Investigação em Educação Matemática 2013

Raciocínio Matemático

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Investigação em Educação Matemática

2013

Raciocínio Matemático

Editores:

António Domingos

Isabel Vale

Manuel Joaquim Saraiva

Margarida Rodrigues

Maria Cecília Costa

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Investigação em Educação Matemática 2013

Raciocínio Matemático

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Editora: Leonor Santos

Editores convidados: António Domingos, Manuel Joaquim Saraiva, Rosa Antónia Tomás Ferreira

ISSN: 2182-0023

Edição: Rodrigo Figueiredo

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do programa Operacional Factores de Competitividade - COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do projecto «PEst-OE/CED/UI2861/2011»

O CONTRIBUTO DA VISUALIZAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO FUNCIONAL

Ana Barbosa
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo

Nesta apresentação parte-se de um estudo que procurou compreender o modo como alunos do 6º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais. São explorados alguns resultados referentes a quatro estudos de caso para ilustrar estratégias de generalização privilegiadas pelos alunos e dificuldades emergentes do seu trabalho. Pretende-se ainda refletir sobre o papel da visualização no raciocínio funcional bem como sobre alguns fatores que poderão influenciar a escolha das estratégias de generalização em contextos desta natureza.

Palavras-chave: raciocínio funcional; padrões; generalização; visualização.

Introdução

O raciocínio tem um papel crucial na matemática escolar, sendo impossível dissociá-lo da aprendizagem, já que é a partir desta capacidade que os alunos vão adquirindo conhecimento (Thompson, 1996). Trata-se de um processo evolutivo que implica conjeturar, generalizar, investigar o porquê, e desenvolver e avaliar argumentos (Lannin, Ellis & Elliott, 2011). O foco está assim na formulação de afirmações gerais que aprofundem a compreensão dos alunos, permitindo-lhes clarificar o que é verdadeiro (ou falso). Mais se acrescenta que os restantes processos matemáticos eles próprios constituem manifestações do raciocínio. É impossível resolver problemas ou até fazer demonstrações sem mobilizar o raciocínio e ambos são vias através das quais os alunos o desenvolvem. Por sua vez, a comunicação, as conexões e as representações escolhidas pelos alunos servem de suporte ao raciocínio e este deve ser empregue na tomada de decisões associadas a estes processos. Pólya

(1981) associa a atividade matemática a dois tipos de raciocínio: *plausível*, atividade criativa e intuitiva através da qual se geram as conjeturas; e *demonstrativo* ou dedutivo, através do qual o conhecimento matemático é assegurado recorrendo a cadeias argumentativas. A matemática escolar envolve estes dois tipos de raciocínio, começando com a identificação e organização de factos significativos em padrões, a sua utilização para formular conjeturas, seguindo-se o teste dessas conjeturas, culminando na tentativa de compreender e argumentar por que razão esses pressupostos funcionam. Neste sentido, a identificação de padrões é considerada uma componente essencial da atividade raciocínio-demonstração que se tem tornado cada vez mais visível e predominante no currículo de matemática, desde os níveis mais elementares, atravessando todos os temas do currículo (e.g. ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2000).

A Álgebra é frequentemente considerada uma ponte fundamental para aceder a uma matemática de ordem superior. No entanto, são patentes as dificuldades evidenciadas por muitos alunos neste âmbito. Kaput (2008) e Mason (2008) apontam a transição abrupta da aritmética para a álgebra como uma das razões para este insucesso. É por isso fundamental refletir sobre a forma como esta transição se efetua e de que modo se poderá contribuir para o desenvolvimento do raciocínio funcional nos alunos. A exploração de padrões permite a formulação e justificação de generalizações e a utilização dessas relações para fazer previsões, facilitando, de uma forma mais natural, a transição para a álgebra tradicional, através do estabelecimento de relações de tipo funcional (Lannin, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002). Há também vantagens na utilização de capacidades visuais na resolução de problemas em álgebra. As generalizações baseadas no estudo de padrões visuais permitem que os alunos contactem com a componente dinâmica da construção conceptual dos objetos e conceitos matemáticos (Rivera, 2007) e atribuam mais facilmente significado às expressões e aos símbolos.

Neste quadro, considerou-se pertinente compreender o modo como alunos do 6º ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais, definindo, para isso, algumas questões: (1) Que estratégias de generalização são aplicadas pelos alunos?; (2) Que dificuldades manifestam?; (3) Qual o papel da visualização no seu raciocínio?; (4) Que fatores influenciam o raciocínio dos alunos na formulação de generalizações?

Raciocínio Funcional: Um Caminho para o Pensamento Algébrico

A compreensão da matemática, cada vez mais complexa, do século XXI requer que os alunos tenham experiências que vão para além da aritmética e da fluência de cálculo, de modo a poderem entender a estrutura mais profunda subjacente à matemática (Blanton & Kaput, 2011; Romberg & Kaput, 1999). Para isso, é importante que sejam proporcionadas experiências que ajudem os alunos a ser capazes de reconhecer e articular estruturas e relações e de usar essas perceções do raciocínio matemático como objetos para raciocinar matematicamente. Na matemática elementar, este tipo de experiências relaciona-se com a emergência do pensamento algébrico, proporcionando a compreensão da generalidade, associada à matemática e não apenas à exploração de situações de aprendizagem computacionais.

Kaput (2008) associa ao *pensamento algébrico* dois aspetos essenciais: (1) formular e expressar generalizações de modos gradualmente mais formais e convencionais; e (2) raciocinar com representações simbólicas, incluindo a sua manipulação. O mesmo autor destaca que estes aspetos integram três abordagens longitudinais da álgebra escolar: (1) a Álgebra como o estudo das estruturas e sistemas generalizados dos cálculos e das relações numéricas (*aritmética generalizada*); (2) a Álgebra como o estudo de funções, relações e variações (relações funcionais); e (3) a sua aplicação em situações de modelação, para exprimir e formalizar generalizações. Em termos gerais, Blanton e Kaput (2005) definem *pensamento algébrico* como "um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecendo essas generalizações através do discurso da argumentação, expressando-as gradualmente de modos formais e apropriados à idade" (p. 413). Independentemente da definição usada, os princípios básicos do pensamento algébrico contemplam a construção da generalidade ao longo do currículo. Como já se referiu, o pensamento algébrico pode assumir diversas formas, entre elas encontra-se o raciocínio funcional, que tem sido identificado como um dos principais eixos deste tipo de pensamento (Kaput, 2008; Warren, 2008) e um dos conteúdos centrais na investigação em álgebra nos primeiros anos.

