EIEM 2011

ACTAS

Maria Helena Martinho
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel do Vale
João Pedro da Ponte

7 e 8 de Maio de 2011
Póvoa de Varzim

EIEM 2011

Ensino e Aprendizagem da Álgebra

Encontro de Investigação em Educação Matemática

Póvoa de Varzim, 7-8 Maio 2011

Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira
Isabel Vale, João Pedro da Ponte (Eds.)

Póvoa de Varzim
7-8 Maio, 2011

Conteúdo

Prefácio

O Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM) é um evento anual, de carácter temático, que se realizou, em 2011, no *Axis Vermar Conference & Beach Hotel*, na Póvoa de Varzim, a 7 e 8 de Maio e cujo tema foi "O ensino e a aprendizagem da Álgebra´´.

O EIEM 2011 teve como propósito principal reflectir sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, em todos os níveis de ensino desde o básico ao secundário, assim como sobre a formação e desenvolvimento profissional de professores. Para isso, procurou partilhar resultados de investigação, analisar os seus fundamentos, identificar desafios e novos rumos, de modo a perspectivar e promover futuras investigações bem como uma maior ligação com o terreno da prática profissional e da formação de professores.

Reunindo investigadores nacionais e estrangeiros, o programa do EIEM 2011 contou com três conferências plenárias a cargo de quatro oradores convidados. Na primeira conferência, *Teresa Pimentel* (Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo) aborda a influência das dinâmicas de um programa de formação contínua no desenvolvimento do pensamento algébrico de professores do 1º ciclo do Ensino Básico. Na segunda conferência, *Marta Molina* (Universidad de Granada, Espanha) descreve uma experiência de ensino focada no desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Finalmente, na última conferência, *João Pedro da Ponte* e *Hélia Oliveira* (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa) reflectem sobre os estudos de investigação que têm sido realizados na Universidade de Lisboa, nos últimos cinco anos, sobre a temática central do EIEM 2011: o ensino-aprendizagem da Álgebra.

As comunicações apresentadas no EIEM 2011 foram organizadas em três grupos de discussão subordinados a outros tantos aspectos relacionados com o tema central do encontro: (1) *Tecnologia e Avaliação do Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, grupo dinamizado por Joana Brocardo e António Domingos, com seis comunicações; (2) *Representações no Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, dinamizado por João Pedro da Ponte e Maria Helena Martinho, com sete comunicações; e (3) *Gestão Curricular no Ensino-Aprendizagem da Álgebra*, dinamizado por Isabel Vale e Rosa Antónia Tomás Ferreira e igualmente com sete comunicações.

Todas as comunicações apresentadas foram submetidas a um processo de revisão, liderado pelos dinamizadores de cada grupo de discussão (dois dinamizadores por grupo) e com a colaboração de trinta e cinco revisores. A procura de qualidade nas comunicações apresentadas através do processo de revisão e, sobretudo, a discussão gerada durante o EIEM 2011 constituem as mais-valias deste encontro temático. De facto, a reflexão realizada por um conjunto alargado de investigadores em Educação Matemática, formadores de professores e professores dos diversos níveis de ensino interessados na investigação centrada num tema específico, constitui uma forma eficaz de produzir conhecimento neste campo de investigação, robustecendo os trabalhos já realizados e problematizando novos aspectos relevantes para investigação futura.

Póvoa de Varzim, 8 de Maio de 2011
Os Organizadores

Organização

Título
Ensino e Aprendizagem da Álgebra
Encontro de Investigação em Educação Matemática 2011

Organização
Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Isabel Vale e João Pedro da Ponte

ISBN 978-972-8746-98-8

Corpo de Revisores

Ana Barbosa
Ana Paula Canavarro
António Guerreiro
Carlos Miguel Ribeiro
Daniela Nogueira
Helena Rocha
Henrique Guimarães
Isabel Vale
Joana Brocardo
João Pedro da Ponte
Laura Bandarra
Maria Helena Martinho
Maria Luísa Vale
Maria Teresa Grossmann
Mário Ceia
Nélia Amado
Rosa Antónia Tomás Ferreira
Susana Carreira
Ana Patrícia Gafanhoto
António Domingos
Carla Martinho
Célia Mestre
Floriano Viseu
Hélia Oliveira
Isabel Cabrita
Isabel Velez
Joana Mata Pereira
José Duarte
Leonor Santos
Maria Luísa Almeida
Maria Paula Teixeira
Marisa Quaresma
Miguel Silva
Neusa Branco
Sandra Nobre

Apoios

Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho
Centro de Matemática da Universidade do Porto
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Fundação para a Ciência e a Tecnologia

GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES EM CONTEXTOS VISUAIS: UM ESTUDO NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo

Esta comunicação pretende descrever um estudo realizado com alunos do 6.º ano, centrado na resolução de problemas que envolvem a exploração de padrões em contextos visuais. Procurou-se conhecer as estratégias de generalização usadas pelos alunos, as dificuldades que emergem do seu trabalho, bem como perceber o papel da visualização no seu raciocínio. Tendo em conta as características do estudo optou-se por um *design* de estudo de caso qualitativo. São apresentados alguns resultados decorrentes da implementação de duas tarefas com dois pares de alunos que foram acompanhados de forma mais detalhada. Globalmente, estes resultados revelam que: os alunos usam diversas estratégias de generalização; aplicam estratégias desadequadas quando limitam o seu trabalho ao plano numérico; as abordagens de natureza visual são normalmente facilitadoras do raciocínio permitindo a atribuição de significado às variáveis manipuladas.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Padrões, Generalização, Visualização.

