Ensinar matemática com resolução de problemas

Isabel Vale, Teresa Pimentel e Ana Barbosa
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

A atividade mais carateristicamente humana é a resolução de problemas;
pensar com um propósito, imaginar meios para atingir um fim desejado.
(George Polya)

Introdução

Não é fácil falar de resolução de problemas, pois tem sido uma das áreas mais ativas de investigação nas últimas décadas. Contudo, vários estudos realizados (*e.g.* Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo & Kroll, 1989; Schoenfeld, 1992) têm revelado a complexidade do tema e a dificuldade em implementar os resultados da investigação no ensino e aprendizagem. Apesar dos enormes avanços conseguidos na área da investigação em resolução de problemas, o seu impacto no currículo e sobretudo na sala de aula de matemática de modo a produzir bons resolvedores de problemas tem sido muito limitado.

Por outro lado, as tendências nas políticas educacionais sobre as orientações curriculares para o ensino da matemática têm sofrido oscilações entre o foco nas capacidades básicas e o foco na resolução de problemas. Estas situações conduziram direta ou indiretamente a que na última década a investigação em resolução de problemas tenha tido um declínio, ou pelo menos mudado o seu foco (veja-se por exemplo o Third International Handbook of Mathematics Education, de 2013, onde não aparece nenhum capítulo sobre resolução de problemas), apesar de recentemente existirem novas perspetivas sobre esta temática (*e.g.* English, Lesh & Fennewald, 2008; Lesh & Zawojewski, 2007; Lester & Kehle, 2003; Schoenfeld, 2013; Sriraman, 2013). Procuramos dar uma panorâmica geral sobre a resolução de problemas e a investigação associada. Face à reflexão feita sobre o papel destes temas no curriculo, propomos uma variante às ideias de vários autores que denominamos de ensino *com* resolução de problemas. Salientamos a importância do uso de uma estratégia complementar de resolução de problemas, que denominamos de *procurar ver*, que pode ser usada com vantagem, em combinação com outras, no caminho para a solução de muitos problemas. Realçamos o papel da resolução, e sobretudo da formulação de problemas, no desenvolvimento da criatividade. Finalmente, na confluência destas ideias, procuramos mostrar, com base em exemplos ilustrativos, a importância da estratégia *procurar ver* no desenvolvimento de características da criatividade.

A resolução de problemas na investigação e no currículo

A história relativamente curta sobre a investigação em resolução de problemas de matemática inicia-se, em grande parte, a partir do influente trabalho de Polya, *How to solve it*, em 1945, sobre como resolver problemas.

Uma grande quantidade de estudos desenhados, sobretudo nas décadas de 1970 e 1980, a partir deste trabalho, focaram-se essencialmente sobre o modo como os alunos talentosos resolviam problemas (*e.g.* Anderson, Boyle & Reiser, 1985), sobre o ensino de estratégias de resolução (heurísticas) e processos metacognitivos (*e.g.* Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo & Kroll, 1989; Schoenfeld, 1992), e, mais recentemente, sobre a relação com a modelação matemática (*e.g.* English et al., 2008).

Apesar destas décadas de investigação e de resultados importantes sobre o assunto, parece que desenvolver as capacidades dos alunos para resolver problemas, quer dentro da própria matemática quer na transferência para fora da matemática (outras áreas e no mundo real), necessita de outras perspetivas e investimentos e desenvolvimento curricular associado. As capacidades dos alunos em resolução de problemas ainda exigem uma melhoria substancial, especialmente atendendo à natureza e rápida evolução do mundo de hoje. Ou seja, o impulso para esta mudança resulta da crescente procura de futuros profissionais com competências de ordem superior. Tal mudança coincide com o objetivo de que todos os alunos tenham acesso a uma educação que enfatiza a criatividade, a inovação e a resolução de problemas (*e.g.* Kattou & Christou, 2013; Lesh & Zawojewski, 2007; Lester & Kehle, 2003; NCTM, 2000).

De acordo com Lesh e Zawojewski (2007), quando Lester comparou o seu próprio trabalho realizado em 1980 com o realizado por Schoenfeld em 1992, concluiu que pouco tinha mudado. Na verdade, mesmo uma década mais tarde, quando Lester e Kehle (2003) compararam o trabalho realizado com as principais questões em discussão descritas por Lester, em 1994, concluíram que se continuava a constatar o pouco progresso que tinha sido feito na investigação em resolução de problemas e que essa investigação tinha ainda pouco a oferecer para a prática da matemática escolar.

English et al. (2008) referem que o avanço no ensino e aprendizagem da resolução de problemas exige uma clarificação da relação entre o desenvolvimento da compreensão dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento das competências em resolução de problemas, pois quando se conseguirem clarificar estas relações poder-se-ão dar indicações mais consistentes e precisas ao nível do desenvolvimento curricular e das práticas de sala de aula, de modo a que se possa utilizar a resolução de problemas como um meio poderoso para desenvolver conceitos matemáticos substantivos.

Toda a investigação produzida ao longo do tempo teve repercussões igualmente a nível curricular. A resolução de problemas tem sido uma parte integrante da matemática. No entanto, durante o último meio século têm surgido inúmeras orientações que têm impulsionado a resolução de problemas nos currículos escolares em vários países.

Embora muito se tenha escrito para abordar este tema tão importante em educação matemática ao longo das últimas décadas, este só foi formalmente considerado em 1977, quando o National Council of Supervisors of Mathematics dos Estados Unidos (NCSM) salientou que "aprender a resolver os problemas é a principal razão para estudar matemática" (NCSM, 1977, p.1). Esta ideia foi igualmente defendida em 1980, em An Agenda for Action do NCTM, onde se afirmava: "A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de matemática." (NCTM, 1980, p.1). Esta posição marcou o início do movimento de resolução de problemas em matemática escolar nos Estados Unidos e em todo o mundo. Todos os documentos curriculares existentes posteriormente fazem referência à importância da integração da resolução de problemas em todos os níveis de escolaridade; contudo o foco e as perspetivas têm tido algumas oscilações e divergências (*e.g.* CCSSI, 2010; NCTM, 1989; NCTM 2000).

Muitas destas recomendações, que apontam para a atribuição de um papel de destaque no currículo à resolução de problemas, são tão válidas hoje como eram então. Na verdade, o que tem mudado ao longo das décadas são as perspetivas de abordagem à resolução de problemas, e não a discussão sobre o seu valor. Assim, hoje, a resolução de problemas não é apenas outro movimento entre os muitos que têm aparecido e desaparecido em educação matemática. Em vez disso, tem sido aceite pela comunidade de educadores matemáticos como uma parte integrante do currículo de matemática.

No caso particular do nosso país foi introduzida com grande força esta tendência nos programas dos anos noventa do séc. XX (ME, 1990; ME, 1991a; ME, 1991b). Mais recentemente, a resolução de problemas foi considerada uma capacidade transversal, a par do raciocínio e da comunicação (ME, 1997; ME, 2007). No entanto, presentemente, nos novos programas (ME, 2013; ME, 2014), o foco vira-se novamente para as capacidades básicas, perdendo a resolução de problemas, a nível curricular, o protagonismo dos últimos 25 anos.