Blanton (2008) descreve *raciocínio funcional* como o processo de pensamento utilizado na construção e generalização de padrões e relações, usando diversas ferramentas linguísticas e representacionais, explorando as relações generalizadas ou funções, que constituem objetos matemáticos por si próprias. Do mesmo modo, Smith (2008) refere que a utilização do raciocínio funcional implica que os alunos recorram ao pensamento representacional, centrando-se particularmente na relação entre duas (ou mais) quantidades variáveis, especificamente o tipo de pensamento que permite a transição de relações particulares para a generalização de relações entre casos. Por forma a diferenciar os vários tipos de raciocínio funcional, Smith (2008) considera três modos distintos de analisar padrões e relações: (1) o *pensamento recursivo*, que envolve a descoberta da variação numa sequência de valores; (2) o *pensamento covariacional*, baseado na análise da forma como duas quantidades variam simultaneamente, considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função; e (3) a *relação de correspondência*, que consiste na identificação da correlação entre variáveis, ou seja, compreender a relação existente entre cada valor da variável independente e o da variável dependente. Vários investigadores têm salientado que, desde os níveis mais elementares, os alunos podem usar uma grande diversidade de ferramentas para raciocinar sobre funções, descrevendo em tabelas, desenhos, gráficos, palavras ou símbolos relações recursivas, de covariação e correspondência (e.g. Blanton, 2008; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008).

De facto, a compreensão intuitiva do conceito de função pelas crianças começa a desenvolver-se antes da introdução formal das funções (Eisenmann, 2009) e o professor pode ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio funcional, por exemplo, através de tarefas que impliquem a descoberta e generalização de padrões (Blanton & Kaput, 2011; NCTM, 2000), facilitando a construção do conceito de função. A capacidade de reconhecer padrões e reorganizar dados para representar situações nas quais o *input* se relaciona com o *output*, através de regras funcionais bem definidas, é crítica para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Driscoll, 1999). A exploração de padrões constitui assim um meio privilegiado para introduzir a álgebra devido à possibilidade da representação dinâmica das variáveis envolvidas.

Dos padrões à generalização

A generalização desempenha um papel crucial na atividade de qualquer matemático, sendo considerada uma capacidade inerente ao pensamento matemático em geral. Particularizando para o contexto curricular, pode ainda afirmar-se que é um objetivo chave na aprendizagem da Matemática:

> A generalização é o coração da Matemática. Se os professores não têm consciência da sua presença e não têm por hábito propor que os alunos generalizem e expressem as suas generalizações, então não está a ocorrer pensamento matemático. (Mason, 1996, p. 65)

Trata-se de um meio de comunicação, de uma ferramenta do pensamento, que é a base para o desenvolvimento do conhecimento matemático e o centro da atividade nesta área. A procura de padrões tem vindo a ser associada à generalização, considerando-se que poderá conduzir naturalmente à expressão da generalidade (e.g. Mason, Johnston-Wilder & Graham, 2005; Orton & Orton, 1999). Este tipo de tarefas poderá ser um veículo poderoso para a compreensão de relações entre quantidades que estão subjacentes às funções matemáticas, contribuindo assim para o estabelecimento de relações de tipo funcional (Blanton & Kaput, 2005; Warren, 2008). Por outro lado, constituem uma forma concreta e transparente de os alunos dos níveis mais elementares começarem a debater-se com as noções de generalização e abstração. Espera-se ainda que, através desta abordagem, sejam capazes de mais facilmente atribuir significado à linguagem e ao simbolismo usados na álgebra e nos correspondentes sistemas representacionais, como gráficos e tabelas.

Formalizando, a *generalização de um padrão* assenta na identificação de uma regularidade local que é posteriormente alargada a todos os termos da sequência, servindo de garantia à construção de expressões de elementos da sequência que se mantêm para além do campo percetual (Radford, 2006). Salientando a relevância da procura de padrões, para Kaput (1999), generalizar significa continuar a linha de raciocínio para além do caso ou casos considerados, identificando de forma explícita a regularidade entre casos, ou elevando o raciocínio a um nível onde o foco deixa de estar nos casos ou na situação iniciais, passando a centrar-se nos padrões, procedimentos, estruturas e relação entre eles. Lannin *et al.* (2011) também destacam que generalizar consiste em identificar aspetos comuns aos casos estudados ou prolongar o raciocínio para além do conjunto em que se originou. Embora nestas perspetivas se enfatize, como principal objetivo, a descoberta de uma regra geral, outros autores (e.g. Davydov, 1990; Mason, 1996) sublinham a importância do movimento cíclico entre o particular e o geral durante o processo de generalização, referindo que envolve, por um lado, a identificação da generalidade em casos particulares, mas também a identificação de casos particulares na regra geral.

Pólya (1981) considera que, por norma, a generalização não é um processo imediato mas sim gradual. Começa com tentativas, um esforço no sentido de procurar entender os factos observados, de modo a estabelecer analogias e testar casos especiais. Estas tentativas iniciais poderão conduzir a uma generalização mais apurada, embora nenhuma generalização seja considerada definitiva sem uma demonstração matemática sólida. Na mesma linha de raciocínio, Mason (1996) destaca dois processos complementares que estão no centro do pensamento matemático, a *generalização* e a *particularização,* ou seja, ver o geral no particular e ver o particular no geral. O processo de *particularizar* significa analisar casos particulares de uma afirmação geral e está normalmente associado a exemplos concretos. Numa fase inicial pode ser usado para tentar perceber o significado de uma expressão ou questão, mas também pode contribuir para dar sustentabilidade à generalização. O processo de generalizar relaciona-se com a identificação de padrões e propriedades comuns a várias situações, na tentativa de os expressar verbalmente ou simbolicamente. Apesar destes processos, *particularização* e *generalização*, serem tratados isoladamente é difícil mantê-los separados. A razão de se *particularizar* é permitir e promover a generalização. As generalizações carecem de validação em casos particulares antes de se procurar um argumento convincente. Os exemplos têm assim um papel importante na familiarização com técnicas, resultados, provas e definições, sendo utilizados para ilustrar os passos de qualquer um deles. No entanto, apesar da *particularização* permitir e promover a formulação de generalizações (Mason *et al.*, 2005), este processo deve ser conduzido com alguma cautela, já que nem todos os exemplos conduzem a generalizações bem sucedidas. Há características particulares dos exemplos que são mais úteis do que outras, no reconhecimento da estrutura geral de um padrão, por isso é fundamental que o professor sensibilize os alunos para a procura de exemplos apropriados e promova o desenvolvimento de estratégias adequadas de *particularização* (Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2008).

