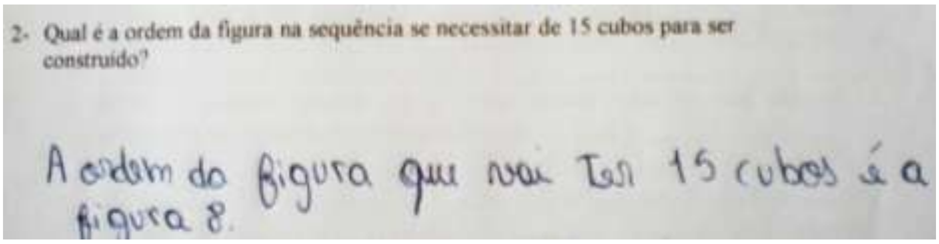

4- Determina o número de discos necessários para construir uma figura de qualquer ordem

1 + o nº da figura x 3

Fig. 68. Resposta da Maria à quarta questão da tarefa *Discos em Y.*

Ao que parece, a Maria aumentou os seus conhecimentos relativamente à exploração de padrões, e o seu desempenho continuou muito positivo.

Problemas - Chegando agora à terceira cadeia de tarefas – Problemas, atividade que a Maria referiu como sendo as suas preferidas, aumenta a expetativa no seu desempenho. Confiante no seu trabalho, a aluna realiza a tarefa *Brincando com Cubos* sem precisar de nenhum esclarecimento. Para responder à primeira e segunda questões, utiliza o material manipulativo e, através da construção da quinta figura da sequência, responde 9 cubos e, visualizando as construções de sólidos geométricos, identifica a ordem da sequência.


2- Qual é a ordem da figura na sequência se necessitar de 15 cubos para ser construído?

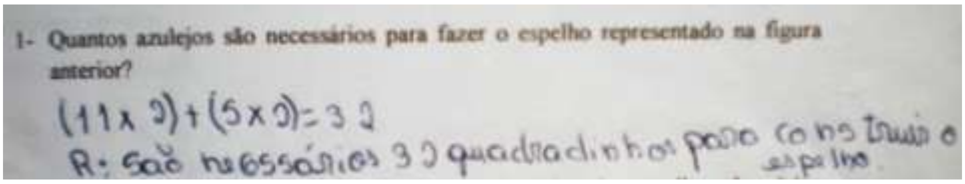
A ordem da figura que vai Ter 15 cubos é a figura 8.

Fig. 69. Resposta da Maria à questão 2 da tarefa *Brincando com Cubos.*

Na última questão, a Maria continua confiante nas suas capacidades, e responde corretamente à mesma, recorrendo aos números e relações numéricas (números pares e números ímpares).

Na segunda tarefa *A Moldura,* a Maria encontra-se num grupo de 4 alunos ficando, por decisão do grupo, responsável pelo registo escrito da atividade.

Nas duas primeiras questões, o grupo recorre a uma expressão numérica simples que não tinha sido referida nos modos de resolução.



1- Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura anterior?

(11 x 2) + (5 x 2) = 32

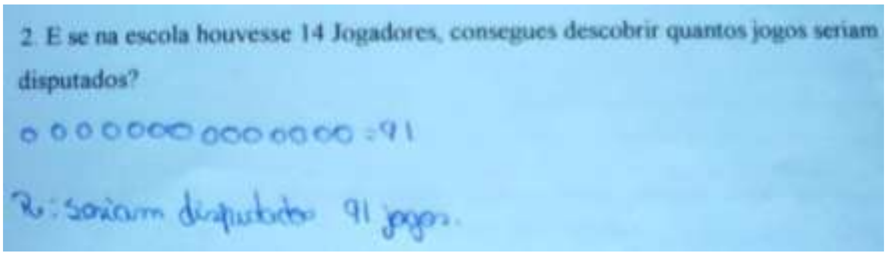
R: São necessários 32 quadradinhos para construir o espelho

Fig. 70. Resposta do grupo da Maria à primeira questão da tarefa *A Moldura.*

O grupo desenha apenas um espelho de acordo com a visualização da moldura, utilizando uma expressão numérica relacionada com o perímetro da figura. Contudo, não consegue indicar uma expressão numérica, para determinar o número de azulejos para espelhos de quaisquer dimensões.

Verifica-se que o grupo através da visualização da moldura arranja uma estratégia de resolução, mas não descobre o que há de comum nos vários espelhos, e por isso não chega à generalização.

Por último, na tarefa *Campeonato de Badminton*, uma vez que o número de jogos a disputar é reduzido, não precisavam de reduzir o problema a um mais simples. O registo escrito desta atividade não foi feito pela Maria e, apesar de responder corretamente às duas questões, não apresentam qualquer explicação. Pouco mais se pode dizer acerca desta tarefa, uma vez que as respostas são simplistas e sem qualquer explicação do raciocínio usado.



2. E se na escola houvesse 14 Jogadores, consegues descobrir quantos jogos seriam disputados?

o oooooo ooooooo = 91

R: seriam disputados 91 jogos.

Fig. 71. Resposta do grupo da Maria à segunda questão da tarefa *Campeonato de Badminton.*

Dificuldades manifestadas na descoberta do padrão

Após uma análise às resoluções apresentadas pela Maria, ao longo das várias tarefas, verifica-se que a aluna, apesar de nunca ter contactado com atividades de exploração de padrões, progrediu de um modo bastante positivo. Na resolução das tarefas, a Maria sentiu necessidade de ler e compreender a atividade, traduzindo a informação em linguagem matemática e efetuando a sua resolução.

Constata-se que a aluna ficou receosa relativamente ao que lhe era proposto, no entanto, apesar de algumas dificuldades sentidas, conseguiu um bom desempenho durante a realização das tarefas.

Uma das principais dificuldades manifestadas pela Maria foi o registo escrito que apresenta nas suas conclusões, que a levava à generalização e à expressão algébrica. Outra dificuldade foi o modo como visualiza o padrão na sequência, que nem sempre foi o mais prático.

Verifica-se, que a Maria consegue estruturar o seu modo de pensar, e comunicar esse pensamento de um modo escrito, embora não represente de uma forma clara as ideias matemáticas. Apesar de ser mais exigente comunicar oralmente o nosso pensamento a outra pessoa, a Maria, durante as entrevistas, organiza as suas ideias e clarifica o seu pensamento.

Os argumentos matemáticos presentes no seu registo nem sempre eram válidos, e o vocabulário usado era pouco formal, revelador de falta de hábitos de escrita a partir da Matemática e sobre a Matemática.

Apesar de se ter implementado, no início do ano letivo, um trabalho de preparação dos alunos para o registo escrito revelador do pensamento e de promoção da comunicação, tanto oral como escrita, a Maria ainda sente alguma dificuldade a esse nível.

Após a realização das tarefas, durante a entrevista, foi possível retomar os registos escritos da Maria o que possibilitou uma compreensão mais profunda do seu pensamento.

Nos processos observados, tanto externamente como nos que ocorrem internamente na sua mente, a Maria recorre a diferentes representações das suas ideias matemáticas. Nas várias tarefas recorre às representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas (Bruner, 1962). Em todas as tarefas a Maria utiliza representações icónicas baseando-se na organização visual, no uso de figuras, imagens e desenhos para ilustrar conceitos e procedimentos. Recorre também às representações simbólicas para a compreensão de regras fundamentais na Matemática, usando, não só símbolos como outras linguagens. No seu trabalho, destaca-se o recurso às representações ativas, verificando-se uma forte ligação entre a ação e o conhecimento. Através da manipulação direta do material manipulativo, a Maria simula as várias situações e cria modelos ilustrativos qua a ajudam a construir os vários conceitos.

Nas produções escritas da Maria constata-se que recorre a processos de raciocínio variados, nomeadamente, simulação, tentativas e descoberta de padrão. Verifica-se que a mesma não aplica estratégias de resolução muito diferentes de tarefa para tarefa. Revela não estar tão confiante no recurso a tabelas ou listas organizadas.

Por último, outra dificuldade manifestada pela Maria foi trabalhar em grupo. Observando o grupo durante a realização das três últimas tarefas, verifica-se que a Maria não consegue transmitir de forma convincente o seu pensamento ao grupo. A sua timidez, nervosismo e pouca capacidade de liderança, impediram o grupo de obter um desempenho mais positivo.