Analisamos de seguida algumas perspetivas, mais tradicionais e mais atuais, sobre a resolução de problemas.

Revisitando a resolução de problemas

Comecemos por analisar o significado de problema. Tradicionalmente tornou-se consensual na literatura definir problema como uma situação que envolve o aluno em atividade, mas para a qual não conhece à partida, ou não é óbvio, um caminho para chegar à solução. Com esta definição aquilo que às vezes se designa por problema pode transformar-se num mero exercício por efeito do ensino.

Mas perante um verdadeiro problema, em que não é conhecido o caminho, para o abordar é necessário que se escolham e utilizem estratégias que devem ser pensadas em face de cada situação. Foi Polya que no seu livro *How to solve it* introduziu a noção de heurística, mais tarde referida pelos educadores matemáticos como estratégia, e de que são exemplo fazer um desenho, trabalhar do fim para o princípio, ou procurar um problema semelhante. Estas estratégias foram reconhecidas como úteis para dar pistas sobre o caminho a seguir, e ao longo dos anos foram defendidas como capacidades que é importante o aluno desenvolver. Surgiu assim uma linha que defendia o ensino explícito de estratégias e a abordagem das várias fases do modelo de Polya. Esta perspetiva, designada por ensino *acerca* da resolução de problemas (Hatfield, 1978), considera que esta deve ser encarada como um conteúdo curricular, ensinado do mesmo modo que, por exemplo, a multiplicação. A sua aprendizagem não pode ser feita ao acaso, tendo de haver a preocupação, da parte dos professores, com uma planificação cuidadosa. No entanto, verificou-se que este ensino não produzia os efeitos desejados, ou seja, não tornava os alunos melhores resolvedores de problemas. As heurísticas ajudam a refletir e interpretar situações-problema, mas como são demasiado genéricas não ajudam o aluno que está sem saber o que fazer durante uma tentativa de resolução. Schoenfeld (1992), fazendo essa constatação, sugere que as heurísticas de Polya são essencialmente descritivas, fornecendo apenas largas categorias de processos. A caraterização de Polya não fornecia a quantidade de pormenores que permitisse a pessoas não familiarizadas com as estratégias ser capaz de utilizá-las. Para ultrapassar esta dificuldade, este investigador preconiza: (a) desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas; (b) ensinar estratégias metacognitivas para que os alunos aprendam a aplicar no momento adequado as estratégias de resolução de problemas e os conhecimentos adquiridos; e (c) estudar modos de eliminar crenças contraproducentes dos alunos e fomentar crenças produtivas sobre a matemática, a resolução de problemas e as suas próprias competências pessoais.

A resolução de problemas pode também ser encarada como finalidade última do ensino da matemática, considerada como uma forma de pensamento. Os procedimentos rotineiros são apenas ferramentas, e é pois necessário ensinar os alunos a pensar, preparando-os para resolver eficazmente problemas. É o ensino *para* a resolução de problemas. Nesta perspetiva o ensino de conceitos e procedimentos é considerado básico e pré-requisito.

Mas não tem havido unanimidade na aceitação desta perspetiva sobre o ensino da resolução de problemas. Nela assume-se que as capacidades que lhe estão associadas se desenvolvem através da seguinte sequência: (a) aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos; (b) prática de "problemas de palavras"; (c) exposição a uma variedade de estratégias (*e.g.* fazer um diagrama, tentativa e erro); e (d) experiências na aplicação destas competências na resolução de "novos problemas" ou "problemas não rotineiros". Há autores que criticam esta abordagem, considerando que a resolução de problemas é vista, deste modo, como um tema independente e isolado, com uma importância secundária no desenvolvimento das ideias matemáticas; argumentam, ainda, haver poucas evidências que sustentem que a capacidade para resolver problemas por parte dos alunos melhore quando se isola a resolução de problemas da aprendizagem de conceitos e processos matemáticos (Cai & Lester, 2010; English et al., 2008)

A resolução de problemas também pode ser considerada um modo de instrução. Podemos ensinar nas nossas aulas de matemática usando a resolução de problemas como fio condutor para os conceitos matemáticos, tornando-se assim a base para ensinar os vários conteúdos. Esta linha designa-se por ensino através da resolução de problemas. Cai e

Lester (2010) apresentam a resolução de problemas como referindo-se a tarefas matemáticas que têm potencial para proporcionar desafios intelectuais que podem aumentar o desenvolvimento e a compreensão dos alunos. Nesta perspetiva a resolução de problemas é uma parte integrante da aprendizagem da matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. Na verdade é a concretização de uma ideia que já era defendida em 1989 pelo NCTM: "A resolução de problemas não é um tópico distinto, mas um processo que atravessa todo o programa e fornece o contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas" (p. 29).

Contudo, nesta visão do ensino da matemática através da resolução de problemas, nem todos os problemas devem ser usados mas apenas os que valem a pena para o objetivo, ou seja, tarefas desafiantes e contendo um nível de desafio que convida à especulação e ao trabalho. Devem ainda orientar os alunos na investigação de ideias matemáticas e modos de pensamento importantes. Para ajudar o professor a selecionar, adaptar ou desenvolver problemas que valem a pena, Cai e Lester (2010) definem dez critérios a que deve obedecer um problema, considerando no entanto os quatro primeiros como sendo critérios *sine qua non:* (1) tem incorporadas ideias matemáticas importantes e úteis; (2) requer pensamento de ordem elevada; (3) contribui para o desenvolvimento concetual; (4) permite ao professor avaliar a aprendizagem dos alunos; (5) permite múltiplas formas de abordagem e estratégias de resolução; (6) tem várias soluções e permite opiniões ou tomadas de decisão; (7) envolve os alunos e fomenta o seu discurso; (8) conecta-se com outras ideias matemáticas importantes; (9) desenvolve a habilidade para usar a matemática; e (10) é uma oportunidade para praticar destrezas importantes. Nesta visão da aprendizagem através da resolução de problemas argumenta-se que os alunos têm oportunidade para usar várias abordagens, utilizar conhecimentos anteriores, apresentar as suas ideias ao grupo, justificá-las de forma convincente. Uma vez que, para obter uma solução, é necessário refinar, combinar e modificar conhecimento, este é um modo de ultrapassar uma aprendizagem constituída por factos isolados e aprender a fazer conexões.

A questão dos problemas é aspeto crucial nesta discussão. Como o próprio Polya (1966) refere, há problemas e problemas, com todo o tipo de diferenças que podem existir entre eles. Uma que tem sido mais valorizada pelos professores é a diferença entre problemas "rotineiros" e "não rotineiros". Para Polya os problemas não rotineiros são os que exigem aspetos relacionados com a criatividade, em particular a originalidade, o que não acontece com os problemas rotineiros. E recusa-se a ir mais além na definição do que é um problema não rotineiro dizendo "Se nunca resolveu nenhum, se nunca experienciou a tensão e o triunfo da descoberta, e se depois de anos de ensino, ainda não observou tal tensão e triunfo nos seus alunos, procure outro emprego e pare de ensinar" (pp.126–127).