Introdução

Os objectivos traçados para a matemática escolar têm vindo a alterar-se nas últimas décadas, de forma a acompanhar a evolução e as necessidades da sociedade. Uma matemática centrada na resolução de tarefas rotineiras além de não responder às exigências colocadas actualmente ao sistema de ensino, não contribui para uma melhor compreensão do que é a matemática e do que significa *fazer* matemática. É neste sentido que, desde os anos oitenta, a resolução de problemas tem vindo a assumir um papel fundamental na matemática escolar considerando-se que a exploração de tarefas desta natureza envolve os alunos em momentos genuínos de actividade matemática. Nas actuais orientações curriculares uma das principais finalidades do ensino da matemática é o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, no entanto os resultados evidenciados pelos nossos alunos, neste âmbito, não têm sido animadores. Este insucesso poderá estar relacionado com a sobrevalorização do domínio de

EIEM 2011 - *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, pp. 327–345

procedimentos e algoritmos e uma experiência reduzida com tarefas que envolvem o raciocínio e a resolução de problemas não rotineiros na aula de matemática.

As tarefas que têm subjacente a exploração de padrões podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades próprias da resolução de problemas, já que implicam a análise de casos particulares, a organização de informação de forma sistemática, o estabelecimento de conjecturas e a generalização de resultados. A relevância deste tema é salientada em muitos documentos curriculares, como é o caso dos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) onde se verifica que os padrões, sejam eles de tipo numérico, geométrico ou pictórico, constituem um tema com grandes potencialidades. Este documento defende que os programas de Matemática devem contemplar, desde o ensino pré-escolar até ao ensino secundário, tarefas que envolvam a compreensão de padrões, relações e funções, contribuindo desta forma para mobilização de capacidades de ordem superior, como o raciocínio e a comunicação, que possibilitam um aprendizagem mais significativa da Matemática.

Simultaneamente, tem-se registado nos últimos anos uma tendência de revalorização da Geometria no currículo de Matemática. As ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas, em diferentes áreas da matemática e em contexto real, o que fundamenta esta perspectiva. Há também um forte consenso de que a geometria é uma fonte de problemas não rotineiros que podem propiciar o desenvolvimento de capacidades como a visualização espacial, o raciocínio e a argumentação. A visualização em particular tem sido desde sempre uma componente importante do raciocínio dos matemáticos mas nem sempre lhe é atribuído um papel de destaque nas experiências matemáticas dos alunos (e.g. Healy & Hoyles, 1996; Presmeg, 2006). Segundo Vale e Pimentel (2005), no nosso ensino é dada especial importância aos aspectos numéricos e algébricos remetendo alguns alunos, possuidores de maiores capacidades no domínio visual, para situações de insucesso escolar e impedindo outros, com menores capacidades nesta área, de se desenvolverem harmoniosamente. As representações de natureza visual constituem um contributo incontornável para a resolução de problemas, actuando como um elemento facilitador na compreensão das situações propostas e inspirando descobertas criativas. Devem ser criadas oportunidades para que os alunos analisem abordagens de natureza diferente, visuais e não visuais, desenvolvendo um raciocínio mais flexível. A relevância da visualização e das representações visuais está a ser reconhecida por muitos educadores matemáticos mas a investigação acerca do papel das imagens mentais na aprendizagem de conceitos matemáticos e na resolução de problemas é ainda insuficiente.

Tendo por base as ideias explicitadas anteriormente, neste estudo procura-se compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais, tendo por base os seguintes objectivos: (i) caracterizar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos; (ii) conhecer as dificuldades que emergem do seu trabalho; e (iii) perceber qual o papel da visualização no desempenho dos alunos.