Na primeira tarefa, é notável o empenho e o espírito de grupo permitindo que a tarefa seja realizada com sucesso. Na segunda tarefa, começam a surgir divergências no grupo, na generalização efetuada, e na última tarefa, um novo elemento assume a liderança limitando-se a registar as conclusões.

Para finalizar, é de referir que apesar das dificuldades sentidas pela Maria, durante a realização das tarefas, o seu contributo foi excelente e o seu desempenho bastante positivo.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo far-se-á uma breve comparação entre os dois alunos-caso e a turma, assim como uma abordagem às principais conclusões que resultaram da análise de todos os dados recolhidos, procurando responder às questões de investigação formuladas inicialmente neste estudo. Com base nas conclusões do estudo serão referidas algumas limitações, assim como recomendações na sala de aula a desenvolver com os alunos.

Breve análise comparativa dos alunos-caso e turma

Após se ter efetuado a caraterização da turma da qual fazem parte os dois alunos-caso, pretende-se analisar o desempenho do João e da Maria nas tarefas implementadas na sala de aula e da turma. Atendendo a que, na sua globalidade, os alunos tiveram um desempenho bastante positivo, embora com caraterísticas diferentes, apresenta-se a tabela 1, que sintetiza as principais diferenças entre o João, a Maria e a turma.

Tabela 1: Síntese das principais diferenças entre os alunos-caso e comparação com a turma.

	João	Maria	Turma
Caraterização geral	Resolve as tarefas alterando a ordem das questões.	Resolve as tarefas seguindo a ordem das questões.	Resolve as tarefas seguindo a ordem das questões.
	Não se interessa pelas explicações dadas aos colegas da turma.	Tem interesse nas explicações dadas aos colegas da turma.	Tem interesse nas explicações prévias de cada tarefa.
	Não se interessa em ouvir e perceber as estratégias dos colegas, por serem óbvias.	Tem interesse em ouvir e perceber as estratégias dos colegas.	Tem interesse em ouvir e perceber as estratégias dos colegas.
	Tem mais dificuldade em comunicar o seu	Tem mais dificuldade em	Tem dificuldade em comunicar o pensamento

	pensamento oralmente.	comunicar o seu pensamento por escrito.	por escrito.
Contagens (primeira cadeia)	Apresenta expressões numéricas mais elaboradas.	Apresenta expressões numéricas simples.	Apresenta expressões numéricas simples.
	Tem mais facilidade em trabalhar o conceito de área.	Revela mais dificuldade em trabalhar o conceito de área.	Revela alguma dificuldade em trabalhar o conceito de área.
	Visualiza e desenha a contagem efetuada a partir da expressão dada.	Não visualiza a contagem efetuada a partir da expressão dada, e faz um desenho errado.	Apenas – dos alunos visualiza e desenha a contagem efetuada a partir da expressão dada.
Sequências (segunda cadeia)	Não usa material manipulativo.	Usa material manipulativo.	Usa material manipulativo.
	Reconhece as relações numéricas e aplica-as.	Reconhece as relações numéricas mas tem dificuldade em aplicá-las.	Reconhece as relações numéricas mas sente dificuldade em aplicá-las.
	Identifica a unidade de repetição e chega à generalização distante.	Identifica a unidade de repetição e chega à generalização distante, apenas em contexto numérico, através da multiplicação.	Identifica a unidade de repetição. A maioria chega à generalização distante mas apresenta dificuldade em comunicar o seu raciocínio. Na generalização alguns recorrem à divisão por 3.
	Tem facilidade em usar a linguagem matemática.	Tem mais dificuldade em usar a linguagem	Tem alguma dificuldade em usar a linguagem matemática.

		matemática.	
	Escreve a expressão geral na forma algébrica.	Escreve a expressão geral em linguagem corrente.	A maioria escreve a expressão geral em linguagem corrente, e uma pequena parte na forma algébrica.
Problemas (terceira cadeia)	Chega à generalização distante na tarefa dos cubos, mas com dificuldade em escrever a lei geral.	Chega à generalização distante.	A maioria chega à generalização distante recorrendo às relações numéricas.
	No grupo, não conclui a generalização distante.	No grupo, faz a generalização distante mas incompleta.	Os grupos chegam à generalização distante mas não a completam.

Como podemos constatar, se há diferenças entre estes dois alunos e a turma no seu modo de pensar, também encontramos algumas semelhanças. O João e a Maria, revelaram ter conhecimentos matemáticos já adquiridos anteriormente, uma vez que o seu desempenho nas várias tarefas foi bastante positivo. Trabalharam os conceitos de área e de perímetro sem dificuldade (no caso do João), revelaram dominar as operações, reconhecer as suas propriedades, e recorreram aos parênteses nas expressões numéricas. Destaca-se o trabalho do João por revelar maior facilidade em dominar estes conceitos, uma vez que a Maria sente-se mais insegura e recorre apenas a somas e a produtos. Constata-se que nem os alunos-caso nem a turma, recorre a expressões numéricas com diferenças, ou seja, não recorrem à generalização desconstrutiva.

Foi notório que ambos dominam os conteúdos geométricos apresentados, nomeadamente, as propriedades do quadrado, do retângulo e do cubo, mas nenhum consegue desenhar figuras tridimensionais, o que não foi impeditivo de responder acertadamente a estas tarefas.

Numa análise às várias tarefas pode referir-se o seguinte: na primeira cadeia de tarefas tanto o João como a Maria recorrem ao *subitizing,* e aplicam o conhecimento do arranjo quadrangular da multiplicação; na primeira tarefa, o João conta os objetos um a um, enquanto a Maria forma subconjuntos de 4, 5 e 6 elementos; o João apresenta expressões numéricas mais elaboradas do que a Maria; enquanto o João consegue visualizar no desenho a expressão numérica dada, a Maria não. A turma: na maioria das questões responde de uma forma simplista; recorre também a respostas descritivas (subconjuntos de 2, 3, 4, 5, 6 e 8), figurativas (desenho ou esquema), e contagem um a um; tem dificuldade em transmitir o seu raciocínio; nem sempre estão evidentes as propriedades numéricas ou geométricas; apenas metade da turma mostra no desenho o modo de contagem solicitado.

Na segunda cadeia de tarefas, ambos os alunos têm dificuldade em desenhar figuras tridimensionais. O João reconhece os números e relações numéricas (números pares e números ímpares), encontra o padrão e comunica-o por escrito, e chega à expressão algébrica. A Maria apresenta dificuldades nestes procedimentos.

A maior dificuldade da turma, é sem dúvida, o registo escrito das conclusões e, em número mais reduzido, encontrar a expressão algébrica da sequência.

Na última cadeia de tarefas, tanto o João como a Maria descobrem o padrão nas sequências, mas a Maria faz a generalização distante enquanto o João, numa das tarefas, não chega à generalização. A turma, na sua maioria, chega à generalização embora alguns recorram ao raciocínio indutivo.

A visualização foi sem dúvida um aspeto muito importante para ambos os alunos pois, recorrendo com frequência à imagem da sequência, formavam as suas expressões numéricas e conseguiam fazer as suas conjeturas. Mesmo quando a tarefa era apresentada e discutida na turma em grande grupo, a visualização da imagem era fundamental para a explicação do raciocínio dos alunos. Foi notável também, que durante a entrevista, o recurso frequente à imagem foi o maior suporte à descrição dos seus pensamentos.

Durante a entrevista, tanto o João como a Maria, revelaram maior facilidade em comunicar oralmente o seu raciocínio. Sentiram que comunicar o seu pensamento por escrito exige uma análise criteriosa das descobertas efetuadas, refletindo sobre os processos e procedimentos, e apresentando argumentos reveladores de pensamento.

Outro aspeto considerado fundamental no trabalho de ambos os alunos, foi a comunicação, tanto escrita como oral que eles utilizaram. Verifica-se uma evolução nos dois alunos ao longo da experiência didática, recorrendo, com frequência, às representações simbólicas.

A turma, na sua globalidade, recorre tanto às representações simbólicas como representações ativas. Verifica-se ainda uma grande necessidade em recorrer à manipulação direta de objetos para simular e criar modelos ilustrativos da situação, e construir os conceitos.

As estratégias de resolução usadas pelo João e pela Maria foram as mesmas, não tendo nenhum recorrido a tabelas ou listas organizadas. Na turma houve uma maior variedade de estratégias de resolução.