Mais recentemente, vários investigadores (*e.g.* Cai & Lester; 2010; English et al., 2008; Lesh & Zawojewski, 2007) reconhecem que pouco progresso se fez na investigação em resolução de problemas desde os anos oitenta, como já foi referido. A investigação na área tem abrandado ao longo dos últimos 30 anos e a existente não é cumulativa pela falta de uma base teórica e porque o campo da educação matemática tem oscilado entre um realce curricular em resolução de problemas e em factos básicos. Nos últimos anos tem-se verificado em países asiáticos como Singapura, que têm muito bons resultados em testes de factos básicos, uma ênfase na criatividade e inovação a nível escolar, provocada pela forte procura de profissionais com capacidades de ordem superior. Resultados de investigação mostram um incremento do uso da matemática em áreas como a engenharia, a medicina e a gestão e peritos nessas áreas defendem que o foco da resolução de problemas mudou dramaticamente nos últimos vinte anos, e essas diferenças incluem agora o conhecimento e as capacidades necessárias para criar e modificar modelos matemáticos usando conhecimentos interdisciplinares ou conhecimento que integra modos de pensar diferentes, e ainda com o apoio das tecnologias. Assim, Cai e Lester (2010), English et al. (2008), e Lesh e Zawojewski (2007) defendem também que a resolução de problemas não pode ser um tópico separado e o seu estudo tem de acontecer no contexto da aprendizagem da matemática. A investigação deve centrar-se nas representações, interpretações e reflexões dos alunos, em conjunto com os cálculos necessários, os processos de raciocínio dedutivo usados, as regras e procedimentos que aprendem a executar. Esta ênfase nas relações entre a aprendizagem e a resolução de problemas configura uma visão associada aos modelos e à modelação, onde uma situação problemática é interpretada matematicamente, e essa interpretação é um modelo matemático. Surge deste modo a necessidade de uma nova definição de problema e resolução de problemas envolvendo o desenvolvimento de modos úteis de pensar matematicamente acerca de relações, padrões e regularidades, que não separe a resolução de problemas do desenvolvimento de conceitos e dos modos como esses conceitos são usados em situações reais para além da escola. Apresenta-se, neste contexto, a definição de problema de Lesh e Zawojewski (2007): *Uma tarefa transforma-se num problema quando o resolvedor (que pode ser um painel de especialistas) tem de desenvolver um modo mais produtivo de pensar acerca da situação dada* (p. 782). Para isso, terá de interpretar a situação matematicamente, o que normalmente envolve ciclos iterativos de descrição, teste e revisão de interpretações matemáticas, bem como identificação, integração, modificação ou refinamento de conjuntos de conceitos matemáticos decorrentes de fontes variadas. Estes processos são a base da modelação matemática. Esta visão da resolução de problemas numa perspetiva de modelação contrasta com a visão tradicional, tal como foi apresentada acima, de procurar um caminho que conduza dos dados aos objetivos. Nesta nova aceção a resolução de problemas envolve ciclos iterativos de compreensão dos dados e dos objetivos.

Esta é uma perspetiva interessante em particular para níveis de escolaridade mais avançados, pois aplica-se certamente de modo mais natural ao ensino e aprendizagem em níveis intermédios ou elevados, mas para os níveis mais elementares os modelos matemáticos a que se recorre estão muito próximos das estratégias de resolução de problemas propostos por Polya e seguidores. De facto, as crianças pequenas não dispõem ainda de ferramentas matemáticas que lhes permitam criar modelos ou então teremos de aceitar modelos muito incipientes, que não comportam as caraterísticas acima descritas. Deste modo, é-nos difícil aceitar a universalidade desta perspetiva da resolução de problemas.

Mais adaptada aos primeiros anos do ensino básico está porventura a caraterização de Rivera (2014) de contextos em que a resolução de problemas pode surgir, também abraçando a contribuição da modelação: (a) situações autenticamente reais, em que a matemática emerge naturalmente do contexto de experiências do dia-a-dia; (b) situações concetualmente reais, em que a matemática emerge de cenários que dificilmente poderiam ser modelados em tempo real mas que contêm ainda assim informação suficiente de modo a permitir aos alunos executar mentalmente as ações relevantes; (c) situações simuladas, em que a matemática emerge de situações modeladas tecnologicamente, ou porque são inacessíveis fisicamente, ou porque não podem ser realizadas na sala de aula ou ainda por se considerar que ilustram convenientemente um objetivo de ensino; e (d) situações sem contexto, em que a matemática emerge de tarefas que consistem em símbolos que os alunos manipulam de acordo com regras ou princípios bem definidos.

Embora concordando que a resolução de problemas é uma via privilegiada para a aprendizagem da matemática, reconhecemos que a definição da aprendizagem através da resolução de problemas parece ser em determinadas circunstâncias excessiva. Mesmo os autores que defendem um ensino através da resolução de problemas são de opinião que nem todas as tarefas propostas têm de ser problemáticas (Cai & Lester, 2010). Há momentos na aprendizagem da matemática para desenvolver certas destrezas, que envolvem a resolução de exercícios de treino. Também consideramos que esta situação é real e sabemos que os professores se confrontam com ela diariamente. Sem algum treino não é possível adquirir destreza de procedimentos de rotina, que é necessária mesmo para resolver problemas complexos.

Deste modo, e depois desta breve incursão por diferentes modos de encarar a resolução de problemas e as suas ligações com a aprendizagem da matemática, propomos a expressão, talvez mais consentânea com a prática, de *ensino com resolução de problemas*, querendo significar com a expressão que defendemos que a resolução de problemas deve acompanhar em paralelo o currículo e a prática de sala de aula, a par de outras tarefas mais procedimentais, desenvolvendo a compreensão dos conceitos e da estrutura matemática, e levar os alunos a ir progressivamente adquirindo um rol de estratégias úteis e produtivas noutras abordagens.

Da resolução à formulação de problemas

A par da resolução de problemas também a formulação de problemas tem sido identificada como tema central na investigação em educação matemática. Pode ler-se uma recomendação clara nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) da inclusão e integração destes dois tipos de atividade nas propostas de sala de aula, motivando os alunos a formular os seus problemas para além de resolverem problemas apresentados pelo professor.

É inegável que o desenvolvimento da capacidade de formular problemas é pelo menos tão importante como o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, podendo mesmo assumir-se que a formulação é uma componente indissociável da resolução. English (1997) refere que existe uma relação próxima entre os processos de resolução e formulação de problemas e que o segundo depende fortemente do primeiro, uma vez que para criar problemas matematicamente significativos é necessário ser competente na resolução de problemas. Por outro lado, a formulação de problemas pode ser um meio poderoso para que os alunos desenvolvam competências de resolução de problemas e se tornem bons resolvedores. O professor pode usar uma ou mais estratégias para formular novos problemas ou encorajar os alunos nas aulas de matemática a tornarem-se competentes na formulação e resolução de problemas. Estas estratégias podem depender de múltiplos fatores, entre eles, os conteúdos matemáticos, o nível de conhecimento dos alunos, a avaliação ou o tipo de raciocínio que se pretende promover.