Enquadramento teórico

Desde sempre, matemáticos e educadores têm partilhado uma visão entusiástica no que respeita à importância do estudo de padrões, referindo que constituem a essência de todo o trabalho em matemática (e.g. Davis & Hersch, 1995; Devlin, 2002; NCTM, 2000). Muitos autores definem matemática como a ciência dos padrões (e.g. Devlin, 2002; Steen, 1988), deixando transparecer a ideia de transversalidade, considerando-os como uma qualidade que define a matemática mais do que um tópico que a integra. A ênfase na identificação de regularidades é cada vez mais frequente nas recentes abordagens ao estudo da álgebra, tendo em consideração que a procura de padrões constitui um passo fundamental para o estabelecimento de generalizações. O estudo de regularidades em diferentes contextos, a utilização de símbolos e variáveis que representam padrões e a generalização constituem componentes importantes do currículo de vários países, incluindo o nosso. As orientações curriculares nacionais para o ensino básico sublinham a importância do desenvolvimento de competências como a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos e geométricos, bem como raciocinar matematicamente explorando situações problemáticas, procurando regularidades, fazendo e testando conjecturas e formulando generalizações (DEB, 2001; ME-DGIDC, 2007). Este tipo de tarefas propicia o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o pensamento algébrico que servem de suporte ao raciocínio matemático, permitindo aos alunos ir além das meras competências de cálculo.

A generalização de padrões implica a utilização de uma estratégia, um modo de acção, no entanto há uma grande diversidade de abordagens que possibilitam aos alunos generalizar. Têm sido desenvolvidos vários estudos com o intuito de compreender e classificar as estratégias evidenciadas por alunos, de diversos níveis de ensino, quando resolvem problemas com padrões, em diferentes contextos. A análise das categorias propostas por alguns investigadores (Lannin et al, 2006; Orton, 1999; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989) conduziu à construção da seguinte categorização (Barbosa, 2010):

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como factor multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente correspondente.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Figura 1. Categorização das estratégias de generalização.

Há alguns factores que podem ter um impacto significativo na escolha das estratégias usadas na generalização. Lannin, Barker e Townsend (2006) identificaram três categorias alargadas que podem permitir prever a selecção de estratégias por parte dos alunos: (1) *factores sociais*, resultantes das interacções do aluno com os seus pares e com o professor; (2) *factores cognitivos*, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu; e (3) *factores associados à estrutura da tarefa*, como a estrutura matemática do padrão, os valores atribuídos à variável independente e a capacidade de visualizar.

Lannin, Barker e Townsend (2006) concluíram que, quando os valores de partida são próximos, os alunos tendem a usar regras recursivas e optam por aplicar a estratégia *termo unidade* quando esses valores são múltiplos de termos conhecidos da sequência. A utilização de valores distantes pode encorajar os alunos a aplicar estratégias de natureza explícita. A aplicação indevida da proporcionalidade directa tem sido mencionada em vários estudos (e.g. Rivera & Becker, 2008; Lannin et al, 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999) e normalmente é associada a duas situações: a utilização de uma abordagem estritamente numérica, onde a manipulação das variáveis é feita sem significado; e a generalização de múltiplos de termos conhecidos da sequência. O raciocínio de natureza recursiva está inevitavelmente associado a tarefas que envolvem a exploração de padrões e há uma clara tendência dos alunos para a fixação por este método (Orton, 1999), no entanto estratégias deste tipo apresentam limitações no que concerne à generalização distante pois não promovem a descoberta de uma relação funcional. O foco nos aspectos numéricos do padrão, mesmo quando apresentado em contexto visual, é muitas vezes um entrave à generalização. Neste sentido, Mason (1996) sugere que sejam dadas oportunidades aos alunos para explorar diversos tipos de padrões sendo utilizada a visualização e a manipulação de figuras para facilitar a generalização.

As tarefas que envolvem o estudo de padrões podem ser propostas em diversos contextos, visuais e não visuais, e dar lugar a diferentes abordagens. Segundo Gardner (1993) alguns alunos reconhecem as regularidades visualmente, enquanto outros as detectam analiticamente. Esta dualidade tem gerado muita controvérsia. Apesar de muitos investigadores reconhecerem a relevância do papel da visualização na resolução de problemas (e.g. Presmeg, 2006; Shama & Dreyfus, 1994) outros referem que o pensamento visual é uma fonte poderosa de ideias mas constitui apenas um complemento ao pensamento analítico (Goldenberg, 1996; Tall, 1991). Embora diferentes, estas perspectivas salientam a importância do desenvolvimento e da mobilização de capacidades de natureza visual, enriquecendo as experiências matemáticas dos alunos. Por outro lado, o professor deve ter em consideração que há muitas formas de *ver* uma figura conduzindo a diferentes interpretações. Duval (1998) sublinha que uma figura por ser apreendida *perceptualmente*, quando é interpretada como um todo, ou *discursivamente*, se o indivíduo identifica a disposição espacial dos elementos que a compõem. Os alunos que são capazes de analisar de forma discursiva uma figura podem fazê-lo de diferentes modos condicionando a generalização: (1) ao identificarem conjuntos de elementos disjuntos que compõem a figura inicial formulam uma generalização *construtiva*; (2) se observarem subconfigurações que se sobrepõem, contando os mesmos elementos mais do que uma vez e subtraindo-os posteriormente, a generalização é de natureza *desconstrutiva* (Rivera & Becker, 2008).