Para finalizar, verifica-se que houve uma evolução no desempenho dos alunos, à medida que o número de tarefas ia aumentando. A visualização do padrão tornou-se cada vez mais evidente e o recurso à linguagem matemática, para comunicar o seu pensamento, foi mais frequente.

Síntese das principais conclusões

O principal objetivo deste estudo era analisar o trabalho de dois alunos do 5.º ano de escolaridade, em tarefas de exploração de padrões, bem como, entender qual o contributo que estas têm no desenvolvimento de capacidades transversais dos estudantes, nomeadamente, a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas. Assim foi orientado por quatro questões: - Que papel atribui o aluno às diferentes representações na resolução de tarefas que envolvam a exploração de padrões? - Que estratégias utilizam os alunos na resolução de tarefas que envolvam a descoberta de padrões? - Como se podem caraterizar as principais dificuldades experienciadas pelos alunos na descoberta de padrões? - Como se pode caraterizar a contribuição da descoberta do padrão para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos?

Depois da análise efetuada, e tendo como suporte os dados recolhidos e as principais ideias teóricas referidas no segundo capítulo, são agora apresentadas as principais conclusões do estudo.

Considerando que os alunos nunca tinham experienciado este tipo de atividades, as tarefas que fizeram parte deste estudo, assim como os exemplos de sala de aula apresentados, foram pensados para as primeiras aprendizagens com padrões, tendo a professora recorrido a adaptações necessárias aos alunos em questão.

De uma forma geral, os alunos conseguiram realizar com sucesso as tarefas propostas, manifestando um grande entusiasmo no trabalho com padrões.

No desenvolvimento dos seus trabalhos, tiveram sempre presente as caraterísticas da tarefa, trabalhando tanto as informações numéricas como geométricas. Contudo, verifica-se que um número significativo de alunos recorre apenas a sequências numéricas, o que dificultou a chegada à generalização. Já Vale e Pimentel (2005), após terem analisado o trabalho desenvolvido com futuros professores, em tarefas semelhantes às aplicadas neste estudo, concluíram que a maioria dos alunos utiliza uma abordagem numérica, não conseguindo chegar à generalização ou então chega a uma lei de formação errada.

É notável que, nas tarefas apresentadas de exploração de padrões, os alunos conseguem resolver as tarefas com mais facilidade quando evitam o trabalho exclusivamente numérico, conseguindo assim melhores resultados. Mesmo os alunos com maiores dificuldades conseguiram resolver a maioria das questões acertadamente e em alguns casos a tarefa na totalidade.

Tal como Boavida et al. (2008) afirmam, os alunos recorrem muitas vezes à realização de um desenho ou esquema, assim, também estes alunos através de desenhos/esquemas, conseguem chegar à generalização.

Na última fase da exploração da resolução das tarefas, os alunos tiveram de expor as estratégias e procedimentos efetuados aos seus colegas, bem como os seus raciocínios. Através desta fase os alunos organizaram as suas ideias, e clarificaram os seus raciocínios, permitindo a visualização das várias estratégias utilizadas, e a aquisição de novos conteúdos. Já no estudo efetuado por Barbosa (2010) se concluiu, que a discussão ajuda os alunos a criarem conexões entre os vários temas matemáticos. Também esta fase foi considerada importante, tanto para o João como para a Maria, na medida em que, através da visualização realizada, permitiu a ambos os alunos a estruturação do seu pensamento e a descoberta da lei geral de formação, facto já destacado no estudo de Alvarenga (2006). Verificou-se que a visualização não é apenas *ver* uma mera imagem, sendo a visualização uma componente do raciocínio, e da resolução de problemas (Vale, 2009).

Constata-se que a exploração de padrões motivou os alunos para a realização de todas as tarefas, sentindo-se entusiasmados na conclusão das mesmas. Contudo, nalguns casos a motivação e o entusiasmo não foram suficientes para conseguirem ultrapassar todas as dificuldades, tendo o papel orientador da professora sido importante na consecução das tarefas. Assim, como foi referido por Bassarear (1997) a exploração de padrões torna a matemática acessível para todos.

Os alunos, mostraram-se sempre entusiasmados e curiosos ao longo das diferentes tarefas, envolvendo-se ativamente no desempenho das mesmas. De cada vez que descobriam uma relação mostravam-se sempre interessados e empenhados em encontrar as respostas, permitindo ao mesmo tempo o desenvolvimento de capacidades matemáticas.

O desempenho do João e da Maria foi bastante satisfatório, tendo-se verificado que o João esteve sempre muito mais seguro do seu pensamento do que a Maria. Ambos respondem acertadamente à totalidade das questões, à exceção de duas.

O João nunca procurou o apoio da professora, enquanto a Maria, não pedindo qualquer esclarecimento, aproveitava todas as explicações que eram dadas aos colegas da turma. Sempre que o João se sentia desconfortável com alguma questão procurava ultrapassá-la sozinho, empenhando-se mais no seu trabalho até ultrapassar as suas dificuldades.

Com a realização da entrevista foi possível, a ambos os alunos, transmitirem de uma forma mais clara as suas ideias, atitudes e opiniões. Estas conversas foram realizadas com um certo nível de confiança e à vontade, para que fosse possível captar o que realmente era importante (Bogdan & Biklen, 1994), e com uma intenção, permitindo compreender determinadas ações (Vale, 2004).

No ponto de vista do João, as respostas fornecidas durante a realização da tarefa eram completas, por isso, durante a realização da entrevista, limitou-se a dar algumas informações adicionais. Apesar disso, foi possível verificar que as conclusões por ele apresentadas não estavam dependentes das perguntas colocadas durante a entrevista. A Maria considera que as suas respostas não estão muito claras porque teve alguma dificuldade em explicar as suas ideias.

Foi durante a entrevista que o João se apercebeu que os registos escritos por ele produzidos não refletiam corretamente o seu raciocínio e, a Maria tomou consciência de que não foi suficientemente explícita nos registos efetuados. Foi neste momento que ambos os alunos se aperceberam da importância que a orientação do professor pode ter no trabalho do aluno, bem como do modo como comunica, por escrito, os seus raciocínios matemáticos.

Este estudo permite concluir que as principais dificuldades dos alunos, nas tarefas de exploração de padrões, foram a comunicação, tanto oral como escrita, a resolução de problemas e a generalização.

Para o João, apesar das tarefas serem de fácil resolução e óbvias, a sua principal dificuldade era explicar aos colegas da turma, tanto oralmente como por escrito, o seu pensamento, e a forma precipitada com que redigiu as suas conclusões, não refletindo sobre a viabilidade da resposta dada. Sendo o João um aluno de poucas palavras, muito desorganizado e com uma caligrafia pouco legível, foi difícil para ele organizar o seu pensamento. Ele precipitava-se nalgumas respostas e nem sempre as conclusões tiradas eram conclusivas do seu pensamento.

A Maria, sendo uma aluna mais tímida e mais insegura nas suas decisões, considera que as primeiras tarefas foram mais fáceis e os problemas não tão fáceis. Ela sentiu mais dificuldade em estabelecer conexões com os diferentes temas matemáticos, que só foram ultrapassadas quando as tarefas foram discutidas em grande grupo na turma, o que vai de encontro ao estudo de Barbosa (2010).

Durante a realização das tarefas foi possível verificar que, por vezes, quando o João era confrontado com expressões gerais que exigiam vários cálculos, no caso dos termos mais afastados da sequência, procurava um processo mais rápido. Sempre que o aluno não conseguia obter o processo pretendido mantinha o que tinha escolhido. Contudo, é notável também nas suas resoluções que a não verificação dos resultados obtidos, o levaram a respostas incompletas e por vezes erradas.

Com a Maria e com a turma, quando esta situação se verificava, a maioria dos alunos, optava por mudar de processo levando-os a respostas erradas. Já Orton e

Orton (1999) referiram, que uma das causas desta mudança errada de processo, tem a ver com a dificuldade que os alunos têm em reunir todos os dados fornecidos e em gerir toda a informação. Embora esta situação não se tenha verificado no João, manifestou-se tanto na Maria como nos colegas da turma.

Dos problemas apresentados o João responde à totalidade das questões, contudo, sente dificuldade em comunicar o seu raciocínio na generalização que faz. Ele recorre a expressões numéricas relacionadas com o perímetro da figura, consegue verificar que no espelho de pequenas dimensões "há um aumento de 4 azulejos", mas não consegue transpor esta conclusão para a formação da lei geral. Tanto a Maria como os colegas da turma, utilizaram a mesma estratégia do João, recorrendo a expressões relacionadas com o perímetro da figura.