É também importante refletir sobre a relação entre a estrutura dos padrões e a formulação de generalizações. Segundo Threlfall (1999) os padrões de repetição contribuem de forma significativa para o desenvolvimento de determinadas capacidades: servem de contexto para ensinar outros conteúdos; podem conduzir às ideias de ordem e comparação, se os alunos forem incitados a procurar o elemento que se segue; constituem um veículo para introduzir e interpretar símbolos, que são essenciais na álgebra, constituindo um contexto para desenvolver a capacidade de generalizar. Este autor refere ainda que a análise de um padrão de repetição envolve simultaneamente uma abordagem conceptual e procedimental, só assim é possível perceber o padrão e continuá-lo. Mas acrescenta que a perceção da *unidade de repetição* é crítica na exploração do padrão, valorizando desta forma a componente conceptual que potencia a análise e a reflexão. Warren (2008) reforça também as potencialidades dos padrões de repetição para promover a generalização. É possível, através desta abordagem, solicitar ao aluno a descoberta de um termo colocado numa determinada posição na sequência sem ter necessidade de a continuar recursivamente. A identificação da unidade de repetição e a compreensão da estrutura global do padrão permitem ao aluno ir além do mero processo de continuação do padrão, possibilitando a generalização distante através da descoberta imediata do termo que ocupa uma dada ordem na sequência, abrindo assim o caminho para a abstração. Mas, tradicionalmente, a ponte entre a aritmética e a álgebra é feita a partir dos padrões de crescimento. Ambos os tipos de padrões são necessários ao desenvolvimento do pensamento matemático, mas são os de crescimento que mais naturalmente conduzem à relação entre duas quantidades variáveis, ou seja, ao raciocínio funcional (Lee & Freiman, 2006; Rivera & Becker, 2008). Na exploração deste tipo de padrões, solicita-se que os alunos encontrem uma relação entre os elementos do padrão e a sua posição e que usem esta generalização para gerar elementos noutras posições. São assim motivados a pensar nos padrões de crescimento como funções em vez de se centrarem apenas na variação relativa a uma das variáveis.

O papel dos padrões visuais na descoberta de relações funcionais

A relevância atribuída à visualização na aprendizagem da matemática fundamenta-se pelo facto de não se limitar à mera ilustração mas também ao ser reconhecida como uma componente do raciocínio (Vale, 2012). Apesar de não ser uma tarefa fácil, é sugerida a integração de abordagens visuais nas experiências matemáticas proporcionadas aos alunos (NCTM, 2000). Há dois grandes desafios: a maioria dos alunos associam a matemática à manipulação de números, expressões numéricas e algoritmos, o que pode contribuir para a desvalorização da visualização; por outro lado, o professor deve ter em consideração que há muitas formas de *ver* (Duval, 1998). As características visuais podem ser apreendidas de duas formas: *percetualmente* e *discursivamente.* A apreensão percetual das figuras ocorre quando estas são vistas como um todo, como um objeto único. Na apreensão discursiva é identificada a disposição espacial dos elementos que compõem a figura, quer individualmente ou em relação uns com os outros, como uma configuração de objetos que se relacionam por intermédio de um atributo ou propriedade invariante.

As tarefas que envolvem o estudo de padrões podem ser propostas em diversos contextos, visuais e não visuais, e dar lugar a diferentes abordagens. No entanto, a literatura refere que a utilização de um suporte visual na apresentação de problemas que envolvem a procura de padrões pode conduzir à aplicação de diferentes abordagens para chegar à generalização, quer de natureza visual quer não visual (e.g. Barbosa, 2010; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000). Acrescenta-se que os padrões visuais podem gerar diferentes regras que potenciam: conexões entre relações aritméticas e geométricas; a atribuição de significado às regras formuladas; a necessidade de formular e validar conjeturas. Desta forma, o trabalho com relações funcionais através de padrões de crescimento visuais podem suscitar a atribuição de significado às operações que transformam a variável independente na variável dependente. Usualmente há diferentes modos de expressar a relação entre duas variáveis em tarefas deste tipo, constituindo assim um contexto privilegiado para discutir múltiplas estratégias de generalização e regras, bem como a exploração de expressões equivalentes, o que contribui para um raciocínio mais flexível (Barbosa, 2011). Deste modo, os padrões visuais poderão tornar-se um contexto facilitador do raciocínio funcional, promovendo diferentes modos de *ver*, de generalizar e consequentemente melhores justificações (Lannin, Barker & Townsend, 2006; Becker & Rivera, 2005).

No contexto dos padrões de tipo visual, os alunos que são capazes de analisar, de forma discursiva, as figuras podem fazê-lo de diferentes modos. Por um lado podem identificar conjuntos de elementos disjuntos que são conjugados de forma a construir a figura inicial, dando assim lugar a uma *generalização construtiva* (Rivera & Becker, 2008). Mas, por outro lado, podem observar a existência de subconfigurações que se sobrepõem, contando alguns elementos mais do que uma vez e que posteriormente são subtraídos, o que significa que a generalização formulada é de tipo *desconstrutivo* (Rivera & Becker, 2008). Vários estudos têm concluído que os alunos têm tendência para utilizar mais as generalizações de tipo construtivo do que as de tipo desconstrutivo (e.g. Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008), já que esta última categoria envolve um nível cognitivo superior no que refere à visualização.

Estratégias de generalização de padrões em contexto visual

A generalização de um padrão implica a utilização de uma estratégia, um modo de ação, no entanto há uma grande diversidade de abordagens que possibilitam aos alunos generalizar. Têm sido desenvolvidos vários estudos com o intuito de compreender e classificar as estratégias evidenciadas por alunos, de diversos níveis de ensino, quando resolvem problemas com padrões, em diferentes contextos. A análise das categorias propostas por alguns investigadores (Lannin et al, 2006; Orton & Orton, 1999; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989) conduziu à construção da categorização que se apresenta no Quadro 1 (Barbosa, 2010).

Nesta categorização são identificadas diversas estratégias de generalização, tendo como ponto de partida padrões em contextos visuais. São, no entanto, percetíveis diferenças na sua natureza, considerando que, em alguns casos, as figuras desempenham um papel essencial na descoberta do invariante (C, TU_3, D_3, E), e noutros o trabalho é desenvolvido em contexto numérico (TU_1, TU_2, D_1, D_2, TE). Destaca-se assim que diferentes estratégias podem ser utilizadas na resolução de um mesmo problema mas, dependendo das características das situações apresentadas, é fundamental que os alunos percebam as potencialidades e limitações de cada estratégia, tornando-se flexíveis no seu raciocínio.