Metodologia do estudo

Dada a natureza do problema proposto bem como das questões de investigação definidas, este estudo segue uma abordagem qualitativa, tendo-se optando por um *design* de estudo de caso. A investigação decorreu em duas turmas do 6º ano de escolaridade, de duas escolas do distrito de Viana do Castelo. Ao longo de um ano lectivo, foram acompanhados, a um nível mais aprofundado, dois pares de alunos em cada uma das turmas, constituindo quatro estudos de caso. Neste período de tempo, foram implementadas sete tarefas centradas na resolução de problemas de *generalização próxima* (para determinar o termo da sequência pedido é possível utilizar um desenho ou um método recursivo) e *generalização distante* (os métodos descritos anteriormente não se adequam à resolução deste tipo de questões sendo necessário descobrir uma expressão geral) que os alunos exploraram em pares, contemplando padrões lineares e não lineares. Os alunos envolvidos no estudo não tinham qualquer experiência com tarefas desta natureza. Os dados recolhidos são, essencialmente, de natureza descritiva resultantes da observação participante, entrevistas e análise de documentos. Cada uma das sessões foi videogravada para posterior visionamento e análise. Após a implementação de cada tarefa foram realizadas entrevistas semi-estruturadas aos alunos-caso, tendo sido audiogravadas e transcritas. Através das entrevistas procurou-se identificar e clarificar as dificuldades dos alunos bem como as estratégias de generalização utilizadas em cada uma das tarefas. Neste artigo é realizada a análise do trabalho de dois destes pares de alunos, Carla-Margarida e António-Daniel, na resolução de duas das tarefas implementadas.

O caso Carla e Margarida

No início do estudo a Carla tinha 11 anos. Ao longo do ano lectivo anterior, foi uma aluna constante tendo obtido sempre nível 4. É uma aluna bastante organizada e responsável nos trabalhos que realiza, procurando certificar-se da correcção das suas produções. A Margarida iniciou o 6.º ano de escolaridade com 10 anos de idade. É uma aluna com um aproveitamento inferior ao da colega. Apesar de ter concluído o 5.º ano com nível 3 foi revelando algumas dificuldades ao longo do ano lectivo. Tem alguns traços na sua personalidade semelhantes aos da colega, embora seja um pouco mais introvertida do que a Carla. Nas diversas tarefas exploradas ao longo do estudo, houve uma preocupação evidente por parte dos dois elementos do par em discutir possíveis abordagens de resolução e chegar a um consenso para posteriormente aplicarem a estratégia escolhida. Apesar de a Carla ter uma atitude mais interventiva, ambas revelaram interesse e motivação na exploração dos problemas, tendo efectivamente trabalhado de forma colaborativa.

Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A tarefa *Os lembretes da Joana* (Anexo 1) tem subjacente um padrão crescente do tipo *an+b*. Trata-se de um problema contextualizado, acompanhado da representação visual do 3.º termo da sequência, que integra questões de *generalização próxima* e *distante*.

A Carla e a Margarida começaram por representar um conjunto de 6 lembretes, para proceder à contagem dos *pioneses*. No entanto, em simultâneo, apresentaram o cálculo do número de *pioneses* utilizando uma estratégia recursiva, tendo identificado a diferença entre termos consecutivos e continuado a sequência até ao 6.º termo. Esta situação evidencia a necessidade de validarem o seu raciocínio por intermédio de cálculos, não reconhecendo essa função ao desenho, facto que foi confirmado posteriormente durante a entrevista com o par.

Na abordagem à segunda questão, sentiram que o desenho não seria uma estratégia útil, já que lhes tomaria muito tempo.

> *Investigadora:* Aqui (questão 2) já não fizeram um desenho. Porquê?
> *Carla:* Eram muitos!
> *Margarida:* Tínhamos que desenhar 35.

Optaram antes pela utilização de uma estratégia explícita, tendo por base a distribuição dos *pioneses* pelos lembretes. Através da utilização desta estratégia foram capazes de generalizar para um valor distante.