Acresce que a formulação de problemas contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da estrutura matemática subjacente, desenvolvendo, simultaneamente, o pensamento crítico e capacidades de raciocínio, aprendendo a exprimir as suas ideias de modo mais preciso.

A definição de formulação de problemas tem sido abordada por vários investigadores, permitindo aceder desta forma a diferentes perspetivas. Por exemplo, para Silver (1994) corresponde à criação de um problema novo ou então à reformulação de determinados problemas já apresentados aos estudantes. Neste sentido, a formulação pode ocorrer antes da resolução de um problema (quando se cria um problema tendo apenas por base uma experiência ou situação), durante a resolução de problemas (alterando intencionalmente as condições ou dados de um problema) ou depois da resolução de um determinado problema (implica a análise das condições desse problema por forma a gerar situações novas, facto que se associa à fase de verificação dos dados proposta por Polya). Para English (1997) a formulação de problemas envolve a criação de novos problemas e questões com a intenção de explorar uma dada situação, mas pode também implicar a reformulação de um problema durante o seu processo de resolução. Segundo esta autora, esta estratégia fornece aos professores importante *insight* acerca de como os estudantes compreendem os conceitos e os processos matemáticos, bem como das suas perceções a respeito das atividades desenvolvidas, das suas atitudes em relação à Matemática e sobre a sua capacidade criativa nessa área. A definição apresentada por Stoyanova (1998) faz referência a um processo através do qual os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e estruturam-nas sob a forma de problemas matemáticos significativos, tendo por base as suas experiências prévias.

Stoyanova (1998) identificou três categorias de formulação de problemas, alertando para a importância destas experiências para os alunos, considerando-as como oportunidades de promover atividade matemática significativa, no contexto da criação e resolução de problemas: (1) situações livres — os alunos formulam problemas sem qualquer restrição; (2) situações semi-estruturadas — os alunos formulam problemas similares a outros que conhecem ou então tendo por base figuras ou diagramas; (3) e situações estruturadas — os alunos criam problemas através da reformulação de problemas já resolvidos ou então através da alteração de condições ou questões de uma situação problemática conhecida. Brown e Walter (2005) realçam duas estratégias de formulação de problemas que podem ser usadas pelos alunos. Uma delas é designada por *Aceitando os dados* e é usada quando os alunos partem de uma situação estática, como uma expressão, uma tabela, uma condição, uma figura, um diagrama, uma frase, um cálculo ou um simples conjunto de dados, a partir da qual colocam questões de modo a inventar um problema sem alterar a situação de partida. A outra estratégia consiste em estender uma dada tarefa através da alteração do que é dado e designa-se por *E se em vez de*. Considerando a informação apresentada num problema em particular, identifica-se o que se pretende saber, o que é conhecido e as condições. Ao modificar um ou mais destes aspetos podem ser geradas novas questões, logo novos problemas. Esta estratégia de formulação de problemas envolve ainda a possibilidade de manter a estratégia de resolução criando novo contexto problemático que a utilize.

Apesar do interesse declarado na formulação de problemas (*e.g.* Polya, 1945; Silver, 1994), esta tem sido uma componente negligenciada na aula de matemática; no entanto é crucial para a aprendizagem. Contextos em que os alunos tenham a oportunidade de resolver problemas, usando diferentes estratégias, mas também formular problemas, permite que se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas.

O *procurar ver* como estratégia de resolução de problemas e suas ligações com a criatividade

A análise acima realizada e a nossa experiência na abordagem da resolução de problemas, quer ao nível do ensino quer na formação de professores, sustentam a nossa visão e convicção de que o ensino de estratégias tem potencialidades, embora, como vimos, haja vários autores contrários a essa ideia. Há no entanto outros que argumentam a seu favor (*e.g.* Hatfield, Edwards, Bitter & Morrow, 2007; Schoenfeld, 1985). O nosso trabalho tem evidenciado, em particular, que a aquisição progressiva, pelos alunos, de um reportório de estratégias, pode ter impacto positivo no desenvolvimento de características da criatividade em matemática (*e.g.* Barbosa & Vale, 2014; Pinheiro, 2013; Vieira, 2012), aspeto que abordaremos à frente.

Como já foi referido, na visão de Schoenfeld (1992) as heurísticas de Polya não produziram os resultados esperados como auxiliares da resolução de problemas por serem demasiado genéricas, preconizando este autor a necessidade de desenvolver nos alunos um maior número de estratégias mais específicas, mais ligadas a determinadas categorias de problemas. Ora existe um conjunto de problemas, normalmente de natureza ou contexto visual, que têm grande potencial para resoluções visuais. Propomos para esses problemas, na linha de Schoenfeld, a utilização de uma estratégia complementar e específica, que denominamos *procurar ver*. Esta envolve uma actividade que pode associar-se ao leque mais tradicional de estratégias (*e.g.* fazer um desenho, reduzir a um problema mais simples, descobrir um padrão). A estratégia *procurar ver* não substitui nenhuma outra, é antes um modo de abordagem que nem sempre é incentivado e que pode ser muito produtivo. Com vista à sua apropriação pelos alunos, defendemos, não um ensino prescritivo de estratégias, mas a sua análise de modo natural em sala de aula, e sempre que se proporcione, quer pelo professor quer através da partilha de estratégias usadas pelos colegas. E neste domínio verifica-se que nem sempre se privilegia nas aulas de matemática o recurso a estratégias visuais (Barbosa & Vale, 2014; Stein & Lane, 1996; Vale & Pimentel, 2013).

Em que consiste esta atividade? De acordo com Zimmermann e Cunningham (1991) a visualização é o processo de formar imagens (mentalmente, com papel e lápis ou com apoio da tecnologia) e usar tais imagens eficazmente na descoberta e compreensão matemática. Na mesma linha está Presmeg (2014) quando refere a utilidade de meios visuais de resolução de problemas, incluindo não só registos sob a forma de imagem, mas também representações espaciais mais abstractas, envolvendo gráficos e padrões. De acordo com Fujita e Jones (2002) é essencial ter *olho geométrico* — o poder de ver propriedades geométricas a separar-se de uma figura — ferramenta essencial para a construção da intuição geométrica. Este poder é desenvolvido com a realização de tarefas práticas tais como desenhar e fazer medições em figuras geométricas. Por outro lado, a intuição geométrica ou espacial é poderosa não só em temas geométricos mas noutros que o não são. A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações produzindo assim o corte em fixações mentais que possibilita o pensamento criativo (Haylock, 1987). No campo da matemática, tem-se argumentado que o uso de imagens visuais pode ser uma ajuda importante para todos os tipos de problemas, incluindo problemas em que a componente visual não é evidente (*e.g.* Polya, 1945; Zimmerman & Cunningham, 1991). A literatura refere que a atividade de “ver” não é um processo evidente e inato, mas algo que se pode criar, desenvolver, aprender e ensinar (*e.g.* Whiteley, 2004).