Logo na primeira tarefa da terceira cadeia, o João consegue indicar o número de cubos necessários na construção das primeiras figuras, e indica corretamente a sua ordem na sequência, mas não consegue generalizar para figuras de ordem superior. A Maria responde corretamente a todas as questões.

No segundo problema, o desempenho da Maria e da turma foi mais satisfatório do que o do João porque os alunos conseguem descobrir o que há de comum nas várias figuras, relacionando o dobro do comprimento com o dobro da largura, embora, não terminem a generalização.

Na generalidade, os alunos consideram o último problema o mais acessível, uma vez que conseguem descobrir o que há de comum em cada situação, não sendo solicitado o registo da generalização.

Verifica-se que, além das dificuldades já referidas, alguns alunos apresentam dificuldades na organização do registo de dados aliados às dificuldades na mobilização de conhecimentos. Estes resultados estão de acordo com Orton e Orton (1999) onde referem, que a dificuldade que os alunos têm no registo de dados condiciona o seu trabalho. A maioria das vezes os alunos compreendem e descrevem oralmente o padrão, mas apresentam dificuldades ao fazê-lo por escrito.

No geral, os alunos revelaram um maior empenho e motivação nas tarefas de contagens e sequências, e um desempenho inferior nos problemas. Durante a resolução de problemas o empenho dos alunos foi menor, e o resultado final também ficou aquém do que seria esperado. Como referem alguns autores (Lester, 1980;

Ponte, 1992b, citado em Neves, 2010), é fundamental que o indivíduo sinta necessidade, manifeste interesse e predisposição para procurar a solução, de forma ativa e empenhada.

Conforme refere Pozo (1998), um problema é uma situação que o indivíduo precisa de resolver, mas não dispõe de um caminho rápido e direto que o conduza à solução. Acrescenta ainda que, para resolver um problema é necessário refletir e tomar decisões acerca da sequência de passos a serem seguidos. Contudo, a resolução de problemas, enquanto processo matemático importante na aprendizagem da matemática no 1.º ciclo, continua a oferecer resistência por parte dos alunos, que assumem "não gostar". Resolver problemas tanto dentro como fora da sala de aula continua a ser uma tarefa difícil e bastante assustadora para a maioria dos alunos.

Através de uma abordagem com recurso à exploração de padrões, em contextos visuais e figurativos, foram explorados diferentes modos de generalização, relacionados com diferentes formas de *ver* esses padrões. Desta exploração de padrões, emerge a generalização que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático, e que é a base do pensamento algébrico, conceito referido no PMEB (ME, 2007). Atendendo a que os alunos não tinham experienciado o trabalho com padrões durante o primeiro ciclo, houve necessidade de implementar algumas atividades prévias neste sentido. É no decorrer deste trabalho que se verifica o entusiasmo dos alunos na disciplina de Matemática, e a realização de progressos ao nível dos processos matemáticos utilizados. Através dos padrões visuais/figurativos os alunos chegaram a expressões numéricas com significado, como já tinha sido referido por vários autores (e.g. Billings et al., 2008). Na generalidade os alunos apresentaram, cada vez mais, expressões numéricas mais completas recorrendo menos vezes a expressões simples.

O desenvolvimento de capacidades para trabalhar relações numéricas, permitiram que os alunos realizassem avanços para tarefas de contagem em contextos figurativos, flexibilizando o seu pensamento ao nível de estratégias de contagem, que conduziram a diferentes expressões numéricas, embora equivalentes.

Ao longo das várias tarefas os alunos conseguem, com alguma facilidade, descobrir e descrever o padrão, recorrendo a diferentes representações: prolongando o padrão até ao próximo termo, calcular o valor do termo do padrão, continuar e generalizar o padrão.

Considerando que a maioria das tarefas recorria ao uso de figuras, o método da contagem foi utilizado essencialmente no cálculo dos termos mais próximos da sequência. Verifica-se, que um grande número de alunos recorre apenas a representações simbólicas, para assim responder às questões, e os restantes recorrem também às representações ativas, conseguindo estabelecer conexões entre as diferentes representações. De um modo geral, a passagem de informação de uma representação para a outra não apresentou dificuldades, verificando-se que os alunos procuram diferentes modos de contagem e escrevem as expressões numéricas com alguma facilidade.

Constata-se que os alunos conseguem, com alguma facilidade, compreender o processo recursivo do padrão, no entanto, sentem dificuldade em ir além desse reconhecimento no sentido de testar as suas conjeturas, que os encaminhem para a descoberta da regra geral de formação do padrão. Era mais fácil para os alunos continuar o próprio padrão do que descrever a regra da formação geral do padrão.

São orientações curriculares atuais a valorização da Matemática, por parte dos alunos, através das ideias e métodos desta área do saber, e o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; ME, 2007).

O raciocínio matemático apela à explicação e justificação da atividade dos alunos, em que a formulação e teste de conjeturas assumem um papel preponderante na fundamentação do seu raciocínio. Assim, talvez por ainda não terem tido experiências de aprendizagem com fórmulas e procedimentos algébricos, os alunos conseguiram compreender a origem e o significado da regra, e raciocinar de modo a explicar aos colegas a validade dessa regra, recorrendo a raciocínios sobre números e /ou figuras.

Com a implementação das tarefas de exploração de padrões, foi proporcionado aos alunos o ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo Lannin, Barker e Townsend, 2006 (citados em Vale et al.,2011) referido, que a generalização do padrão é uma ajuda na transição do pensamento numérico para o algébrico.

Porém, apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos em mobilizar os conhecimentos matemáticos no decorrer das tarefas, estes progrediram gradualmente ultrapassando as suas dificuldades, permitindo, como Borralho e Barbosa (2009) afirmam, fazer conexões entre os vários temas matemáticos, de forma a rever os conteúdos já adquiridos.

Sendo a comunicação um processo matemático facilitador de aprendizagens significativas, em que a explicação e a justificação são aspetos importantes na atividade dos alunos (ME-DGIDC,2007), pode também concluir-se que estas tarefas de exploração de padrões, proporcionam o desenvolvimento da comunicação oral e escrita, a visualização e o pensamento algébrico.

Neste estudo, foi notável uma maior dificuldade dos alunos na comunicação escrita, tendo Boavida et al. (2008) referido, que comunicar oralmente o nosso pensamento é complicado ao nível de organização e clarificação de ideias, mas fazê-lo por escrito torna-se um processo mais complexo, pois obriga a refletir sobre as ideias desenvolvidas. Este facto já tinha sido evidenciado noutros estudos (Alvarenga, 2006; Barbosa, 2010), em que os alunos apresentaram mais dificuldade na expressão escrita.

Na generalidade, os alunos evoluíram na sua forma de explicar e escrever os seus raciocínios, conseguiram fazer conjeturas e traduzi-las em linguagem matemática. Assim, verifica-se que através das tarefas de exploração de padrões, os alunos traduziram o seu modo de *ver* a sequência apoiando-se nas propriedades das imagens, sendo levados à generalização, tal como Vale (2012) já tinha referido nos estudos efetuados.

Também se constata que alguns alunos recorrem sistematicamente ao raciocínio recursivo, que pode ser devido a dificuldade de visualização, ou então, por dificuldade em utilizar o raciocínio funcional.

Terminado o trabalho de exploração de padrões, pode dizer-se que todos os alunos gostaram desta atividade, chegando mesmo a referir que foram as atividades que mais gostaram de realizar em Matemática.

Foi notável uma grande curiosidade e expetativa desde que se iniciou o trabalho com padrões, podendo mesmo dizer-se que, através da abordagem dos padrões, os alunos passaram a ver a Matemática de uma forma mais divertida e a gostar mais da disciplina.

Reflexão final

Estando agora na parte final desta investigação pode afirmar-se que o objetivo inicial proposto foi atingido, isto é, foi de encontro às ideias referidas na literatura e alguns estudos realizados sobre padrões. É certo que foi um trabalho demorado, intenso e exigente, contudo, foi uma experiência interessante que permitiu compreender melhor o trabalho realizado pelos alunos, em ambiente de sala de aula, nas tarefas apresentadas e identificar as suas principais dificuldades.