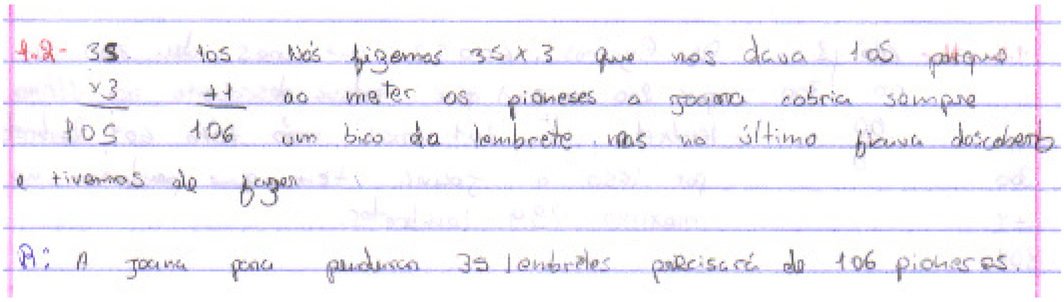

Figura 2. Resolução da questão 2 da Tarefa 1 - Carla e Margarida

Na resolução da última questão este grupo usou a estratégia D_3. Apesar de se tratar de uma generalização distante, recorreram a uma estratégia diferente da anterior. Esta mudança de abordagem poderá estar associada ao facto de nesta questão se promover a reversibilidade do pensamento, procurando-se estabelecer a relação inversa da que tinha sido considerada previamente. Recorreram à diferença entre termos consecutivos procedendo a um ajuste do resultado com base no contexto do problema.

> *Investigadora:* Agora têm 600 *pioneses* e querem saber quantos lembretes vão poder pendurar. Expliquem-me como pensaram.
>
> *Margarida e Carla:* 600 a dividir por 3…
>
> *Investigadora:* Fizeram grupinhos de 3?
>
> *Carla:* Porque cada um (lembrete) tem 3 *pioneses* e depois 1 no fim.
>
> *Investigadora:* Então conseguiram fazer 200 grupinhos de 3. Podem pendurar 200 lembretes, é isso?
>
> *Carla:* Mas um coisinho (refere-se a um *pionés*) ficou de fora.
>
> *Investigadora:* E onde o vamos buscar?
>
> *Margarida e Carla:* Não temos!
>
> *Carla:* Temos que tirar um cartaz! Ficamos com 199.

Conclui-se dos comentários das alunas que o contexto do problema foi crucial no seu raciocínio. Reconheceram o significado dos números que manipularam e a sua representatividade na situação proposta, tendo assim verificado a necessidade de proceder a um ajuste no cálculo efectuado previamente.

	Estratégias de generalização			
Questões	C	D_3	E	
1	X			Generalização Próxima
2			X	Generalização Distante
3		X		

Figura 3. Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 1.

A Figura 3 sintetiza o trabalho desenvolvido pelas alunas na exploração da tarefa *Os lembretes da Joana*. Não recorrem ao mesmo tipo de estratégias em questões de *generalização próxima* e *distante*. Há uma mudança de abordagem quando o nível de generalização se altera, recorrendo a estratégias como contagem, diferença e explícita. É de salientar a importância atribuída pelas alunas à apresentação de cálculos que, na sua opinião, constituem o método de validação das suas respostas. Mas, apesar da relevância atribuída ao contexto numérico é indubitável o papel fundamental da visualização em quase todas as suas estratégias: no caso da contagem, a acção é executada sobre a figura; nas estratégias explícita e diferença com ajuste, apresentam os cálculos tendo por base o contexto do problema. Destaca-se ainda que as generalizações formuladas pelas alunas ao longo da exploração da tarefa foram sempre de natureza construtiva.

Tarefa 2 – A Pizzaria Sole Mio

A tarefa *A Pizzaria Sole Mio* (Anexo 2) tem subjacente um padrão do mesmo tipo da Tarefa 1, sendo apresentadas as representações do 3.º e 4.º termos da sequência. Tal como a tarefa anterior contempla questões de generalização próxima e distante e foi implementada quatro meses depois.

Após a leitura da tarefa em grande grupo, a Carla e a Margarida estiveram algum tempo sem efectuar registos na sua folha de resposta. Em tarefas anteriores, iniciaram de imediato o seu trabalho, utilizando normalmente representações de natureza visual. Neste caso começaram por centrar a sua atenção no enunciado, enquanto discutiam entre si. A resposta à primeira questão explica este comportamento. Utilizaram uma estratégia explícita, mesmo perante uma questão de generalização próxima. Apresentaram o cálculo 2×10+2 e referiram que estavam "10 pessoas de cada lado da mesa e 2 na ponta". Apesar de não terem construído um modelo visual do 10.º termo da sequência, descobriram a regra, aplicada na resolução da questão *1*, através da observação das figuras apresentadas no enunciado da tarefa.

Na questão *2*, pedia-se o 31.º termo da sequência, promovendo deste modo a generalização distante. As alunas voltaram a recorrer a uma estratégia explícita, utilizando a regra identificada anteriormente, ajustada a um conjunto de 31 pizzas.

As maiores dificuldades sentidas por este par reflectiram-se na terceira questão da tarefa. Aqui pedia-se a ordem ocupada por um determinado termo, promovendo o raciocínio inverso do utilizado nas questões anteriores. As alunas mudaram de estratégia, tendo aplicado D_2. Como se tratava de um padrão linear impunha-se um ajuste do resultado, após o recurso a um múltiplo da diferença, condição que não cumpriram. Depois de efectuarem o cálculo 58÷2 e concluírem que teriam 29 pizzas, fizeram uma representação visual da situação, acompanhada dos valores encontrados. No entanto, o desenho não serviu para verificarem a validade do seu raciocínio, caso contrário teriam concluído que não estava correcto. Durante a entrevista, tentou-se compreender a forma como as alunas pensaram, mas também que reflectissem nos erros cometidos.