Quadro 1. Categorização das estratégias de generalização

Estratégia		Descrição
Contagem (C)		Desenhar uma figura e contar os seus elementos.
Termo Unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.
Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Explícita (E)		Descobrir uma regra, com base no contexto do problema, que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente.
Tentativa e Erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

Fatores que influenciam o raciocínio na generalização de padrões

Há alguns fatores que podem ter um impacto significativo na escolha das estratégias utilizadas na generalização de padrões, independentemente da sua adequação. A identificação de obstáculos ao processo de generalização, bem como das razões que lhes possam estar subjacentes, é fundamental para que o professor possa promover nos alunos o desenvolvimento da capacidade de generalizar.

Lannin *et al.* (2006) identificaram um conjunto de fatores que podem influenciar de forma significativa a utilização das estratégias de generalização, organizando-os em três categorias: (1) *fatores sociais*, resultantes das interações do aluno com os seus pares e com o professor, já que o questionamento, o feedback e a argumentação referentes à utilização de uma determinada estratégia poderão ter implicações no raciocínio dos alunos; (2) *fatores cognitivos*, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu; e (3) *fatores associados à estrutura da tarefa*, desde a estrutura do padrão (linear ou não linear), os valores atribuídos à variável independente (valores próximos ou distantes, múltiplos de valores conhecidos) ou até a capacidade de visualizar. Em geral, Lannin *et al.* (2006) concluíram que, quando os valores de partida são próximos, os alunos tendem a utilizar regras recursivas, independentemente do tipo de padrão e da componente visual da tarefa. Embora também refiram que a análise visual da situação conduz muitas vezes a uma perspetiva diferente acerca da relação recursiva, promovendo a associação entre a regra proposta e as características do contexto. Já os alunos que baseiam o seu raciocínio apenas em valores numéricos têm normalmente pouca noção acerca da relação entre a lei que encontraram e o contexto do problema. Quando os valores de partida são múltiplos de termos conhecidos da sequência, os alunos tendem a aplicar a estratégia *termo unidade*. Referem ainda que os alunos com dificuldades na visualização aplicam incorretamente a estratégia *termo unidade,* enquanto aqueles que revelam maiores capacidades visuais reconhecem a necessidade de ajustar a estratégia no caso de não se tratar de um modelo de proporcionalidade direta. A utilização de valores de partida distantes pode encorajar a aplicação da estratégia explícita, embora em diferentes vertentes.

A aplicação indevida da proporcionalidade direta, principalmente na exploração de padrões de tipo linear, tem sido mencionada em vários estudos (e.g. Becker & Rivera, 2005; Lannin *et al.*, 2006; Sasman, Olivier & Linchevski, 1999;

Stacey, 1989). A análise aprofundada deste fenómeno aponta para duas situações que podem estar na base deste tipo de raciocínio. Por um lado a utilização de um contexto de resolução estritamente numérico, fazendo com que as variáveis sejam manipuladas sem significado. Outro fator relaciona-se com a proposta de generalização para "números apelativos" (Sasman *et al.*, 1999, p. 5), do ponto de vista multiplicativo. Neste sentido, Sasman *et al.* (1999) salientaram a importância das tarefas contemplarem números não apelativos como uma forma de contornar a tendência de utilização da proporcionalidade direta, sugerindo por exemplo a utilização de números primos.

O foco nos aspetos numéricos do padrão, mesmo quando é apresentado em contexto visual, é muitas vezes um entrave à generalização (Noss, Healy & Hoyles, 1997). Mason (1996) observa que há uma tendência para construir tabelas de valores das quais é deduzida uma fórmula geral, nem sempre correta, com base na análise de um ou dois casos particulares. Este autor sugere que devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorar diversos tipos de padrões, sendo utilizada a visualização e a manipulação de figuras para facilitar a dedução da generalização.

No contexto dos padrões visuais, mesmo quando os alunos são capazes de apreender discursivamente as figuras, é necessário ter em conta a complexidade das mesmas, fator que pode condicionar o estabelecimento da generalização. Sasman *et al.* (1999) distinguem entre *figuras transparentes* e *não transparentes.* No primeiro caso, a regra que caracteriza o padrão está subjacente, de uma forma evidente, na estrutura das figuras, o que não acontece nas figuras não transparentes, nas quais a regra não é facilmente descoberta através da mera observação das figuras da sequência. Nesta situação é pertinente pensar em estratégias que possam auxiliar os alunos a identificar o padrão visualmente e consequentemente a generalizar. Rivera (2007) sugere que os alunos sejam encorajados a manipular e transformar as figuras em formas mais simples e logo mais fáceis de reconhecer, o que reflete uma mudança cognitiva no que refere à apreensão das figuras (Duval, 1998). Outra estratégia sugerida por Rivera (2007) envolve um processo simétrico de contagem. Os alunos devem ser capazes de identificar simetria nas figuras apresentadas e posteriormente concentrar-se em apenas uma das partes da figura analisada para efetuar a contagem, aplicando a mesma ação às partes da figura que apresentam as mesmas características.

Alguns autores dão sugestões que podem contribuir para que os alunos ultrapassem ou minimizem estas dificuldades. Noss *et al.* (1997) identificaram que o estabelecimento de uma conexão de natureza visual entre o contexto do problema e a representação simbólica correspondente é um fator determinante na atribuição de significado a regras de tipo explícito. Analogamente, para Swafford e Langrall (2000) e Zazkis e Liljedahl (2002), solicitar que os alunos analisem diferentes valores para a variável independente, testando números cada vez maiores, pode promover a utilização de um raciocínio explícito. Stacey e MacGregor (1995) sublinharam também a importância de utilizar tarefas que diminuam a ênfase na relação recursiva, tentando que os alunos identifiquem a conexão entre as variáveis independente e dependente com o objetivo de contactarem com relações de tipo explícito. Em síntese, é pertinente que o professor reflita sobre a estruturação e implementação das tarefas para melhor promover o desenvolvimento do raciocínio funcional nos alunos.

Metodologia do Estudo

Dada a natureza do problema proposto, bem como das questões de investigação definidas, este estudo segue uma abordagem qualitativa, tendo-se optando por um *design* de estudo de caso. A investigação decorreu em duas turmas do 6º ano de escolaridade, de duas escolas do distrito de Viana do Castelo. Ao longo de um ano letivo, foram acompanhados dois pares de alunos, em cada uma das turmas, constituindo quatro estudos de caso. Neste período de tempo, foram implementadas sete tarefas centradas na resolução de problemas de *generalização próxima* (para determinar o termo da sequência pedido é possível utilizar um desenho ou um método recursivo) e *generalização distante* (os métodos descritos anteriormente não se adequam à resolução deste tipo de questões sendo necessário descobrir uma expressão geral), em contextos visuais. Os alunos envolvidos no estudo não tinham qualquer experiência com tarefas desta natureza.