A metodologia usada foi considerada adequada, tendo a recolha de dados sido feita, sempre, em ambiente natural dos participantes e de uma forma sistemática, que foi de encontro ao objetivo desta investigação e às questões formuladas.

Atendendo a que os alunos nunca tinham experienciado este tipo de atividade durante o 1.º ciclo, houve a necessidade em iniciar este trabalho com tarefas prévias de contagens visuais, como requisito para a descoberta de padrões em sequências. Porém, se os alunos tivessem trazido algumas das capacidades a este nível, talvez fosse possível trabalhar outros aspetos de uma forma mais aprofundada, mas que assim não foi possível.

Apesar de se verificar que a turma apresenta diferentes ritmos de aprendizagem, e dois alunos com Necessidades Educativas Especiais, todos os alunos conseguiram responder quase à totalidade das questões encontrando-se no mesmo nível de desempenho.

Sendo os padrões um tema que sempre me despertou interesse e, estando já habituada a trabalhar com eles desde a formação académica, considera-se que foi um bom contributo para a minha experiência profissional e, principalmente para o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos.

Foi gratificante a consecução desta experiência, na medida em que proporcionou mais experiência e ajudou a compreender melhor as dificuldades dos alunos na comunicação dos seus pensamentos e, principalmente por contribuir para o crescimento profissional. Pode assim afirmar-se que, profissionalmente houve um enriquecimento. Contudo, nem sempre foi possível dedicar o tempo necessário para uma recolha, organização e análise de dados de uma forma mais pormenorizada. A falta de tempo foi, sem dúvida, a principal dificuldade nesta investigação. Mas, outras limitações foram identificadas, nomeadamente:

- Houve aspetos na revisão da literatura, nomeadamente a visualização e a generalização, que não foram abordados em profundidade e, na altura da análise das tarefas houve necessidade de os aprofundar;

- Atendendo a que a escola está cada vez mais exigente, a falta de tempo dificultou esta tarefa de ser professora e investigadora em simultâneo. Um trabalho desta natureza exige um grande investimento e o aprofundamento nem sempre foi possível fazê-lo com a regularidade pretendida;

- Na terceira cadeia de tarefas (Problemas) da proposta didática, o problema *Campeonato de Badminton*, deveria ser mais elaborado de modo a permitir um maior conhecimento das capacidades dos alunos, nomeadamente de generalização e formação da lei geral. Ainda nesta cadeia, o facto de os alunos trabalharem em grupo na resolução do problema *Moldura* e *Campeonato de Badminton,* dificultou a análise de dados;

- Considerando a importância que os padrões assumem no desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos, houve dificuldade em elaborar as categorias de análise uma vez que elas estão interligadas, mas encontraram-se outras capacidades, também relacionadas com estas três, que são as representações, a visualização e a generalização. Talvez não seja a melhor forma de categorizar as respostas, contudo, foi considerada a mais viável.

Por último, deixam-se ficar algumas recomendações para investigações futuras ou para dar continuidade a este trabalho. Assim, considera-se que, apesar da reconhecida importância da resolução de problemas, da comunicação e do raciocínio, é fundamental continuar a investir no desenvolvimento destas capacidades matemáticas, desde o primeiro contacto que as crianças têm com a escola, isto é, desde o Jardim de Infância.

Atendendo a que não foi possível neste estudo aprofundar o tema, conforme previsto inicialmente, pretendo num futuro próximo dar continuidade ao estudo já iniciado, estudando o modo como os alunos mobilizam os conceitos matemáticos na descoberta de padrões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento de Educação Básica, Ministério da Educação.

Alvarenga, D. (2006*). A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2.º ciclo*. Dissertação de Mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Aparici, R. e Matilla, A. (1987). *Imagem, vídeo y educacion*. Madrid: Fondo de Cultura Economica. Paideia.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense – making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 14 (3), 24-35.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.*

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Balmond, C. (2000). *O número 9: Em Busca do Código Sigma*. Lisboa: Replicação.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico. Tese de doutoramento em Estudos da Criança.* Braga: Universidade do Minho.

Baroody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8.* New York: Macmillan.

Bautista, A. (1994). *Las nuevas tecnologias em la capacitacion docente*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-194).Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiencia Matemática no Ensino Básico – Programa de Formação Contínua em*

Matemática para Profesores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.

Bruner (1962). *The processs of education.* Cambridge: Harvard University Press.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. *Padrões: Múltiplas perspetivas e contextos em educação matemática* (p.59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Carmo, H. e Ferreira, M. (2008). *Metodologia da Investigação: guia para auto-aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Chapin, S. (1998). Mathematical Investigations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(5), 332-338.*

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência Matemática.* Lisboa: Gradiva.

De Caigny, T. (1972). *Technologie educative et audio-visuel.* Bruxelas : Editions LABOR, revista e ampliada.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers.* NY: John Wiley & Sons, Inc.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Domingos A., Vale I., Saraiva M., Rodrigues M., Costa M., & Ferreira R. (coord.), (2013). Atas EIEM 2013. *Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático.* Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Doyle, W. (1988). *Work in mathematics classes. The context of students thinking during instruction. Educational Psycologist*, 23 (2), 167 – 180.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes.* In David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Erlandson D., Harris, E., Skipper, B. & Allen, S. (1993). *Doing naturalistic inquiry.* Newbury Park: Sage Publications.

Fernandes, D. (1991). Resolução de problemas e Avaliação. *Atas do Segundo Encontro Nacional de Didáticas e Metodologias de Ensino.* Aveiro: Universidade de Aveiro, 275 – 286.

Freiman, V. & Lee, L. (2006). Developing Algebraic Thinking through pattern exploration. *Mathematics teaching in Middle School,* 11(9), 428-433.

Frobisher, L., Frobisher, A., Orton, A. & Orton, J. (2007). *Learning to teach Shape and space.* Cheltenham: Nelson Thornes.

Garcia, J. (1986). *Fundamentos de la formacion permanente del professorado mediante em empleo del vídeo.* Alcoy: Editorial Marfil.

Giacomantonio, M. (1981). *O ensino através dos Audiovisuais.* São Paulo: Summus.

Goldin, G. (2002). Representation in school mathematics: a unifying research perspective. Em Lyn D. English et al. (Ed).*Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-217). New Jersey: NCTM.

Gonçalves, A. (2008). *Desenvolvimento do sentido de número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Gomes, A. (2004). *Modulo Metodologia de investigação: Área: ciências da Educação.* Cabo Verde: MEVRH-IP: Fundação Calouste Gulbenkian: UNICEF.

Kaput, J.J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T.A.Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Landsheere, G. (1986). *A investigação experimental em pedagogia.* Lisboa: Don Quixote.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1987). Representations and Translations Among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

ME-DEB. (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar.* Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica. Núcleo da Educação Pré Escolar.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: competências essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Merriam S. (1988). *Case study research in education.* S. Francisco: Jossey-Bass.

Neves, M. (2010). *Cadeias de problemas, conexões matemáticas e articulação curricular entre ciclos – Um estudo sobre conceções e práticas de uma professora do 2.º ciclo. Dissertação de Mestrado. Algarve: Universidade do Algarve.*

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM. [Traduçao portuguesa: Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar. Lisboa, APM/IIE, 1991].

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM. [Tradução Portuguesa: Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa, APM/IIE, 2007].

Orton, A. (1999). (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.* London: Cassel.

Orton, A. e Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra*. In A. Orton (Ed.), Pattern in Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). Londres: Cassel.

Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods.* E.U.A.: Sage. Publications.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. Quadrante, Vol. XXI, Nº 2, 29 – 50.

Pinheiro, M. (2013). *O Pensamento Algébrico em Contextos Visuais: um estudo no 6.º ano de escolaridade.* Dissertação de Mestrado. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classrooms – a pack for teachers.* University of Oxford & University of Warwick.

PISA (2003). *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação da resolução de problemas.* OCDE. Lisboa: ME-GAVE.

Polya, J. (1945). *How to Solve It*. Princeton, Princeton University Press.

Pólya, G. (1990). Mathematics and plausible reasoning. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J.P.(1994). O estudo de caso em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J.P., & Sousa, H. (2010). *Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico*. In GTI (org.), *O professor e o programa de matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Pozo, J. (1998). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathemtics Education*, 1, 1-21.