> *Carla:* Fizemos 58 a dividir por 2 para sabermos quantas pizzas eram.
>
> *Investigadora:* E porque é que fizeram esse cálculo?
>
> *Margarida:* Fizemos as pessoas todas a dividir por 2 filas e deu 29.
>
> *Investigadora:* E depois fizeram aqui um esquema ao lado. Porquê?
>
> *Margarida:* Era como as pizzas e as pessoas estavam na mesa.
>
> *Investigadora:* Então vamos pensar ao contrário. Usando estes valores que colocaram no esquema, quantas pessoas têm na mesa?
>
> *Carla:* Acho que dá 60 [depois de fazer os cálculos num papel].
>
> *Investigadora:* Mas não eram 58 pessoas?
>
> *Carla:* Temos mal.
>
> *Investigadora:* Têm mal?
>
> *Margarida:* É por causa das que estão nas pontas. Essas não contam para as pizzas.

Investigadora: Não contam?

Margarida: Não! As pizzas são iguais às que estão de lado.

Carla: Tínhamos que fazer menos 2 que era 56 e dividir por 2.

	Estratégias de generalização		
Questões	D_2	E	
1		X	Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3	X		

Figura 4. Síntese das estratégias usadas pela Carla e pela Margarida na Tarefa 2.

A Carla e Margarida usaram predominantemente a estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer distante. As expressões obtidas da aplicação desta estratégia representam generalizações de natureza construtiva, já que *vêem* o padrão decomposto em partes disjuntas, observando dois conjuntos iguais nas laterais e dois elementos em cada ponta da mesa. Salienta-se o recurso a uma estratégia desadequada na questão *3*, na qual se pretendia promover a reversibilidade do pensamento. Neste caso, as alunas deram maior relevância ao contexto numérico uma vez que não reflectiram se a solução encontrada fazia sentido no contexto apresentado. Apesar de terem representado visualmente a solução, através de um desenho, não utilizaram esse modelo como forma de validar o resultado obtido.

O caso António e Daniel

No início do estudo o António tinha 10 anos. Concluiu o 5.º ano de escolaridade com nível 4. Este aluno apresenta-se quase sempre com uma postura calma e ponderada, pensando cuidadosamente naquilo que vai dizer ou questionar. O Daniel iniciou o 6º ano de escolaridade com 10 anos de idade. Concluiu o 5º ano de escolaridade com nível 3. Tem uma personalidade completamente diferente da do colega. É bastante extrovertido, gosta de fazer notar a sua presença e é bastante divertido. Em contrapartida é também muito distraído e desconcentra-se facilmente. Toma quase sempre a iniciativa nas aulas, adora participar. Enquanto par, embora com personalidades diferentes, o António e o Daniel complementam-se. Nas sessões de exploração das tarefas, foi quase sempre o António que ficou responsável pelos registos do grupo, no entanto, houve uma interacção constante entre os dois alunos, discutindo e decidindo juntos o que iriam registar.

Tarefa 1 - Os lembretes da Joana

A análise do trabalho desenvolvido pelo António e o Daniel nesta tarefa permitiu observar algumas dificuldades reflectidas na utilização de estratégias de generalização desadequadas. Na resolução da questão *1*, este par não recorreu à representação visual dos 6 lembretes. Uma vez conhecido o 3.º termo da sequência, duplicaram o número de *pioneses*, utilizando deste modo a proporcionalidade directa.

> *Investigadora:* Como concluíram que eram necessários 20 *pioneses* para pendurar 6 lembretes?
>
> *Daniel:* Pensamos assim … se tivéssemos 3 lembretes… em 3 lembretes tinha 10, então acrescentamos mais… mais 3 cartões e dava 20.
>
> *Investigadora:* Portanto, pensaram que acrescentando 3 lembretes iam ter mais 10 *pioneses*. Foi isso?
>
> *António e Daniel:* Sim!

Na resolução desta primeira questão recorreram à estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1), tendo assim utilizado uma abordagem que os conduziu a uma resposta incorrecta já que se trata de um padrão linear. Na entrevista tentou-se que analisassem a validade do seu raciocínio, através de um desenho representativo dos 6 lembretes e aí puderam observar que havia sempre um pionés a ligar lembretes consecutivos.

A proporcionalidade directa continuou a surgir no trabalho deste grupo. Para determinar o número de *pioneses* necessários para pendurar 35 lembretes (questão *2*) usaram a estratégia termo unidade com ajuste numérico (TU_2), como se pode observar na Figura 5.