Os dados recolhidos são, essencialmente, de natureza descritiva, resultantes de três componentes fundamentais: observação, entrevista e análise de documentos. Foram observadas todas as sessões de implementação das tarefas propostas. Cada uma das sessões foi videogravada para posterior visionamento e análise. Após a implementação de cada tarefa foram realizadas entrevistas semi-estruturadas aos alunos-caso, tendo sido audiogravadas e posteriormente transcritas. Através das entrevistas procurou-se clarificar aspetos relacionados com as dificuldades dos alunos, bem como com as estratégias de generalização por eles utilizadas. A análise de documentos baseou-se em todos os documentos produzidos pelos alunos, registos biográficos e relativos ao percurso escolar, e em notas de campo redigidas pela investigadora ao longo do estudo.

Na análise de dados seguiu-se o modelo proposto por Miles e Huberman (1994). Os dados resultantes das entrevistas, da observação de cada uma das sessões, bem como dos registos dos alunos foram *reduzidos*, de modo a identificar padrões e a classificar a informação para posterior interpretação. Estas categorias incidiram, particularmente, nas estratégias de generalização utilizadas pelos alunos, no tipo de dificuldades identificadas. Numa primeira instância foi desenhada uma categorização baseada na literatura que foi gradualmente refinada ao longo do processo de recolha e análise de dados, com a emergência de novas categorias.

Discussão de Alguns Resultados

Apresentam-se alguns resultados referentes às estratégias de generalização e dificuldades apresentadas pelos alunos-caso, na resolução de três das tarefas implementadas. Por outro lado, procura-se também perceber o papel da visualização e a influência de alguns fatores no seu raciocínio.

Os lembretes da Joana

A tarefa *Os lembretes da Joana* (Anexo 1) representa um padrão linear, apresentado num contexto visual, e contempla questões de generalização próxima e de generalização distante. Apesar de a tarefa ter uma forte componente visual, os alunos poderiam optar por estratégias de natureza diferente. Na primeira questão, com o objetivo de determinar o número de *pioneses* necessários para pendurar 6 lembretes (generalização próxima), todos os pares, à exceção do António e do Daniel, usaram a *contagem*. Começaram por desenhar os elementos solicitados, mantendo a estrutura da sequência, contando posteriormente o número de *pioneses* (Figura 1).

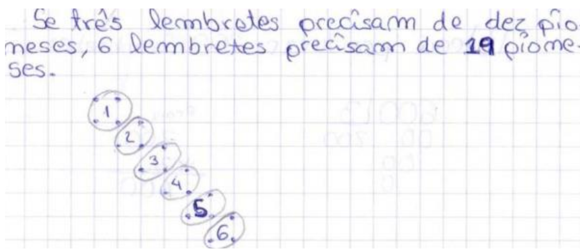


Figura 1. Resolução apresentada pela Andreia e pela Diana

Já o António e o Daniel não recorreram à representação visual da situação proposta. Conhecendo o terceiro termo da sequência, duplicaram o número de *pioneses*, usando indevidamente a proporcionalidade direta, através da estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1). Consideraram que ao duplicar o número de lembretes também duplicariam o número de *pioneses*.

Na resolução da segunda questão (generalização distante), os três pares que utilizaram a *contagem* na situação anterior, concluíram que esta não seria uma estratégia adequada neste caso porque "eram muitos lembretes". Optaram pela identificação de uma regra que relacionava o número de *pioneses* com o número de lembretes (*explícita*). As expressões formuladas resultaram no estabelecimento de uma generalização construtiva, tendo surgido as expressões: 35x3+1 e 34x3+4 (Figura 2). Seguindo o raciocínio anterior, o António e o Daniel continuaram a utilizar a proporcionalidade direta, no entanto, neste caso, recorreram à estratégia termo unidade com ajuste numérico (TU_2). Tendo já determinado o sexto termo da sequência na questão anterior, procuraram o múltiplo de 6 mais próximo de 35 e fizeram um ajuste para obter valor pretendido (Figura 3).

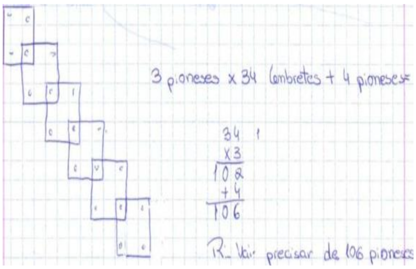


Figura 2. Resolução apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

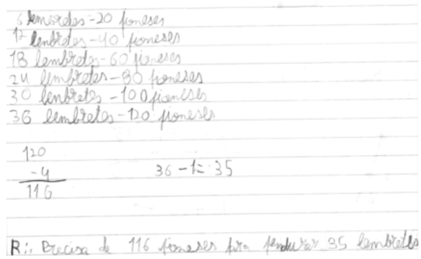


Figura 3. Resolução apresentada pelo António e pelo Daniel

A última questão desta tarefa, apesar de implicar a generalização distante, envolvia a reversibilidade do raciocínio, já que era dado o número de *pioneses* e se pretendia saber o número de lembretes. Neste caso o trabalho dos quatro pares divergiu bastante, evidenciando mais dificuldades do que nas questões anteriores. O Gonçalo e a Tânia foram os únicos que mostraram reversibilidade do raciocínio, aplicando as operações inversas associadas à expressão que tinham deduzido na questão anterior (*explícita*). A Carla e a Margarida também recorreram a uma estratégia de natureza visual. Tendo considerado a diferença entre dois termos consecutivos (3 *pioneses*), verificaram quantos conjuntos conseguiam fazer com 600 *pioneses*, assegurando-se que "1 tinha de ficar de fora para o último cartão". Deste modo, foi feito um ajuste do resultado com base no contexto do problema (D_3). Tiveram sempre presente o significado dos números manipulados e a sua representatividade na situação problemática proposta. A Andreia e a Diana aplicaram uma estratégia desadequada. Tal como o par anterior, fixaram-se na diferença entre termos consecutivos mas não efetuaram qualquer ajuste após o cálculo 600:3 (D_2). O António e o Daniel continuaram a usar a proporcionalidade direta, à semelhança das questões anteriores. Tendo concluído que 30 lembretes correspondiam a 100 *pioneses* (Figura 3), inferiram que 600 *pioneses* permitiriam pendurar 180 lembretes (TU_1).