Ribeiro, A. (2012). *A comunicação e a resolução de problemas de padrão em matemática: um estudo com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Relatório de Mestrado. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Rivera, F. e Becker, J. (2005). *Figural and Numerical. Modes of Generalizing in Algebra.* Mathematics Teaching in the Middle School, 11(4), 198-203.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.

Rivera, F. & Becker, J. (2008). Middle school children´s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM, Mathematics Education*, 40, 68-82.

Sawyer, W. (1955). *Prelude to mathematics.* Baltimore: Penguin Books.

Schoenfeld, A. H. (1978). *Problem solving strategies in college – Level Mathematics, Physics Department*, University of California Berkeley.

Smith, E. (2003). *Stasis and change: Integrating patterns functions and algebra through the K-12 curriculum*. Reston: NCTM.

Thompson, P.W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 267-283). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learnig of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassel.

TIMSS (1996-1999). *Highlights of Results from TIMSS, Primary School Years.* Middle School Years. Boston: TIMSS International Study Center.

Townsend, B. (2005*). Examining secondary student´s algebraic reasoning: flexibility and strategy used*. (Tese de Doutoramento). University of Missouri, EUA.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(8), 438-445.*

Vale, I. (1997). *Desempenhos e conceções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas*. In. D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho e I. Vale (coords). *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: múltiplos contextos e perspetivas* (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE*, 5, 171-202.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., et al. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o Ensino Básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projeto Padrões.

Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., Geraldes, F., Sousa, R., & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1.º e 2.º ciclos propostas para sala de aula*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal no currículo*. Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I. e Pimentel, T. (2011). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação matemática,* 110, 33-38

Vale, I. e Pimentel T. (coord.) (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o Ensino Básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. In J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.), *Atas do Seminário de Investigação Matemática*, pp. 35-63. Viana do Castelo: APM.

Vale I. & Pimentel T. (Coord.) (2011*). Padrões em Matemática. Uma Proposta Didática no Âmbito do Novo Programa para o Ensino Básico.* Lisboa: Texto Editores.

Vale, I., Pimentel T., Alvarenga, D., & Fão, A. (2011). *Uma Proposta Didática Envolvendo Padrões – 1.º e 2.º ciclos do ensino básico*. ME: DGIDC.

Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. (Programa de Formação Contínua).

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. *Interações*, 20 (181-207)

Woods, P. (1999). *Investigar a Arte de ensinar*. Porto: Porto Editora.

ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de autorização para realizar o estudo na escola

Ex.mo Director do
Agrupamento de Escolas Vale do Tamel

No âmbito de um trabalho de Mestrado subordinado ao tema "**Contributo dos padrões no desenvolvimento de capacidades transversais em Matemática: um estudo no 5.º ano de escolaridade**", pretendia recolher dados na minha turma do 5º ano (Turma D), na escola sede deste agrupamento, com o objetivo de analisar o trabalho dos alunos em tarefas que envolvam a descoberta e a exploração de padrões, assim como, o contributo que estas tarefas podem dar no desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos ao nível do 2º ciclo do Ensino Básico.

As actividades a desenvolver estarão de acordo com os temas do programa, não afectando a planificação já elaborada. Durante a sua realização será efectuada a recolha de dados, recorrendo para isso a registos áudio e vídeo.

O anonimato dos alunos estará sempre garantido, sendo os Encarregados de Educação previamente informados do contexto e dos objectivos deste trabalho.

Manifestando desde já a minha disponibilidade para prestar possíveis esclarecimentos relacionados com este trabalho, aguardo o vosso parecer.

Com os melhores cumprimentos.

Pede deferimento

14 de Fevereiro de 2011

A professora,

____

Maria de Lurdes Amorim

Anexo 2 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Ex.^{mo} Encarregado de Educação

No âmbito de um trabalho de Mestrado sobre o tema "**Contributo dos padrões no desenvolvimento de capacidades transversais em Matemática: um estudo no 5.º ano de escolaridade**" irá ser realizado um estudo aos alunos da turma do seu educando. Esta actividade tem como objectivo estudar a forma como os alunos do 5.º ano aprendem Matemática quando são confrontados com tarefas de descoberta e exploração de padrões.

Integrado no Currículo do 5.º ano de escolaridade e segundo a metodologia do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, proporcionará aos alunos experiências de aprendizagem que desenvolvam a sua capacidade de resolver problemas, de comunicar e raciocinar matematicamente.

No sentido de se proceder à recolha de dados será necessário proceder ao registo áudio e vídeo de algumas actividades a realizar durante as aulas.

No caso de necessitar de mais esclarecimentos, por favor queira contactar e colocar as questões que considere pertinentes.

Com os melhores cumprimentos.

22 de Fevereiro de 2011

A professora

____

Mª de Lurdes Amorim

----

22 de Fevereiro de 2011

Declaro que autorizo / não autorizo (riscar o que não interessa) o meu educando ____ , nº ___, turma ___ do ano ___, a participar nesse estudo.

Obrigada pela sua atenção.

O Encarregado de Educação

____

Anexo 3 – Questionário aplicado à turma

Eu e a Matemática...
Nome: ____ Nº: ___ Turma: _____

1- Quando ouves a palavra Matemática o que é que te vem imediatamente à ideia?

____

____

2- Consideras-te um bom, médio, fraco ou mesmo mau aluno a Matemática? Porquê?

____

____

3- Quando és colocado perante uma tarefa como é que te sentes?____

4- Que tipo de actividades gostas mais de desenvolver em Matemática? ________

____

____

5- Quais são as tuas maiores dificuldades em Matemática? ___________________

____

____

6- Que sugestões darias ao teu professor para que aprendesses melhor? _______

____

____

7- Conta um pequeno episódio que se tenha passado numa das tuas aulas de Matemática que te tenha marcado pela positiva. __________________________

____

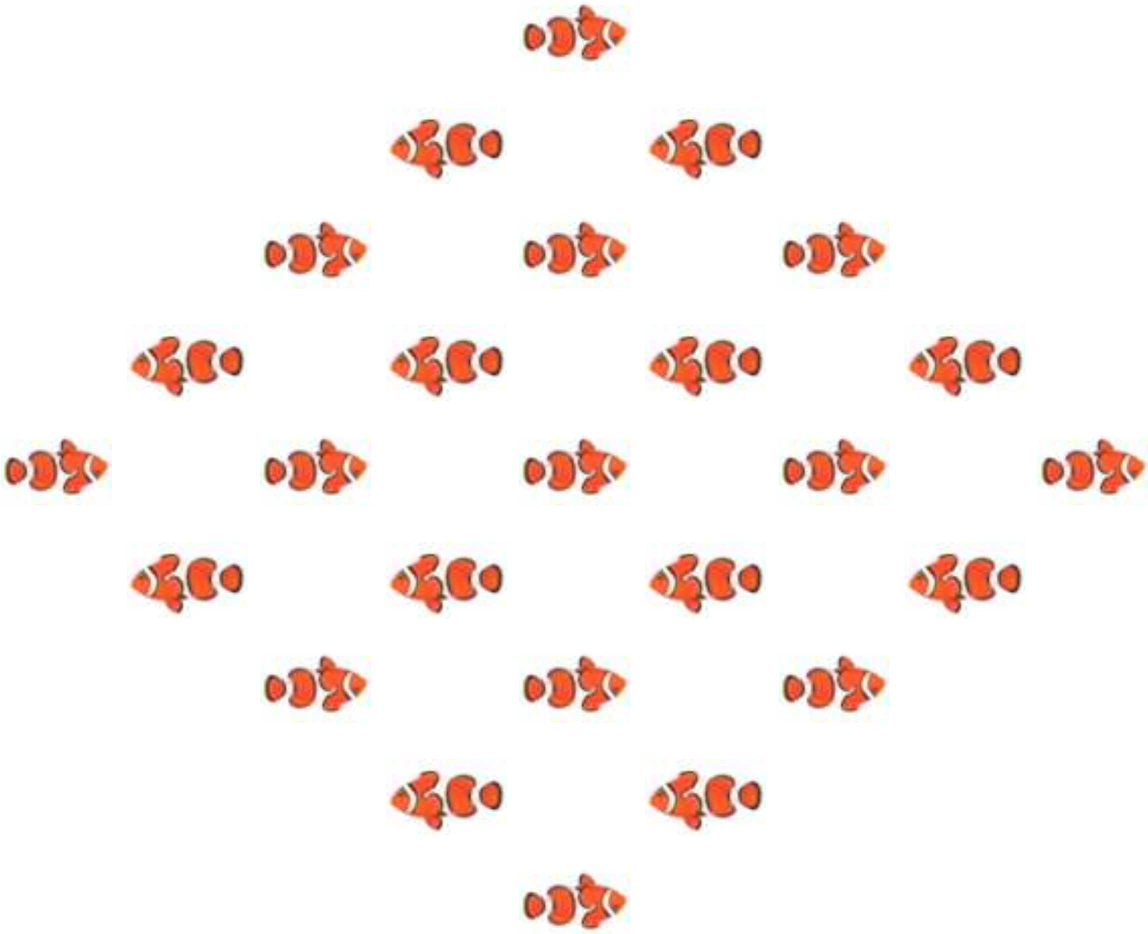
____

8- Conta um pequeno episódio que se tenha passado numa das tuas aulas de Matemática que te tenha marcado pela negativa. ____________________________

____

Anexo 4 – Tarefas da primeira cadeia

Peixinhos



1- Quantos peixinhos estão na figura?