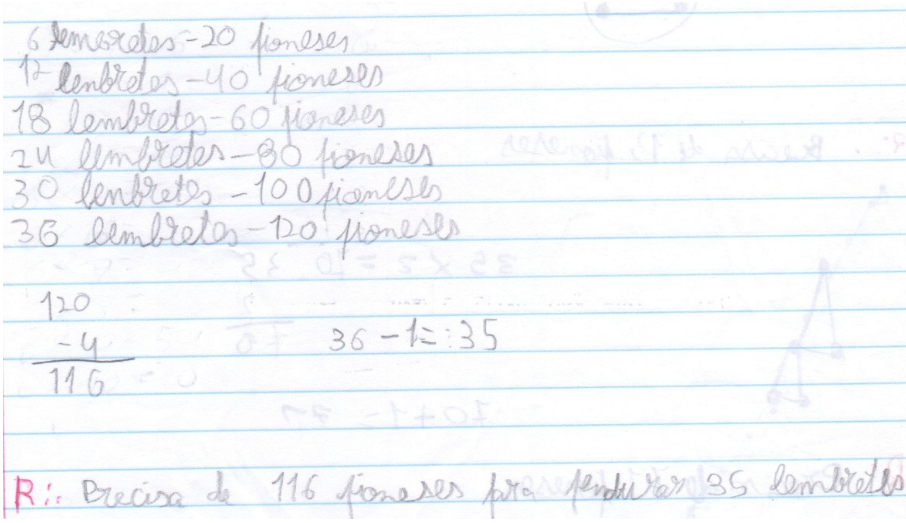

Figura 5. Resolução da questão 2 da Tarefa 1 - António e Daniel.

Tendo já determinado o 6.º termo da sequência (questão *1*), os alunos procuraram o múltiplo de 6 mais próximo de 35, utilizando um raciocínio proporcional. Após terem descoberto o número de *pioneses* necessários para pendurar 36 lembretes, fizeram um ajuste para chegar ao valor pretendido. Este ajuste não teve por base as condições do problema apresentado, centrou-se apenas na utilização de propriedades numéricas.

Na questão *3* este par voltou a usar a proporcionalidade directa. Ao fazerem 30×6=180 lembretes, consideraram que 30 lembretes correspondiam a 100 *pioneses*, logo 180 lembretes corresponderiam a 600 *pioneses*, tendo assim aplicado a estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1). Ao longo da entrevista aperceberam-se da incorrecção deste método verificando que havia *pioneses* comuns a cada 2 lembretes consecutivos e portanto estariam a repetir a sua contagem.

	Estratégias de generalização		
Questões	TU_1	TU_2	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3	X		

Figura 6. Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 1.

Analisando os dados da Figura 6, conclui-se que este par não foi capaz de utilizar estratégias de generalização adequadas ao problema. Os alunos optaram por transformar a informação apresentada visualmente em dados numéricos. Ao negligenciar o contexto do problema, basearam o seu raciocínio na utilização da proporcionalidade directa, quer na generalização próxima quer distante, aplicando as estratégias termo unidade sem ajuste e com ajuste numérico.

Tarefa 2 – A Pizzaria Sole Mio

O António e o Daniel começaram por desenhar uma mesa com 10 pizzas e dispuseram as pessoas num arranjo similar ao dos exemplos apresentados no enunciado. Nesta primeira questão, recorreram à contagem para determinar o número de pessoas que estariam sentadas numa mesa com 10 pizzas.

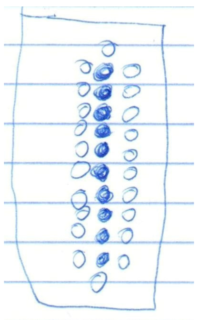

Figura 7. Resolução da questão 1 da Tarefa 2 - António e Daniel.

Na segunda questão da tarefa, perante a generalização distante, mudaram de abordagem, optando por recorrer a uma estratégia explícita. Referiram na folha de resposta que “se há 31 pizzas tem que haver 31 pessoas de cada lado e uma em cada ponta”. Verificaram, neste caso, que a contagem seria um processo demorado e, em alternativa, identificaram uma regra de natureza construtiva que lhes permitiu determinar de forma imediata o número de pessoas. Esta regra serviu ainda de base à resolução da questão *3*. Revelaram assim reversibilidade do pensamento, no entanto apresentaram uma linguagem pouco clara na sua argumentação referindo que “56 são as pessoas dos lados a dividir por dois dá 28”.

	Estratégias de generalização		
Questões	C	E	
1	X		Generalização Próxima
2		X	Generalização Distante
3		X	

Figura 8. Síntese das estratégias usadas pelo António e pelo Daniel na Tarefa 2.

Nesta tarefa, os alunos recorreram a estratégias diferentes na generalização próxima e distante. No primeiro caso recorreram a uma generalização aritmética, através da contagem, já na generalização distante optaram por uma estratégia explícita, identificando uma regra com base no contexto do problema. Esta regra enquadra-se no âmbito da generalização de natureza construtiva, tanto na questão *2* como na *3*.