Alguns estudos têm mostrado que, em resolução de problemas, há alunos que preferem usar estratégias visuais enquanto outros preferem abordagens de natureza mais verbal ou analítica (Lowrie, 2001). Apesar de alguns autores apresentarem resultados sobre a relutância dos alunos na utilização de estratégias visuais para resolverem problemas em matemática (*e.g.* Eisenberg, 1994; Lowrie, 2001) há investigação que mostra o contrário, fornecendo larga evidência de que para alguns alunos — os *visuais* — não há outro modo de pensar (Presmeg, 2006). Na nossa experiência, sobretudo no trabalho realizado no tema padrões (*e.g.* Barbosa & Vale, 2014; Vale & Pimentel, 2010) identificamos igualmente alunos *visuais*, mas também constatamos que este modo de pensar é passível de ser ensinado. Os professores devem propor tarefas adequadas que incentivem os alunos a procurar modos de resolução diferentes, particularmente quando as tarefas são novas ou complexas.

Consideramos que a aquisição de um reportório de estratégias viáveis — e já anteriormente conhecidas e aplicadas — constitui um corpo de conhecimento em ação que:

(a) ajuda os alunos a abordar o problema e a descobrir um caminho; (b) pode ser uma alternativa ao uso direto de conceitos que o aluno não possui ou não estão acessíveis; e (c) facilita muitas vezes a interpretação das situações. Além disso, o envolvimento dos alunos em resolução de problemas procurando vários modos de resolução permite-lhes compreender que um problema pode ser abordado de muitos modos diferentes e com a utilização de várias estratégias, conduzindo a soluções criativas.

Na verdade, a investigação tem evidenciado que a resolução e formulação de problemas estão intimamente relacionadas com a criatividade (*e.g.* Kattou & Christou, 2013; Leikin, 2009; Pehkonen, 1997; Silver, 1997). Por forma a promover as dimensões associadas à criatividade matemática (flexibilidade, fluência e originalidade) as tarefas propostas devem ser abertas e pouco estruturadas, assumindo a forma de resolução de problemas, formulação de problemas, explorações e investigações matemáticas. De facto, a criatividade tem sido associada a novas produções mas também à resolução de problemas pouco estruturados, daí esta relação com a formulação e a resolução problemas ser evidente.

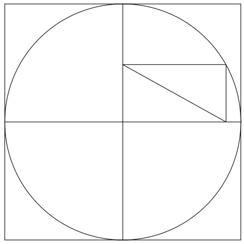
Um dos contextos em que o pensamento criativo tem um papel crucial é o da resolução de problemas, em particular problemas não rotineiros. Pode assumir-se que as tarefas que possibilitam múltiplas resoluções, o recurso a diferentes representações e envolvem diferentes propriedades de um conceito matemático, são aquelas que têm um maior potencial criativo (*e.g.* Leikin, 2009; Vale, Barbosa & Pimentel, 2014).

A formulação de problemas tem sido perspetivada como uma componente da atividade criativa, parecendo ser um meio eficaz para os alunos expressarem a sua criatividade e integrarem as suas aprendizagens (*e.g.* Brown & Walter, 2005; Kilpatrick, 1987). Para além disso, normalmente permite que os alunos apresentem níveis mais reduzidos de ansiedade relativamente à aprendizagem da matemática (Brown & Walter, 2005). English (1997) refere que as tarefas de formulação de problemas têm o potencial de ajudar os alunos a serem criativos, a pensarem de forma divergente e a serem flexíveis no seu raciocínio. Todas estas observações sugerem que a emergência da criatividade se relaciona não de forma individual com a resolução ou a formulação de problemas mas na ação combinada entre os dois processos. É nesta interação entre a formulação, a tentativa de resolução e eventualmente a reformulação que se revela o pensamento criativo (Silver, 1997).

E aqui encontramo-nos na confluência de duas linhas de raciocínio: a estratégia *procurar ver* e o desenvolvimento da criatividade. Procuraremos de seguida explicitar o nosso ponto de vista. A visualização pode suscitar o desenvolvimento da intuição e a capacidade de ver novas relações produzindo assim o corte com fixações mentais que possibilita o pensamento criativo. A flexibilidade, uma das caraterísticas da criatividade, é o oposto da fixação (Haylock, 1997). Ben-Zeev e Star (2001) entendem a intuição, o *insight*, uma experiência "aha!", como a compreensão súbita de qualquer coisa, depois de um período a tentar, sem sucesso, resolver um problema. Pode dizer-se que o pensamento visual está associado à intuição, à capacidade de inventar e ao pensamento divergente, características essenciais ao pensamento criativo. Contudo, nem sempre uma resolução visual é o método mais fácil, direto e compreensível; pode ser até muito complexa (Presmeg, 2014).

No ponto de vista de alguns autores (*e.g.* Hartmann, 1935; Wertheimer, 1959) aprender é equivalente ao processo de adquirir intuição (*insight*), isto é, aprender é o processo de estabelecer novas relações num todo. Vejamos o exemplo seguinte:

Considere a circunferência inscrita no quadrado.
O retângulo desenhado tem de diagonal 10 cm.
Determine o lado do quadrado.



A solução para este problema depende de se encontrar a relação entre o lado do quadrado e o raio da circunferência, que só acontece a partir do momento em que ocorre a intuição. Neste caso é necessário desenhar a diagonal do retângulo numa posição tal que a identifique com o raio da circunferência (Figura 1). Isto é, uma solução visual dinâmica é efetuar uma rotação da diagonal do retângulo de modo a coincidir com o raio da circunferência e posteriormente partir para o lado do quadrado.

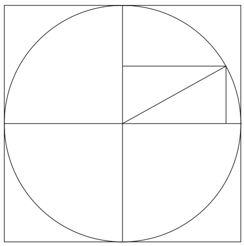
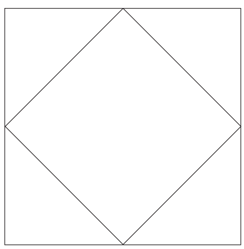


Figura 1. Solução visual

Neste caso, o raio já não é entendido apenas como parte da circunferência, mas também como parte do quadrado. Existe uma reestruturação do campo de trabalho e a intuição ocorre associada a esta reestruturação da perceção, que neste exemplo, e noutros, mostra a sua importância.

Outro exemplo, que ilustra a nossa tese, é o seguinte:

O quadrado maior tem área 1.
Qual é a área do quadrado interior?



Este é um problema em que muitos recorrem a fórmulas que envolvem vários cálculos, mas em que a intuição, a solução criativa, pode surgir e depois de descoberta revela-se muito mais simples e "evidente". A criatividade da solução manifesta-se no quebrar com o conjunto de conhecimentos instituídos (Haylock, 1997) como sejam as fórmulas e o modo rotineiro de resolução sugerido pela palavra área, e partir para outro processo mais dinâmico e útil, que evidencia que o quadrado interior tem metade da área do original, tal como se sugere na figura 2.