Piscinas

A tarefa *Piscinas* (Anexo 2) tem uma estrutura semelhante à tarefa anterior, no que respeita ao tipo de questões formuladas. Tem também uma componente visual evidente, no entanto o padrão apresentado é de natureza diferente, contemplando a possibilidade de fazer variar simultaneamente as duas variáveis, neste caso, as dimensões da piscina. Todos os pares representaram uma piscina de dimensões 10x6, distinguindo os azulejos de cada cor, para dar resposta à primeira questão da tarefa (generalização próxima). Após o desenho efetuaram a respetiva *contagem* (Figura 4).

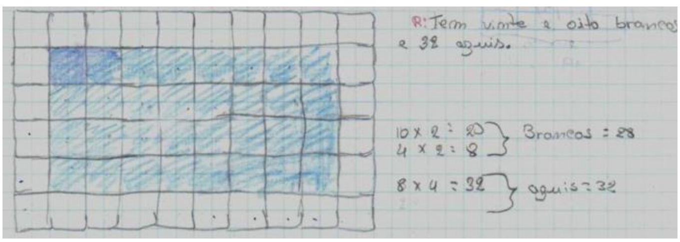


Figura 4. Resolução apresentada pela Carla e pela Margarida

Para determinarem o número de azulejos de uma piscina de dimensões 30x90 (generalização distante), todos os pares encontraram uma regra que permitia estabelecer uma relação entre as dimensões da piscina e os respetivos azulejos (*explícita*), já que se tratava de "uma piscina muito grande" que não iria "caber na folha". No caso dos azulejos azuis todos propuseram a expressão 88x28, associando-a ao conceito de área (*generalização construtiva*). As expressões formuladas pelos alunos para os azulejos brancos diferiram, de acordo com o modo como *viram* as figuras: (1) A Carla e a Margarida, bem como o António e o Daniel, identificaram agrupamentos de azulejos que deram lugar à expressão 90x2+28x2 (*generalização construtiva*); (2) A Andreia e a Diana usaram um raciocínio similar (Figura 5), embora tenham interpretado a figura de outra forma, 30x2+88x2 (*generalização construtiva*); (3) O Gonçalo e a Tânia optaram por uma *generalização desconstrutiva*, associada à expressão 30x2+90x2-4, correspondente à remoção dos cantos contados duas vezes.

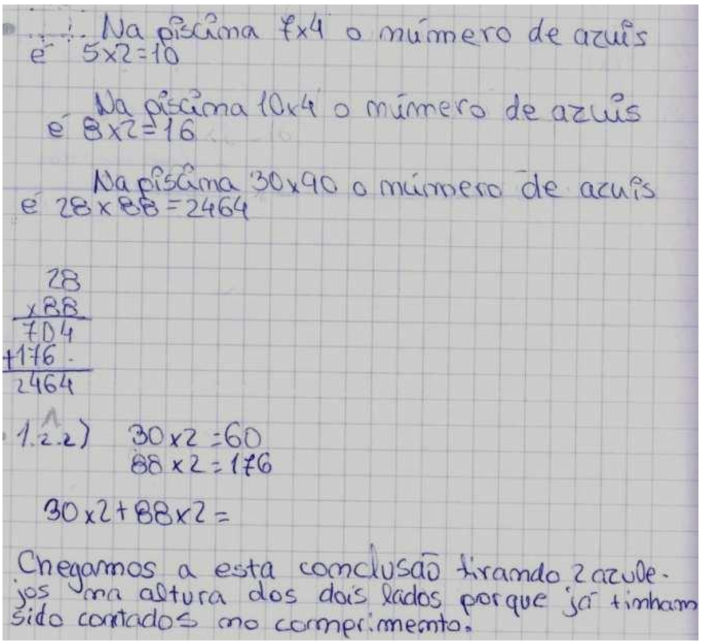


Figura 5. Resolução apresentada pela Andreia e pela Diana

A última questão da tarefa trouxe algumas dificuldades aos alunos. Na sua base estava, à semelhança do que já tinha sucedido na tarefa anterior, o raciocínio inverso, sendo dados os azulejos e desconhecidas as dimensões da piscina. Dois dos pares, o António e o Daniel e o Gonçalo e a Tânia, não foram capazes de encontrar uma estratégia adequada para resolver esta situação. Os restantes pares aplicaram a *tentativa e erro* (Figura 6), com a finalidade de "ver qual era o número mais próximo de 300", encontrada anteriormente para calcular o número de azulejos de cada cor.

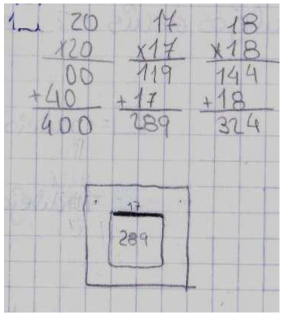


Figura 6. Resolução apresentada pela Andreia e pela Diana

Retângulos encaixados

O problema apresentado na tarefa *Retângulos encaixados* (Anexo 3) envolve um padrão com estrutura não linear e contempla *figuras não transparentes*, ao contrário das tarefas anteriores. Ao nível da visualização, este fator poderá ter sido determinante no facto de nenhum dos pares ter aplicado a estratégia *explícita*.

Na resolução da primeira questão, todos recorreram à *contagem*, tendo desmembrado a figura em retângulos de diferentes tamanhos para mais facilmente os identificar (Figura 7) ou, em alternativa, efetuado representações pictóricas sobre a figura apresentada no enunciado, com a mesma finalidade (Figura 8).

São já evidentes, na resolução apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia, dificuldades na identificação dos 15 retângulos, uma vez que encontraram apenas 8 desses retângulos. Nos restantes casos, a *contagem* mostrou-se uma estratégia adequada já que os alunos usaram um raciocínio organizado para contar o número de retângulos referentes às possíveis dimensões.

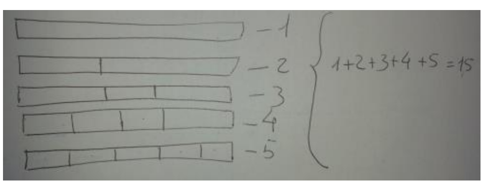


Figura 7. Resolução apresentada pelo António e pelo Daniel

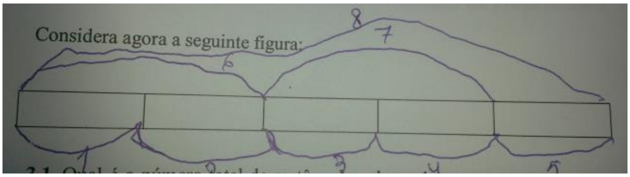


Figura 8. Resolução apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Na segunda questão desta tarefa as dificuldades foram ainda mais notórias com o aumento da ordem do termo, tendo sido utilizadas diferentes estratégias por parte destes alunos. Apenas a Carla e a Margarida conseguiram determinar o número correto de retângulos, usando a estratégia *recursiva* (D_1). Transformaram em números os dados inicialmente apresentados em contexto visual, organizando-os numa tabela de valores, que lhes possibilitou a descoberta da variação entre termos consecutivos (Figura 9). Neste caso, a estratégia usada por este par mostrou-se adequada porque o termo solicitado era relativamente próximo.