Discussão

A análise do trabalho dos alunos-caso, nas tarefas apresentadas permite verificar a utilização de diversas estratégias de generalização, em particular: *contagem*, *termo unidade*, *diferença* e *explícita*. Em algumas destas categorias foram identificadas subcategorias mais refinadas, nomeadamente no âmbito das estratégias termo unidade e diferença. Apesar da diversidade de estratégias, algumas foram utilizadas de forma mais frequente do que outras: a contagem, na resolução de questões de generalização próxima; e a explícita, maioritariamente na generalização distante.

É pertinente salientar factores relacionados com a estrutura das tarefas que poderão ter influenciado a escolha de determinadas estratégias: (1) a ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis implicou normalmente uma mudança na abordagem utilizada, ao passar da generalização próxima para a distante; (2) questões que incidiam na descoberta da ordem de um dado termo (reversibilidade do pensamento) levaram a que um dos pares mudasse de estratégia comparativamente à que tinham usado na questão inversa; (3) para além da ordem de grandeza dos valores envolvidos, as características dos números atribuídos às variáveis poderão ser também um factor relevante, considerando por exemplo que na primeira tarefa o termo solicitado aos alunos (6º) era múltiplo do termo representado no enunciado (3º) pode ter sido determinante na utilização da proporcionalidade directa por parte de um dos pares.

Reflectindo sobre a adequação das estratégias usadas e dificuldades identificadas no trabalho destes alunos salienta-se a utilização indevida de um raciocínio de tipo proporcional em contextos lineares, através da utilização de TU_1, TU_2 e D_2. Estes erros estão relacionados com o facto de os alunos não terem formado uma imagem mental do problema, tendo recorrido apenas a propriedades numéricas sem qualquer ligação ao contexto. Como seria expectável, revelaram maiores dificuldades na generalização distante do que na generalização próxima principalmente quando estava subjacente a reversibilidade do pensamento. Warren (2008) associa a complexidade desta situação: (1) à necessidade de relacionar a ordem com o termo; e (2) à mobilização de conhecimentos relacionados com as propriedades das operações aritméticas.

As tarefas utilizadas neste estudo têm uma forte componente visual. Esta opção teve por base a ideia de que a inclusão de um suporte visual em problemas que envolvem a exploração de padrões, conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização e, dependendo do modo como os alunos *vêem* um determinado padrão, podem potenciar a descoberta de expressões equivalentes (Stacey, 1999; Swafford e Langrall, 2000). Assim, perante este tipo de tarefas, os alunos podem aplicar estratégias de natureza visual ou optar por estratégias não visuais, fazendo a transferência para o contexto numérico. De facto, há evidências da utilização de diversas estratégias por parte dos alunos, quer visuais quer não visuais, no âmbito da categorização adoptada nesta investigação. Como já se referiu as estratégias mais utilizadas foram a contagem e a explícita, ambas de natureza visual. Analisando estas estratégias em particular: (1) a contagem revelou-se eficaz em situações de generalização próxima, no entanto foi óbvio para os alunos que seria um processo exaustivo para valores mais distantes; (2) a explícita foi particularmente útil e eficaz na generalização distante, principalmente quando os alunos conseguem apreender de forma imediata a relação entre as variáveis. Ao observar a forma como os alunos *viram* os padrões propostos e a natureza da generalização estabelecida, verifica-se que, nas situações em que foram bem sucedidos, optaram por generalizações de tipo construtivo, tendência que se justifica por uma maior complexidade em termos visuais ao nível da generalização desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008).

Este estudo evidencia a pertinência da proposta de tarefas que possibilitem a utilização de estratégias de natureza diferente, encorajando os alunos a compreender o potencial das estratégias visuais e estabelecer a relação entre contextos visuais e numéricos. A conexão entre abordagens distintas, recorrendo a representações diversas, pode contribuir para o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível, fundamental na resolução de problemas.

Referências

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento em Estudos da Criança: Universidade do Minho.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Departamento do Ensino Básico (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The theory in Practice.* New York: Basic Books.

Goldenberg, E. P. (1996). Habits of Mind as an organizer for the curriculum. *Journal of Education,* 178(1), 13-34.

Healy, L., & Hoyles, C. (1996). Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.). *Proceedings of the 20th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, pp. 67-74, Valencia, Spain: PME.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65 – 86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* USA: NCTM.

Orton, A. (1999). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205–235). Dordrecht: Sense Publishers.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children' cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65-82.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education,* 4, (pp. 161-168), Haifa, Israel: PME.

Shama, G., & Dreyfus, T. (1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 45-70.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Steen, L. A. (1988) The Science of Patterns. *Science, 240,* 611-616.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85,* 14-20.

Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 171-185.