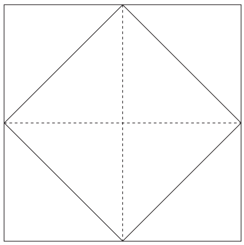


Figura 2. Solução visual

No primeiro exemplo, o uso da estratégia *procurar ver* tem dois efeitos: o primeiro, e imediato, é o de possibilitar uma resolução do problema, na qual esta estratégia é requerida; o segundo é o de promover o pensamento divergente e, desse modo, desenvolver a criatividade. No segundo exemplo, há ainda a acrescentar que a estratégia *procurar ver* não é imprescindível pois poderiam ter sido usadas estratégias mais tradicionais; no entanto, ao possibilitar uma resolução alternativa, torna a resolução do problema muito mais simples e, simultaneamente permite desenvolver a flexibilidade, uma das características da criatividade.

As duas situações apresentadas são problemas de natureza visual. No entanto, há outros que, sendo de natureza não visual, podem conduzir a resoluções visuais. Por exemplo:

A Joana gastou 4/7 do seu dinheiro num par de sapatos. Os sapatos custaram 68€ Que dinheiro tinha a Joana antes de comprar os sapatos?

Este problema suscita normalmente uma resolução de tipo numérico. Basta a identificação de um operador e o uso de conceitos conhecidos. No entanto, pode ser resolvido com recurso a uma estratégia.

Considere-se a seguinte representação:

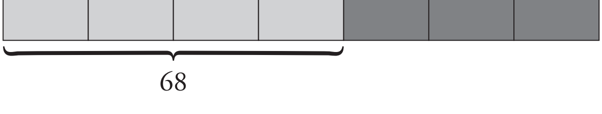


Figura 3. Solução visual

Da figura 3 conclui-se que cada uma das divisões da unidade corresponde a $68 : 4 = 17$ euros, o que significa que o total do dinheiro da Joana é, em euros, $7 \times 17 = 119$. Este é um problema simples, que pode ser abordado a partir do primeiro ciclo, e a estratégia torna o conteúdo matemático envolvido mais significativo, sendo particularmente útil quando os alunos ainda não dominam as operações com números racionais, que estão aqui em causa.

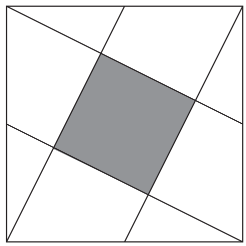
Procurámos ilustrar com os exemplos precedentes as ligações do tema da resolução de problemas com a criatividade, realçando a importância do conhecimento e utilização de uma estratégia complementar, *procurar ver*, quer na resolução de determinadas categorias de problemas, quer no desenvolvimento de caraterísticas da criatividade.

Alguns exemplos de sala de aula

Apresentamos alguns exemplos utilizados em trabalhos em curso no âmbito da formação inicial. Para além de se pretender ilustrar a utilização da estratégia *procurar ver*, estes problemas foram ainda escolhidos por suscitarem uma grande variedade de estratégias, promovendo algumas das dimensões da criatividade.

Exemplo 1:

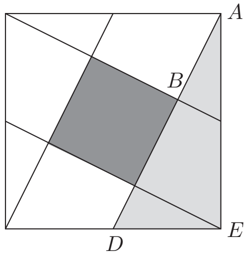
Desenhe um quadrado e una cada um dos vértices com
O ponto médio do lado oposto, como mostra a figura.
Qual é a área do quadrado azul?



Nas duas primeiras resoluções constata-se o uso de fórmulas para o cálculo de áreas, em conjugação com o Teorema de Pitágoras e conhecimentos relacionados com semelhança de triângulos. Aplicam-se de forma adequada conhecimentos matemáticos poderosos, mas são resoluções claramente mais trabalhosas, o que, além de tudo, poderá conduzir a erros de cálculo. Nas três últimas já há uma forte componente visual, um predomínio do estabelecimento de relações geométricas que não são tão óbvias. Este tipo de resolução também poderá beneficiar alunos com um conhecimento de conteúdo matemático pouco sustentado. Destaca-se entre este conjunto de resoluções a última, que apresenta uma solução visual elegante e original baseada nas transformações geométricas. Claro que, em qualquer das abordagens, haverá necessidade de justificar as opções e propriedades que se assumem, o que na maior parte dos trabalhos os alunos não conseguem efetuar de modo espontâneo e autónomo.

Verifica-se assim que se trata de um problema não rotineiro que proporciona múltiplas abordagens, visuais e não visuais, bem como a abordagem de diferentes conceitos matemáticos, e onde se destaca a importância da estratégia procurar ver.

Resolução 1:
Determinar o comprimento do lado do quadrado:



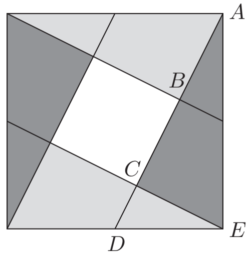
Pelo T. Pitágoras

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$$
$$\overline{AD}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A área de cada um dos triângulos $\Delta[AED]$ e o $\Delta[DCE]$ são semelhantes

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$
$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\overline{CE}} \qquad \frac{\overline{CD}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1}$$
$$\overline{CE} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \overline{CD} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$
$$\overline{CB} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore A_q = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

Resolução 2:
Determinar a área de cada um dos quatro triângulos retangulos iguais:



Pelo T. Pitágoras

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$$
$$\overline{AD}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\Delta[AED]$ e o $\Delta[DCE]$ são semelhantes

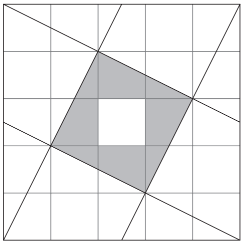
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$
$$\frac{\overline{CD}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1}$$
$$\overline{CD} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

A área de cada um dos triângulos

$$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$At = \frac{\overline{CE} \times \overline{AC}}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{5}$$
$$Aq = 1 - \left(4 \times \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

Figura 4. Diferentes resoluções do problema apresentado no exemplo 1

Resolução 3:

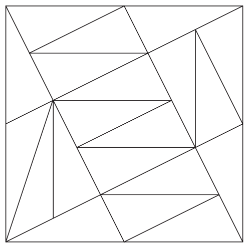


$A_Q = 25$

$A_q = 1 + 4\left(\frac{1}{2} \times 2\right) = 5$

$\frac{A_q}{A_Q} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

Resolução 4:
Há 20 triângulos congruentes



$\frac{A_q}{A_Q} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Resolução 5:
A figura obtida por rotação dos quatro triângulos permitem ver que área do quadrado pretendido é $\frac{1}{5}$ da área do quadrado.

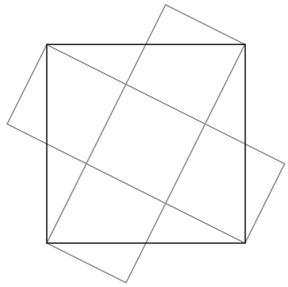


Figura 4 (cont.). Diferentes resoluções do problema apresentado no exemplo 1

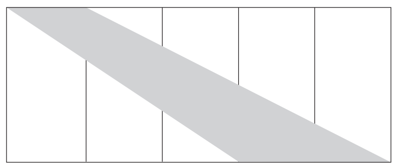
Exemplo 2:

Apresentam-se em seguida diferentes resoluções do problema anterior que serão posteriormente discutidas.

A figura mostra cinco retângulos, todos congruentes.