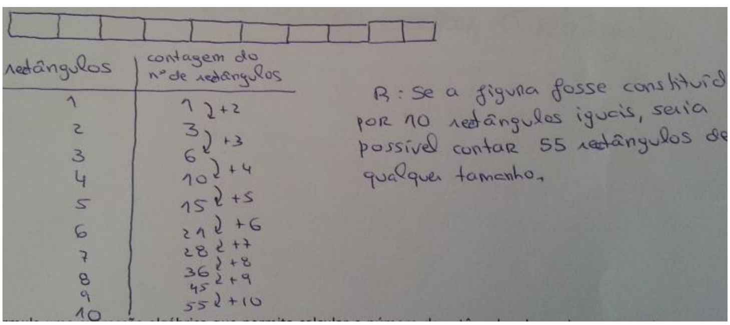


Figura 9. Resolução apresentada pela Carla e pela Margarida

Dos restantes pares, o António e o Daniel optaram pela estratégia termo unidade sem ajuste (TU_1), usando, deste modo, um raciocínio proporcional. Concluíram que "se um conjunto de 5 tem 15 retângulos então com um conjunto de 10 é o dobro", usando uma abordagem desadequada à estrutura deste padrão. A Andreia e a Diana e o Gonçalo e a Tânia mantiveram a estratégia usada previamente, a *contagem*, no entanto não os conduziu à resposta correta. Nesta situação havia muitas hipóteses, o que implicava a organização dos dados de uma forma sistemática e compreensível, por forma a não repetirem soluções ou omitirem soluções. Estes pares tentaram contar diretamente na figura o número de retângulos de qualquer tamanho, mas, como se verifica na figura 10, recorreram a representações complexas em termos visuais que dificultaram a identificação de uma regra.

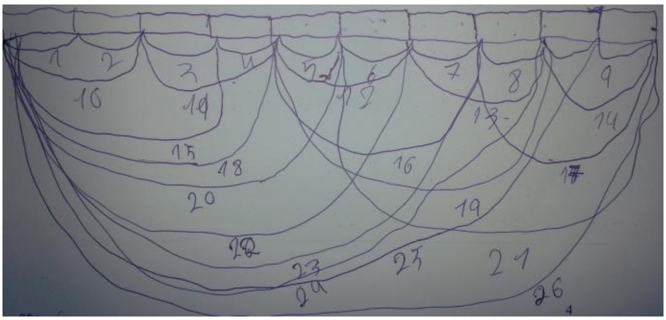


Figura 10. Resolução apresentada pelo Gonçalo e pela Tânia

Discussão e Conclusões

Como se pode verificar, através dos resultados apresentados, tarefas que envolvem a exploração de padrões em contexto visual promovem a emergência de múltiplas estratégias de generalização, potenciando o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível (e.g. Lannin *et al.*, 2006, Rivera & Becker, 2008; Sasman *et al.*, 1999). Apesar de se atribuir um maior destaque às representações visuais, estas propostas permitem a aplicação de estratégias de natureza diferente, colocando o enfoque nas figuras ou transformando a informação dada em números. No entanto, para além de se esperar que os alunos sejam capazes de aplicar e adaptar diferentes estratégias no processo de generalização, é igualmente importante que compreendam as vantagens e limitações de cada uma dessas abordagens. Por exemplo, a *contagem* e a estratégia *recursiva* (D_1) são úteis quando se pretende a descoberta de termos próximos numa sequência, no entanto podem revelar-se difíceis de aplicar na generalização distante, como alguns alunos concluíram. A *contagem* conduziu, quase sempre, à obtenção de respostas corretas, mas houve situações em que esta estratégia não foi aplicada de forma adequada. A resolução de questões de generalização distante através da *contagem* constitui um processo exaustivo e que pode resultar em representações complexas, desorganizadas, não deixando perceber a estrutura do padrão. Foi também percetível que, quando a *contagem* foi efetuada tendo por base a apreensão percetual (Duval, 1998) das figuras, constituiu um entrave à formulação de uma regra, mas, a sua apreensão discursiva (Duval, 1998) permitiu identificar invariantes, facilitando o desenvolvimento do raciocínio funcional. A estratégia *explícita* foi reconhecida como um processo que possibilita generalizações mais expeditas, sendo particularmente valorizada pelos alunos aquando da generalização distante. Salienta-se que, nas questões que tinham subjacente a reversibilidade do raciocínio, a *tentativa e erro* foi uma alternativa eficiente à estratégia *explícita*, já que grande parte dos alunos evidenciaram dificuldades na utilização do raciocínio inverso, tendo previamente identificado uma regra que relacionava as duas variáveis. A estratégia *termo unidade* foi usada de forma pontual e desadequada aos contextos propostos. Esta situação relaciona-se com o trabalho em contextos puramente numéricos que impede os alunos de compreenderem a utilização indevida do raciocínio proporcional (e.g. Becker & Rivera, 2005; Lannin *et al.*, 2006; Sasman *et al.*, 1999; Stacey, 1989), já que nenhum dos padrões apresentados se adequava a este modelo. Esta situação revela que os alunos que tomam esta opção têm dificuldades na visualização, limitando o seu trabalho à manipulação de números sem significado.

Dependendo do modo como os alunos *veem* um determinado padrão, as abordagens de natureza visual podem gerar a descoberta de diferentes regras/expressões para o representar (e.g. Rivera & Becker, 2008; Vale, 2012). Esta situação possibilita ao professor explorar assim a noção de equivalência, um conceito crucial no pensamento algébrico, evitando também que os alunos concluam que todos devem convergir para a mesma solução. Ao analisar a forma como os alunos *viram* os padrões apresentados e a natureza da generalização estabelecida, verificou-se que formularam maioritariamente generalizações de tipo construtivo, sendo para eles mais evidente a identificação de subconjuntos disjuntos nas figuras (Rivera & Becker, 2008).