2- Descobre diferentes modos de contagem.

3- Escreve as expressões numéricas respectivas.

4- O que podes concluir? ____

____

____

Nome: ____________________________ Nº _____Turma _____ Data ______________

Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.31

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Bolinhas em Quadrado

1- Determina o número de bolas que formam a figura junta.

2- Como é que calculaste?

3- Descobre modos diferentes de as contar.

4- Descreve as expressões numéricas que traduzem esse modo de contagem.

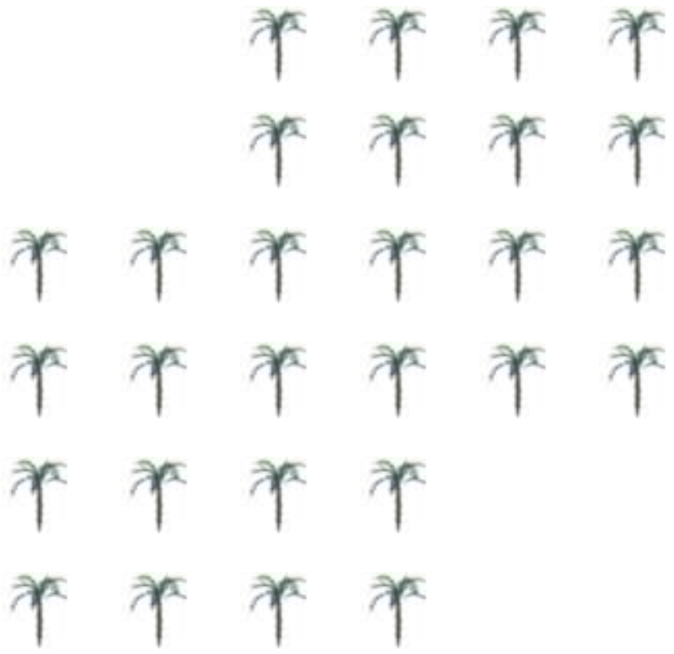
5- O que podes concluir? ____

____

____

Nome: ______________________________Nº ____Turma ____ Data _______________

As Palmeiras



1- Quantas palmeiras tem o Ricardo no seu jardim?

2- Consegues descobrir um processo rápido para as contar?

3- Escreve a expressão numérica respetiva.

4- O modo de contagem que eu vi é dado pela expressão 6 X 6 – 2 X 4.

Consegues mostrar no desenho como é que eu vi para fazer a contagem?

Nome: ________________________________Nº _____Turma ____ Data ___________

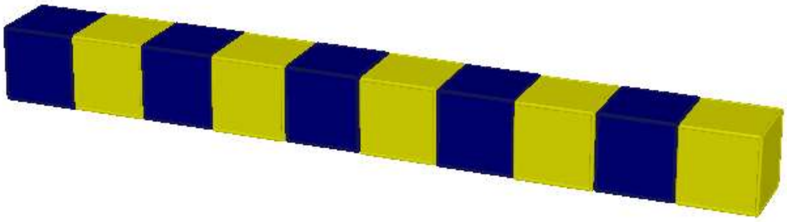
Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.34

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Anexo 5 – Tarefas da segunda cadeia

Comboio de Cubos

A Ana construiu um “comboio” utilizando pequenos cubos, como podes observar na figura.



1- Continua a sequência de cubos.

2- Como explicarias ao teu colega para continuar este comboio?

____

____

3- Consegues identificar o grupo que se repete?

4- Que cor tem o quinto cubo? Qual será a cor do décimo primeiro?

____

____

5- Qual será a cor do vigésimo quarto cubo?

Explica como podes ter essa certeza.

____

____

____

Nome: ________________________________ Nº: ____ Turma: __ Data: ________

Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.14

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Rapazes e Raparigas

Considera as crianças em fila conforme a imagem.

...

1- Continua a sequência.

2- Qual é o grupo que se repete?

3- Se construirmos uma sequência de grupos repetidos com 10 rapazes, quantas raparigas há?
E quantos grupos repetidos?

4- E se construirmos uma sequência com 24 rapazes, quantas raparigas há?
E quantos grupos repetidos?

5- Agora imagina uma sequência com 90 crianças ao todo. Nessa sequência, quantos rapazes haveria? E raparigas?

6- Escreve uma frase em que expliques aquilo que concluíste sobre esta sequência.
____

____

Nome: _____________________________ Nº____Turma:____ Data: _______

Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.39

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Carrinhos de Quadrados

Utilizaram-se quadrados para construir a sequência de carrinhos:

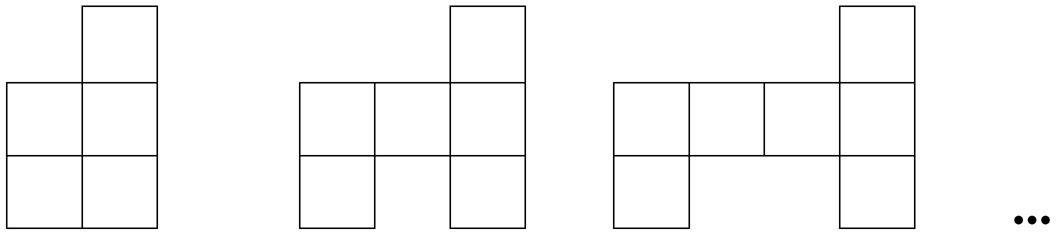


Figura1 Figura 2 Figura 3

1- Quantos quadrados foram necessários para construir o carrinho dois? E o carrinho três?

____

____

2- Desenha o quarto carrinho.

3- Quantos quadrados são necessários para construir o quarto carrinho?

____

____

4- Quantos quadrados terá o vigésimo quinto carrinho?
Explica como pensaste.

____

____

____

Nome:___________________________________ Nº: __ Turma: __ Data: _______

Discos em Y

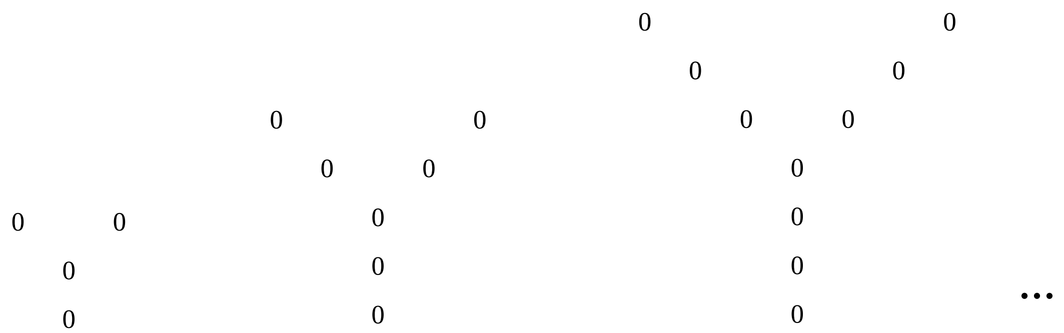


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1- Quantos discos tem o segundo Y? E o quarto?

2- De quantas formas diferentes consegues ver esta sequência?

3- Quantos discos terá o centésimo Y?

Explica como pensaste.

4- Determina o número de discos necessários para construir uma figura de qualquer ordem.