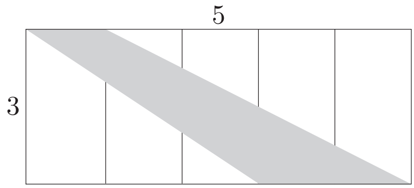
Os vértices do trapézio são vértices de um ou de dois retângulos.

Que percentagem de área da figura está sombreada?



Na figura 5 estão ilustradas diferentes resoluções do problema apresentado. Os quatro primeiros casos evidenciam o recurso a estratégias similares. Embora se considerem resoluções diferentes, todas incidem na aplicação de fórmulas de cálculo de áreas de figuras. A primeira situação é comum entre os alunos que sentem mais dificuldades em resolver problemas deste tipo sem apresentação de medidas. As três resoluções que se seguem, dentro deste grupo, já refletem a utilização de casos gerais recorrendo à decomposição (resolução 4) ou ao enquadramento de figuras (resoluções 2 e 3). As duas últimas situações podem também considerar-se similares, embora se possa afirmar que a última ilustra a aplicação de uma estratégia mais simples e intuitiva. Ambas têm por base a relação entre a área de um retângulo e de um triângulo com a mesma base e a mesma altura, no

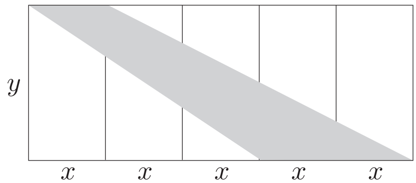
Resolução 1:



$$A = (5 \times 3) - \left(\frac{3 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3}{2}\right) = 4{,}5$$

$$\frac{A_t}{A_r} = \frac{4{,}5}{15} = 30\%$$

Resolução 2:



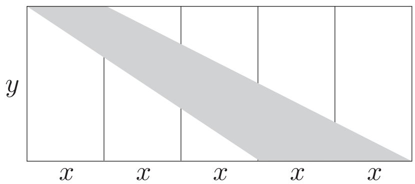
 $A = \dfrac{3xy}{2}$ $A = \dfrac{4xy}{2}$

$$A_t = 5xy - \left(\frac{3xy}{2} + \frac{4xy}{2}\right)$$

$$= 5xy - \frac{7xy}{2} = \frac{3xy}{2}$$

$$\frac{A_t}{A_r} = \frac{2}{5xy} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Resolução 3:

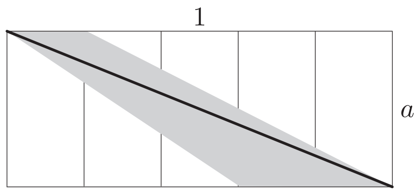


$$A_t = \frac{b + B}{2} \times a$$

$$\frac{A_t}{A_r} = \frac{2}{5xy} = \frac{3}{10} = 30\%$$

$$A_t = \frac{3xy}{2} \qquad \therefore \frac{\frac{3xy}{2}}{5xy} = \frac{3}{10} = 30\%$$

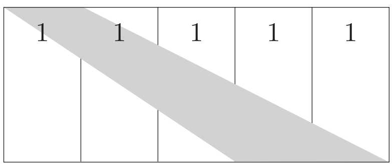
Resolução 4:
Dividir o trapézio em dois triângulos



$$A = \frac{\frac{2}{5} \times a}{2} + \frac{\frac{1}{5} \times a}{2} = \frac{3a}{10}$$

$$\frac{A_t}{A_r} = \frac{\frac{3a}{10}}{a} = \frac{3}{10} = 30\%$$

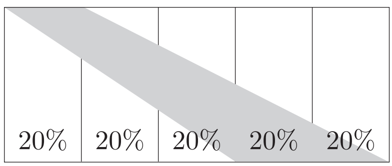
Resolução 5:



 $\dfrac{1}{2} \times 3 = 1{,}5$ $\dfrac{1}{2} \times 4 = 2$

$$A_t = 5 - 3{,}5 = 1{,}5 = \frac{15}{10} = 30\%$$

Resolução 6:



$$100\% - (40\% + 30\%) = 30\%$$

Figura 5. Diferentes resoluções do problema apresentando no exemplo 2 entanto na resolução 6 deduz-se diretamente através da visualização da percentagem solicitada, ou seja, a estratégia *procurar ver* é aplicada ao cálculo de percentagens com base nas relações existentes entre as figuras envolvidas. Como se pode constatar, este problema, para além de potenciar a utilização de diversas estratégias, permite abordar vários conteúdos (*e.g.* áreas, relações entre figuras, números racionais sob a forma de fração, percentagens) que poderão ser aprofundados pelo professor.

Nestes exemplos queremos realçar a força da estratégia *procurar ver* como sendo a que proporciona resoluções mais criativas e nestes casos muito mais simples. Problemas como os apresentados, que têm múltiplas resoluções, são os mais adequados para propor aos alunos. Na verdade, estes envolvem vários conteúdos e processos, mas de todas as estratégias possíveis há algumas claramente mais simples que envolvem o *ver* e o *aha!*. Aqui o papel do professor é fundamental: quando estas estratégias não aparecem naturalmente, é necessário o professor demonstrar esse modo de ver, por forma a aumentar o reportório de estratégias dos alunos (Arcavi, 1999). Neste sentido realça-se a importância de o professor poder mobilizar um conjunto alargado de tarefas que possa utilizar para esse efeito.

A concluir

No início deste artigo citamos opiniões de vários autores (*e.g.* English et al., 2008; Lesh & Zawojewski, 2007; Lester & Koele, 2003; Schoenfeld, 2013) que consideram que a investigação em resolução de problemas em matemática tem estado estagnada desde os finais dos anos 90 e princípios deste século. Ademais, que a investigação conduzida não parece ter permitido acumular um corpo de conhecimento eficiente sobre como promover eficazmente a resolução de problemas na e para além da sala de aula. Contudo, do nosso ponto de vista, além de a resolução de problemas ser historicamente um tema incontornável, ela continua ativa e presente na investigação, mas nos últimos anos houve uma evolução. A resolução de problemas vai muito para além das perspectivas apontadas nos primeiros tempos da sua investigação; surge integrada noutras componentes da educação, assumindo-se o seu enorme valor na aprendizagem da matemática. No nosso trabalho ela está presente: (a) no tema dos padrões, já que as tarefas de padrão são na realidade problemas que podem resolver-se com a estratégia de descoberta de um padrão; (b) no tema da criatividade, uma vez que esta se alimenta e desenvolve através da formulação e resolução de problemas; e (c) em experiências que temos conduzido de matemática para além da sala de aula, de que são exemplo os congressos matemáticos e os trilhos matemáticos, cuja base é, no primeiro caso, a resolução de problemas e no segundo, a formulação. Estas experiências didáticas poderão revitalizar a resolução de problemas no desenvolvimento curricular de matemática.