Refletindo sobre possíveis fatores que poderão ter influenciado o raciocínio dos alunos ao nível da generalização, destacam-se essencialmente aspetos relacionados com a estrutura das tarefas: (1) Todas integravam questões de generalização próxima e de generalização distante. A ordem de grandeza dos valores atribuídos às variáveis influenciou o tipo de estratégias adotadas, tendo os alunos recorrido, em geral, a estratégias distintas na resolução destas situações (Lannin *et al.*, 2006; Stacey, 1989); (2) Em algumas tarefas foram colocadas questões que promoviam a reversibilidade do raciocínio, solicitando-se a descoberta da ordem que um dado termo ocupava na sequência. Nestes casos, por norma, os alunos evidenciaram dificuldades e nem sempre foram capazes de usar as operações inversas, recorrendo a estratégias alternativas, como a tentativa e erro; (3) As propriedades dos números utilizados também pareceram condicionar as escolhas dos alunos, nomeadamente o facto de serem *apelativos* do ponto de vista multiplicativo, o que poderá motivar o raciocínio proporcional (Sasman *et al.*, 1999), mesmo quando este não se adequa; (4) As figuras representativas do padrão poderão ser *transparentes* ou *não transparentes*, caso a estrutura do padrão seja imediatamente identificável na figura ou não. No caso das figuras não transparentes identificou-se uma maior dificuldade por parte dos alunos em deduzir uma regra, apresentando tendência para abordagens numéricas e estratégias recursivas. Raramente conseguiram ser bem sucedidos na tentativa de identificação de uma regra diretamente a partir das figuras, já que a sua apreensão ficou comprometida (Duval, 1998; Rivera, 2007). (5) A estrutura do padrão (linear ou não linear) é também um fator a ter em conta na escolha das estratégias de generalização, já que, por exemplo, nos padrões não lineares a relação recursiva não é tão óbvia como nos padrões lineares, o que implica que os alunos procurem centrar-se na relação funcional.

Na formulação/seleção de tarefas com padrões visuais, o professor deverá ter em consideração uma grande diversidade de fatores que poderão influenciar o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos, contemplando todas essas vertentes no planeamento do trabalho em sala de aula. É importante selecionar propostas que permitam a aplicação de diferentes estratégias e promover uma perspetiva dinâmica entre as possíveis abordagens, de modo a que os alunos consigam compreender e estabelecer paralelismos entre estratégias visuais e numéricas. A discussão em torno das potencialidades e limitações de cada abordagem poderá ser um importante contributo para que desenvolvam um raciocínio mais flexível, a fluência ao nível da comunicação e aumentem o seu repertório de representações.

Referências

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Tese de Doutoramento em Estudos da Criança: Universidade do Minho.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 420-428. Rzeszow: ERME.

Becker, J. & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, 121-128.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NA: Heinemann.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer Berlin Heidelberg.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwarz, J. L. (2008). Early algebra = algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Davidov, V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eisenmann, P. (2009). A contribution to the development of functional thinking of pupils and students. *Teaching of Mathematics*, *12*(2), 73-81.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*, 428−33.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65 – 86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Johnston-Wilder, S. & Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: Sage (Paul Chapman).

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* USA: NCTM.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. *Educational Studies in Mathematics, 33*(2), 203-233.

Orton, A. & Orton , J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp 104-120). London: Cassell.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 1-21.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher, 101*(1), 69-75.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 65-82.

Romberg, T., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms* *that Promote Understanding* (pp. 3–32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sasman, M., Olivier, A., Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education, 4*, pp 161-168, Haifa, Israel: PME.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the el- ementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics 20*(2), 147-164.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1995). The influence of problem representation on algebraic equation writing and solution strategies. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics Education, 2*, 90- 97.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89–112.

Thompson, P. W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 267-283). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, *20*, 181-207.

Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 171-185.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*, 379- 402.

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Chernoff, E. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM: International Journal in Mathematics Education, 40*, 131-141.

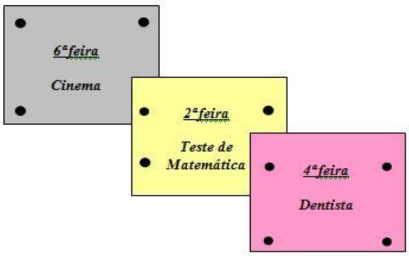
Anexos

Anexo 1

Os lembretes da Joana

Em cada questão desta tarefa deves explicar detalhadamente o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

Para não se esquecer dos seus compromissos, a Joana pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Joana continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

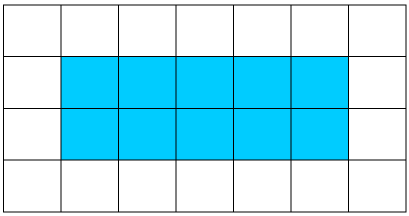
1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?
3. Sabendo que a Joana comprou uma caixa de 600 *pioneses*, quantos lembretes poderá pendurar, no máximo, no seu placar?

Anexo 2

Piscinas

Em cada alínea deves <u>explicar detalhadamente</u> o teu raciocínio. Para o fazer podes utilizar cálculos, palavras ou desenhos.

A empresa *Queda d'Água* constrói piscinas de fundo rectangular. Na construção de cada piscina são utilizados azulejos azuis, para o fundo, e azulejos brancos, para colocar no bordo. A figura ilustra uma piscina de dimensões 7×4 construída pela empresa *Queda d'Água*.



1.4. **1.** Determina o número de azulejos de cada cor para uma piscina de dimensões 10×6.

2. Supõe agora que a empresa construiu uma piscina de dimensões 30×90.

2.1. Propõe uma expressão numérica que permita calcular o número de azulejos azuis necessários à construção dessa piscina. Explica como chegaste a essa expressão.

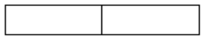
2.2. Propõe agora uma expressão numérica para determinar o número de azulejos brancos existentes na piscina considerada. Explica como chegaste a essa expressão.

3. Imagina que a empresa dispõe de 300 azulejos azuis para construir a piscina de um cliente. Sabendo que este pretende uma piscina **quadrangular**, determina as **dimensões máximas** dessa piscina e o número de azulejos de cada tipo necessários à sua construção.

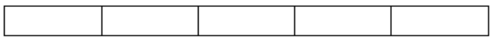
Anexo 3

Rectângulos encaixados

Na figura que a seguir se apresenta é possível contar 3 rectângulos.



Considera agora a seguinte figura (constituída por 5 rectângulos iguais):



1. Quantos rectângulos, de qualquer tamanho, consegues contar? Explica como pensaste.

2. E se a figura fosse constituída por 10 rectângulos iguais, qual seria o número total de rectângulos, de qualquer tamanho, que conseguirias contar? Explica como pensaste.