Nome: ______________________________ Nº: __ Turma:___ Data: __________

Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.23 (adaptado)

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Anexo 6 – Tarefas da terceira cadeia

Brincando com Cubos

O João fez várias construções utilizando somente cubos e formou uma sequência, da qual se apresentam as três primeiras figuras:

Figura 1

Figura 2

Figura 3

1- Quantos cubos são necessários para construir a quinta figura da sequência?

2- Qual é a ordem da figura na sequência se necessitar de 15 cubos para ser construído?

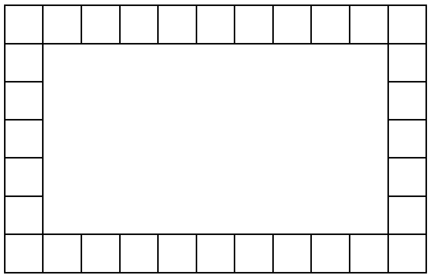
3- Alguma figura desta sequência terá 36 cubos no total? Como podes ter essa certeza?

Nome: _______________________________________ Nº: __ Turma: __ Data: ______

Tese de Mestrado de Margarida R. S. N. G. Neves, p.97 (adaptado) 2010

A Moldura

A *Moldarte* faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura.



1- Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura anterior?

2- De acordo com o modelo do espelho anterior desenha espelhos de várias dimensões.

3- Explica por palavras tuas, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões.

Nome: _____________________________________ Nº: __ Turma: __ Data: ________

Padrões no ensino e aprendizagem da matemática, p.48

Edição: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Campeonato de Badminton

Na escola da Luísa vai realizar-se um campeonato de badmington numa mão, isto é, cada um dos oito atletas participantes jogará com cada um dos outros uma única vez.

1. Quantos jogos se irão disputar no campeonato?
Explica como pensaste.

2. E se na escola houvesse 14 Jogadores, consegues descobrir quantos jogos seriam disputados?

Nome: _______________________________________ Nº__ Turma__ Data: ____________

Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico, p.32-33

Edição: Lidel

Anexo 7 – Finalidades, objetivos e capacidades transversais no ensino básico

---

Tabela 2 – Finalidades do ensino da Matemática e competências a adquirir

Finalidades do ensino da Matemática	Competências a desenvolver nos alunos
a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.	● Compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático; ● Capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática; ● Capacidade de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos; ● Capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega;
b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.	● Autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização; ● À-vontade e segurança em lidar com situações que envolvam Matemática na vida escolar corrente, ou profissional; ● Interesse pela Matemática e em partilhar aspetos da sua experiência nesta ciência; ● Compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspetos da sua história; ● Capacidade de reconhecer a valorizar o papel da Matemática nos vários setores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico; ● Capacidade de apreciar aspetos estéticos da Matemática.

Tabela 3-Objetivos gerais para o ensino da Matemática e competências a desenvolver

Objetivos gerais para o ensino da Matemática	Os alunos devem ser capazes de ...
Conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática – “saber” e o “saber -fazer”;	• possuir a informação básica necessária para o trabalho na disciplina; • realizar os procedimentos e algoritmos

	básicos e de usar os instrumentos apropriados;
Desenvolver uma compreensão da Matemática – o “saber porquê”;	• compreender conceitos, algoritmos, procedimentos e relações e perceber a Matemática como uma disciplina lógica e coerente;
Lidar com ideias matemáticas em diversas representações;	• conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capaz de as utilizar em diferentes situações e de selecionar a representação mais adequada à situação;
Comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático;	• descrever oralmente e por escrito a sua compreensão matemática e os procedimentos que utilizam; • explicitar o seu raciocínio bem como interpretar e analisar a informação que lhes é transmitida;
Raciocinar matematicamente usando conceitos, representações e procedimentos matemáticos;	• aprender a justificar as suas afirmações recorrendo a exemplos específicos;
Resolver problemas enquanto actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento;	• compreender que um problema matemático pode ser resolvido através de diferentes estratégias; • dar atenção à análise retrospetiva da sua resolução; • apreciar as soluções obtidas;
Estabelecer conexões entre aquilo que já aprenderam e o que estão a aprender a cada momento;	• reconhecer a Matemática como um todo integrado; • usar a Matemática nos vários contextos;
Fazer Matemática de modo autónomo;	• ser autónomo, tanto na resolução de problemas como na exploração de regularidades, formulando e testando conjeturas;
Apreciar a Matemática.	• usar a Matemática nos vários contextos; • apreciar a Matemática nos seus aspetos estéticos; • desenvolver uma perspetiva positiva sobre o seu papel e utilização.

Tabela 4 – Capacidades transversais e competências a adquirir pelos alunos

Capacidades transversais	Os alunos devem ser capazes de...
Resolução de problemas **"A resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos", (p.8).**	• resolver e formular problemas, e de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema; • adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e também com problemas relativos a contextos do seu dia-a-dia e de outros domínios do saber.
Raciocínio matemático **"O raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas", (p.8).**	• compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo; • raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias.
Comunicação matemática **"A comunicação matemática é uma outra capacidade transversal a todo o trabalho na disciplina de Matemática. Envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem própria da Matemática", (p.8).**	• expressar as suas ideias; • interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas; • participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos.

Tabela 5 – Outras capacidades a desenvolver pelos alunos no ensino básico

Outras capacidades a desenvolver	Os alunos devem ser capazes de ...
Representações matemáticas **"(...) desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver mais do que uma forma de representação", (p.9).**	• adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática; • compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas; • reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.
Exploração de conexões **"(...) entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia a dia do aluno",**	• compreender como os conhecimentos matemáticos se relacionam entre si; • usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, nos

(p.9).	mais diversos.
Recursos **“A aprendizagem da Matemática inclui vários recursos”, (p.8).**	• utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos; • usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na apresentação de objetos geométricos; • usar instrumentos de medida; • utilizar o manual escolar como referência permanente para a sua aprendizagem.
Cálculo mental **“(...)está relacionado com o desenvolvimento do sentido de número”, (p.10).**	• desenvolver a sua capacidade de estimação e usá-la na análise dos resultados; • usar as suas próprias referências numéricas e adoptarem o seu próprio grau de simplificação de cálculos.
História da Matemática **“Salientar o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência”, (p.10).**	• reconhecer a importância da Matemática ao longo dos tempos.
Papel da Matemática na sociedade atual	• reconhecer o papel da Matemática nas Ciências Naturais, Ciências Sociais e Humanas, a Saúde, o Desporto e a Arte.

Anexo 8 - Guião da entrevista

- Durante o 1.º ciclo lembras-te de ter falado em padrões? Consegues dar um exemplo de uma tarefa de padrão?
- O que achaste das tarefas que resolveste? Qual foi a questão que consideraste mais fácil? Porquê?
- O que achaste das tarefas de contagens? Ensinaram-te alguma coisa nova? Que conteúdos matemáticos recordaste com estas tarefas?
- Consideras fácil ou difícil identificar o padrão numa sequência? Porquê?
- Realizaste 4 tarefas de sequências. Qual foi a mais difícil? Consegues explicar porquê?
- Na última cadeia de tarefas resolveste 3 problemas. Gostaste de realizar esta atividade? Qual foi o problema que mais gostaste? Porquê?
- Em alguma tarefa tiveste dificuldade na compreensão do problema?
- De todas as tarefas realizadas, alguma vez sentiste dificuldade em organizar os dados de modo a responder às questões?
- O que achaste mais difícil nestas atividades?
- Achas que é fácil ou difícil chegar à lei de formação geral de uma sequência? Como fazes?
- Quando a tarefa é apresentada à turma, consegues aprender novas estratégias de resolução com os teus colegas?
- Achas mais fácil explicar o teu pensamento aos teus colegas oralmente ou por escrito? Porquê?

Anexo 9

Dados relativos à caraterização da turma

- Distribuição dos alunos:

	Idade			
	10	11	12	Total
Rapazes	11	1*	0	12
Raparigas	11	1*	0	12
Total	22	2	0	24

- Habilitações dos encarregados de educação:

Habilitações	Nº de pais	Nº de mães
4.º ano	6	3
5.º ano	0	0
6.º ano	9	9
7.º ano	1	1
9.º ano	1	2
10.º ano	1	0
12.º ano	2	4
Curso superior	0	1

- Retenções dos alunos:

Nº de retenções	Nº de alunos
0	21
1	3

* Alunos abrangidos pelo Decreto - Lei nº3 /2008 de 7 de janeiro.