Apresentamos ao longo deste texto a nossa visão sobre a resolução de problemas, que inclui um ensino que providencie aos alunos um leque variado de estratégias e de problemas não rotineiros nos quais possam ser aplicadas essas estratégias. Por outro lado, realçamos a importância da formulação de problemas a par da resolução de problemas na criação de contextos cruciais para o desenvolvimento da criatividade. Valorizamos em particular a estratégia procurar ver, uma vez que a visualização pode constituir uma abordagem alternativa poderosa que aumenta a janela de possibilidades no que se refere à resolução de problemas, promovendo resoluções diferentes das mais tradicionais, contribuindo assim para o pensamento divergente.

Assim, defendemos que a resolução de problemas deve ser parte integrante do currículo de matemática, ajudando na compreensão de determinado conceito ou processo matemático que permita aos alunos pensar matematicamente, o que envolve criar e interpretar uma situação (descrever, explicar, comunicar) pelo menos tanto quanto envolve calcular, executar procedimentos e raciocinar dedutivamente (Lesh & Zawojewski, 2007). Deste modo entendemos que se ensine matemática com resolução de problemas.

Referências

Anderson, J. R., Boyle, C. B., & Reiser, B. J. (1985). Intelligent tutoring systems. *Science*, *228*, 456–462.

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. Retirado em 5 de março de 2015 de www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf

Barbosa, A. & Vale, I. (2014). The impact of visualization on functional reasoning: the ability to generalize. *RIPEM*, *4*(3), 29–44.

Ben-Zeev, T., & Star, J. (2001). Intuitive mathematics: Theoretical and educational implications. In B. Torff & R. J. Sternberg (Eds.), *Understanding and teaching the intuitive mind: Student and teacher learning* (pp. 29–56). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brown, S. & Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cai, J. & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? *Research Brief*, *14*, 1–6.

Charles, R. & Silver, E. (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston, VA: NCTM.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers, recuperado em 10 de março de 2013, de http://www.corestandards.org.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *26*(4), 109–113.

English, L.D. (1997). The development of 5th grade students problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 183–217.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *ICME, Topic Study Group 10, Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education* (pp 46–58).

Fujita, T. & Jones, K. (2002), The Bridge between Practical and Deductive Geometry: developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.384–391). UEA, UK.

Hartmann, G. (1935). *Gestalt psychology. A survey of facts and principles*. New York: Ronal Press Company.

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In L. Hatfield, & A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 21–42). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G. & Morrow, J. (2007). *Mathematics methods for elementary and middle school teachers* (6th ed.). USA: Allyn & Bacon.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. International Reviews on Mathematical Education, *Essence of Mathematics*, *29*(3), 68–74.

Kattou, M., & Christou, C. (2013). Investigating the effect of general creativity. Mathematical knowledge and intelligence on mathematical creativity. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3., pp. 137–144). Kiel, Germany: PME.

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might be in Mathematics Education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, and C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2–27). Montreal, Canada: PME.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763–804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition. Key influences on problem solving behaviour. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 75–88). New York: Springer-Verlag.

Lester, F. & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. A. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501–518). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lowrie, T. (2001). Influence of Visual Representations on Mathematical Problem Solving and Numeracy Performance. *Proceedings of 24th Annual MERGA Conference, Sydney* (pp. 354–361).

ME (1990). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 1º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação

ME (1991a). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 2º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. I.

ME (1991b). *Organização Curricular e Programas. Ensino Básico 3º Ciclo*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Ministério da Educação, vol. I.

ME (1997). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME (2013). *Programa e Metas curriculares de Matemática. Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

ME (2014). *Programa e Metas curriculares de Matemática A. Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position paper on basic mathematical skills*. Golden, CO: NSCM.

Pehkonen, E. (1997). The state-of-the-art in mathematical creativity. *ZDM*, *29*(3), 63–67.

Pinheiro, S. (2013). *A criatividade na resolução e formulação de problemas: Uma experiência didática numa turma de 5º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1966). On teaching problem solving. In *The Role of Axiomatics and Problem Solving in Mathematics*, Symposium Report of the Conference Board of the Mathematical Sciences, Boston (pp.123–129).

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 156–167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Rivera, F. (2014). *Teaching to the Math Common Core State Standards: Focus on Kindergarten to Grade 5*. Rotterdam: Sense Publishers.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). New York, NY: Macmillan Publishing Co.

Schoenfeld, A. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice, *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1–2), 9–34.

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75–80.

Sriraman, B. (2013). Why (yet) another issue on Problem Solving? (editorial), *The Mathematics Enthusiast*, Vol. 10, nos.1&2, pp. 1–2.

Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, *2*(1), 50–80.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). Edith Cowan University: MASTEC.

Vale, I., Barbosa, A. & Pimentel, T. (2014). Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In Carreira S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in mathematical problem solving* (pp. 335–336). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Vale, I. & Pimentel, T. (2010). From figural growing patterns to generalization: a path to algebraic thinking. In M.F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 241–248. Belo Horizonte, Brasil: PME.

Vale, I. & Pimentel, T. (2013). Raciocinar com padrões figurativos. In A. Domingos, I. Vale, M. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa & R. Ferreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático*, pp. 205–222. Penhas da Saúde: SPIEM.

Vieira, M. C. (2012). *A resolução de problemas e a criatividade em Matemática: Um estudo em contexto de educação pré-escolar*. Tese de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York: Harper & Row.

Whitley, W. (2004). Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program. Retirado em 23 de fevereiro de 2015 de http://www.math.yorku.ca/~whiteley/Visualization.pdf

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.

Resumo. Neste artigo pretende-se destacar o poder e a importância da resolução de problemas no ensino da matemática, realçando o potencial das (re)soluções visuais, sobretudo pela simplicidade e criatividade que estas propostas podem apresentar.

Neste sentido começa-se por apresentar uma visão global do que tem sido a abordagem em resolução de problemas, quer a nível da investigação realizada, quer a nível do currículo. De seguida são revisitados vários aspetos associados à resolução de problemas, confrontando a perspetiva de diferentes autores, tendo por base trabalhos realizados no âmbito desta temática. Posteriormente, e face a essa discussão, apresentam-se alguns contributos, ilustrados com exemplos, emergentes da abordagem da resolução de problemas no ensino e na formação de professores, que realçam a importância da estratégia complementar procurar ver, e as ligações da resolução de problemas com a criatividade.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Estratégias de resolução de problemas, Contextos visuais, Formulação de problemas, Criatividade.

Abstract. This paper aims to emphasize the power and importance of problem solving in mathematics education, enhancing the potential of visual (re)solutions, especially because of the simplicity and creativity that these proposals may present.

In this sense we begin by presenting an overview of the approach on problem solving, both in terms of research and at the curriculum level. Then several aspects associated with problem solving are revisited confronting the perspective of different authors, based on work carried out on this theme. Subsequently, and as a result of this discussion, we present some contributions, illustrated with examples, emerging from the approach to problem solving in teaching and teacher training, that highlight the importance of the complementary strategy seeing, and the links of problem solving with creativity.

Keywords: Problem solving, Problem solving strategies, Visual contexts, Problem posing, Creativity.

ISABEL VALE
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

TERESA PIMENTEL
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

ANA BARBOSA
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
anabarbosa@ese.ipvc.pt

(recebido em abril de 2015, aceite para publicação em outubro de 2015)